

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio $R = 50$ cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto passa per la posizione angolare $\theta_0 = 0$ con velocità (tangenziale) $v_0 = 2.0$ m/s e si sa che all'istante $t_1 = 0.50$ s esso ha una velocità (tangenziale) $v_1 = 1.0$ m/s.

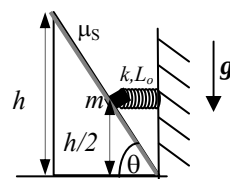
a) Quanto vale il **modulo** a_1 dell'accelerazione all'istante t_1 ?

$a_1 = \dots \sim \dots$ m/s² $((v_1^2/R)^2 + (v_1 - v_0)^2 / (t_1 - t_0)^2)^{1/2} \sim 2.8$ m/s² [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c = v^2/R$ che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angularmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$. Essendo il moto uniformemente accelerato, è $\alpha = (v_1 - v_0) / (R(t_1 - t_0))$; si noti che, dato che la velocità diminuisce, l'accelerazione è negativa (il moto è decelerato). Le due direzioni sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_2 = (a_c^2 + a_t^2)^{1/2} = ((v_1^2/R)^2 + (v_1 - v_0)^2 / (t_1 - t_0)^2)^{1/2}$. Da qui la soluzione]

b) In quale posizione angolare θ_1 si trova il punto all'istante t_1 ?

$\theta_1 = \dots = \dots$ rad $(v_1 + v_0)t_1 / (2R) = 1.5$ rad [il moto angolare è uniformemente accelerato, dunque la legge oraria del moto, tenendo conto della velocità iniziale, è $\theta(t) = (v_0/R)t + \alpha t^2/2$. Come già osservato, l'accelerazione angolare si può esprimere dai dati del problema come $\alpha = (v_1 - v_0) / (R(t_1 - t_0))$, da cui, semplificando e tenendo conto che $t_0 = 0$, la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa $m = 2.0$ kg è appoggiata su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio) ed è alto $h = 1.0$ m; la superficie del piano è scabra e il piano presenta un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.50$. Sulla cassa agisce la forza generata da una molla di costante elastica $k = 2.0 \times 10^2$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = h = 1.0$ m, il cui altro estremo è vincolato a una parete verticale rigida e indeformabile che sorge in corrispondenza della fine del piano inclinato (vedi figura). La situazione rappresentata in figura è **di equilibrio**: in tale situazione la cassa si trova "a metà strada", cioè la sua altezza rispetto al fondo del piano è $h/2$, e l'asse della molla ha direzione orizzontale. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$]



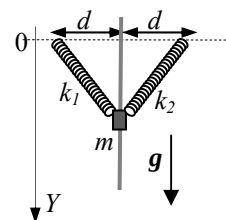
a) Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito F_A in tali condizioni?

$F_A = \dots \sim \dots$ N $|mg \sin \theta - kh(1 - 1/(2tg\theta)) \cos \theta| \sim 54$ N [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. In questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso $mg \sin \theta$ (che punta verso il basso), la componente attiva della forza elastica, e la forza di attrito. Nelle condizioni descritte, la geometria permette di determinare facilmente la lunghezza della molla. Essa è infatti pari a metà della base del piano inclinato (la cassa si trova "a metà strada"), cioè del cateto orizzontale del triangolo rettangolo mostrato in figura, la cui lunghezza vale $d = h/tg\theta$. Essendo $tg\theta = \sin\theta/\cos\theta = 3^{1/2}$, la lunghezza della molla, $h/(2tg\theta)$ è minore della lunghezza di riposo ($L_0 = h$) e quindi la molla è compressa. La forza elastica, che ha **modulo** $F_{ela} = kh(1 - 1/(2tg\theta))$, dà luogo a una componente lungo il piano inclinato (il cui modulo si ottiene moltiplicando per $\cos\theta$) che è orientata verso l'alto. Dato che la cassa è in equilibrio, la forza di attrito statico deve bilanciare le componenti delle forze lungo la direzione del piano inclinato, da cui il risultato]

b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alle condizioni di equilibrio di cui al punto precedente.

Discussione: occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza: $F_A \leq \mu_s N$. Nella configurazione del problema, il modulo della reazione vincolare N si trova proiettando la forza peso e la forza elastica nella direzione ortogonale al piano inclinato (dove la reazione vincolare garantisce equilibrio): $N = (mg \cos \theta + F_{ela} \sin \theta)$. Quindi la disuguaglianza diventa: $F_A \leq \mu_s (mg \cos \theta + kh(1 - 1/(2tg\theta)) \sin \theta)$. Usando i valori numerici (qui occorre farlo!), si vede che il secondo membro vale circa 67 N, quindi è maggiore del valore "attuale" della forza di attrito calcolata sopra. Di conseguenza l'equilibrio è possibile nella configurazione considerata

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m = 2.0$ kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y , orientato verso il basso). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno lunghezza di riposo **trascurabile** e costanti elastiche $k_1 = 10$ N/m e $k_2 = 40$ N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a un solaio orizzontale, rigido e indeformabile, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza $d = 1.0$ m da esso: il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento (vedi figura). [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si scrive l'equazione del moto $a(y)$ per il manicotto? Discutete in modo convincente, in brutta, a che tipo di moto dà luogo l'equazione trovata e perché. [L'equazione del moto è una funzione della posizione y del manicotto nel riferimento di figura: **non** usate valori numerici nello scriverla!]

$a(y) = \dots - [(k_1 + k_2)/m]y + g$ [sul manicotto agiscono le forze elastiche delle due molle, la forza peso, la reazione vincolare esercitata dalla guida. Quest'ultima ha direzione orizzontale (il vincolo serve per obbligare il manicotto a muoversi verticalmente, dunque esso crea delle forze che bilanciano le componenti orizzontali delle forze elastiche), e dunque non va considerata per l'equazione del moto. Le forze elastiche vanno ovviamente proiettate lungo la direzione Y , ovvero il loro modulo $F_{ela,i} = k_i L_i$, essendo $i=1,2$ e $L_i = L = (y^2 + d^2)^{1/2}$ la lunghezza delle molle (identica per tutte e due), va moltiplicato per il coseno dell'angolo che l'asse della molla forma con la direzione verticale. Per motivi di similitudine geometrica, tale coseno vale y/L , per cui le componenti verticali delle due forze si esprimono come $-k_i y$ e vanno sommate tra loro con lo stesso segno negativo (la componente verticale delle forze elastiche tende ovviamente nel verso negativo dell'asse dato,

essendo le molle sempre e comunque allungate rispetto alla propria lunghezza di riposo (che è, nulla!). Inoltre occorre considerare la forza peso, che invece punta nel verso positivo. Riaggiustando, si ottiene la soluzione]

Discussione:

esaminando l'equazione del moto si verifica facilmente che

essa ha la forma di un moto armonico; infatti il termine fra parentesi quadre è una costante positiva che, cambiata di segno, moltiplica la posizione y (e poi c'è una costante, g , che determina la posizione di equilibrio). Questa è proprio la forma dell'equazione del moto armonico che, si noti, avverrà alla pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = 5.0 \text{ rad/s}$

b) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto y_{EQ} ? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento di figura]

$y_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ m}$ $mg/(k_1+k_2) = 0.39 \text{ m}$ [occorre determinare la posizione y_{EQ} che annulla l'accelerazione, cioè rende nulla l'equazione del moto sopra scritta. Da qui la soluzione]

c) Supponete ora che, all'istante $t_0 = 0$ il manicotto si trovi fermo nella posizione $y_0 = 0$ e che da questa posizione venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v' con cui esso passa per la posizione di equilibrio y_{EQ} determinata sopra? In quale istante t' questo si verifica per la prima volta?

$v' = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ m/s}$ $\omega y_{EQ} = 2.0 \text{ m/s}$ [essendo il moto armonico, con la pulsazione

ω sopra determinata, le leggi orarie di posizione e velocità si scrivono rispettivamente: $y(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + y_{EQ}$ e $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$. I valori dei parametri A e Φ si determinano facilmente dalle condizioni iniziali: in particolare si ottiene $\Phi = 0$ e $A = -y_{EQ}$, per cui le leggi orarie scritte tenendo conto delle condizioni iniziali recitano: $y(t) = y_{EQ}(1 - \cos(\omega t))$ e $v(t) = \omega y_{EQ} \sin(\omega t)$. Nell'istante richiesto il coseno si deve annullare, dunque deve essere $\omega t' = \pi/2$; in questo stesso istante (passaggio per la posizione centrale dell'oscillazione) il seno vale uno e la velocità assume il suo massimo valore, da cui la soluzione] occorre determinare la posizione y_{EQ} che annulla l'accelerazione, cioè rende nulla l'equazione del moto sopra scritta. Da qui la soluzione. Notate che essa poteva essere facilmente ottenuta anche ragionando in termini di conservazione dell'energia: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ela} = (m/2)v'^2 - mgy_{EQ} + (k_1/2)(L_{EQ}^2 - L_0^2) + (k_2/2)(L_{EQ}^2 - L_0^2)$, dove $L_{EQ}^2 = d^2 + y_{EQ}^2$ è la lunghezza delle due molle quando il manicotto passa per la posizione di equilibrio e $L_0^2 = d^2$ è la lunghezza delle molle quando il manicotto sta in $y_0 = 0$. Sostituendo si ottiene la stessa risposta]

$t' = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ s}$ $\pi/(2\omega) = 0.31 \text{ s}$ [come già affermato, deve essere $\omega t' = \pi/2$,

da cui la soluzione. Si noti che, come ovvio, $t' = T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo dell'oscillazione. Inoltre è ovvio che si tratta del primo istante in cui si verifica questa condizione: il moto è infatti periodico e, aspettando ancora mezzo periodo, il manicotto torna a passare per la posizione di equilibrio avendo sempre la stessa velocità (in modulo)]

d) Come cambierebbe l'equazione del moto, e di conseguenza il tipo di moto, e perché, nel caso in cui le molle avessero una lunghezza di riposo $L_0 \neq 0$? Discutete per benino in brutta.

Discussione:

nelle forze elastiche comparirebbe la lunghezza di riposo,

cioè il modulo delle forze elastiche sarebbe $F_{ela,i} = k_i(L - L_0)$. Tuttavia la proiezione resterebbe la stessa di prima, essendo determinata dalla geometria. La nuova equazione del moto sarebbe $a(y) = -((k_1+k_2)/m)y(L-L_0)/L + g = -\omega^2 y(1-L_0/L) + g$. Poiché la definizione di $L = (d^2 + y^2)^{1/2}$ contiene y , l'equazione del moto non dipende più, come prima, semplicemente in modo lineare da y e quindi il moto non è più puramente armonico. Ci si può ricondurre al caso armonico (con pulsazione ω) solo se il termine L_0/L è trascurabile (molle con lunghezza di riposo praticamente nulla!) oppure rimane quasi costante durante il moto. Questo è il caso di piccole oscillazioni, dove $L \sim L_{EQ}$. Si noti che in questo caso si ritrova un moto armonico, ma che la pulsazione risulta modificata per il termine $(1-L_0/L_{EQ})$ rispetto al caso esaminato in precedenza.

4. Un oggetto di massa m (nota) si muove su un piano XY essendo sottoposto all'azione di una forza non uniforme $\mathbf{F}$ le cui componenti possono essere espresse come: $F_X = Ax + B$; $F_Y = C$, con A, B, C costanti opportunamente dimensionate. [In questo problema **non** ci sono valori numerici e dovete esprimere le soluzioni usando i dati letterali noti]

a) Come si calcola il lavoro L esercitato dalla forza $\mathbf{F}$ se l'oggetto si sposta dalla posizione (x_0, y_0) alla posizione (x', y') ? [Può esservi utile ricordare che, per una variabile generica ξ , si ha $\int \xi^n d\xi = \xi^{(n+1)}/(n+1)$, per $n \neq -1$]

$L = \dots\dots\dots (A/2)(x'^2 - x_0^2) + B(x' - x_0) + C(y' - y_0)$ [per definizione è $L_{a \rightarrow b} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{x_a}^{x_b} F_X dx + \int_{y_a}^{y_b} F_Y dy$, da cui la soluzione (dove si sono calcolati esplicitamente gli integrali)]

b) Sapendo che l'oggetto è fermo quando passa per la posizione (iniziale) (x_0, y_0) e sapendo che su di esso agisce la sola forza $\mathbf{F}$, come si esprime il **modulo** della sua velocità v' quando passa per la posizione (x', y') ?

$v' = \dots\dots\dots (2L/m)^{1/2}$ [dal teorema delle forze vive, per cui $L = \Delta E_K = (m/2)v'^2$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 19/01/2011

Firma:

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio $R = 1.0$ m con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto passa per la posizione angolare $\theta_0 = 0$ con velocità (tangenziale) $v_0 = 2.0$ m/s e si sa che all'istante $t_1 = 1.0$ s esso si trova a passare per la posizione angolare $\theta_1 = 3.0$ rad.

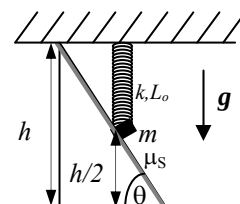
a) Quanto vale il **modulo** a_0 dell'accelerazione all'istante t_0 ? [Attenti! Il moto è uniformemente accelerato!]

$a_0 = \dots \sim \dots$ m/s² $((v_0^2/R)^2 + (2(\theta_1/t_1^2 - v_0/(Rt_1))R)^2)^{1/2} \sim 4.5$ m/s² [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c = v_0^2/R$ che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angularmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$. Essendo il moto uniformemente accelerato, è $\theta(t) = (v_0/R)t + (\alpha/2)t^2$. Da questa legge oraria è possibile determinare il valore di α , sapendo che all'istante t_1 la posizione è θ_1 . Si ha $\alpha = 2(\theta_1/t_1^2 - v_0/(Rt_1))$ (si noti che l'accelerazione angolare è, sulla base di quanto scritto nel testo, costante e uniforme!). Sostituendo si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale la velocità (tangenziale) v_1 all'istante t_1 ?

$v_1 = \dots = \dots$ m/s $v_0 + 2(\theta_1/t_1^2 - v_0/(Rt_1))Rt_1 = 4.0$ m/s [la legge oraria della velocità tangenziale recita $v(t) = v_0 + \alpha R t$, da cui, usando l'espressione di α trovata in precedenza e calcolando all'istante t_1 , si ottiene la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa $m = 2.0$ kg è appoggiata su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio) ed è alto $h = 1.0$ m; la superficie del piano è scabra e il piano presenta un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.50$. Sulla cassa agisce la forza generata da una molla di costante elastica $k = 2.0 \times 10^2$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = h = 1.0$ m, un cui estremo è vincolato a un solaio orizzontale rigido e indeformabile che "sporge" in corrispondenza della sommità del piano inclinato (vedi figura). Supponete che la situazione rappresentata in figura sia **di equilibrio**: in tale situazione la cassa si trova "a metà strada" sul piano inclinato, cioè la sua altezza rispetto al fondo del piano è $h/2$, e l'asse della molla ha direzione verticale. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$]



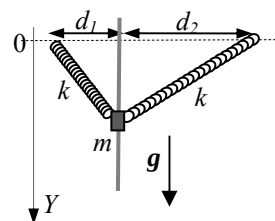
a) Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito F_A in tali condizioni?

$F_A = \dots \sim \dots$ N $(mg + kh/2)\sin\theta \sim 1.0 \times 10^2$ N [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. In questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso $mg\sin\theta$ (che punta verso il basso), la componente attiva della forza elastica, e la forza di attrito. Nelle condizioni descritte, la geometria permette di determinare facilmente la lunghezza della molla. Essa è infatti pari a metà dell'altezza del piano inclinato, cioè la forza elastica ha modulo $kh/2$. Essendo la forza elastica verticale orientata verso il basso come la forza peso, la proiezione richiede di moltiplicare per $\sin\theta$, da cui la soluzione]

b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alle condizioni di equilibrio di cui al punto precedente.

Discussione: $\dots$ occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza: $F_A \leq \mu_s N$. Nella configurazione del problema, il modulo della reazione vincolare N si esprime facilmente come $(mg + kh/2)\cos\theta$. Quindi la disuguaglianza diventa: $F_A \leq \mu_s(mg + kh/2)\cos\theta$. Usando i valori numerici (qui occorre farlo!), si vede che il secondo membro vale circa 30 N, cioè è minore del valore della forza di attrito determinata prima, per cui la situazione **non** può essere di equilibrio!]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m = 2.0$ kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y , orientato verso il basso). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno lunghezza di riposo **trascurabile** e la stessa costante elastica $k = 16$ N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a un solaio rigido e indeformabile, in posizioni collocate rispettivamente a distanza $d_1 = 1.0$ m e $d_2 = 2.0$ m dal tondino: si noti che il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento (vedi figura). [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si scrive l'equazione del moto $a(y)$ per il manicotto? Discutete in modo convincente, in brutta, a che tipo di moto dà luogo l'equazione trovata e perché. [L'equazione del moto è una funzione della posizione y del manicotto nel riferimento di figura: **non** usate valori numerici nello scriverla!]

$a(y) = \dots - [(2k)/m]y + g$ [sul manicotto agiscono le forze elastiche delle due molle, la

forza peso, la reazione vincolare esercitata dalla guida. Quest'ultima ha direzione orizzontale (il vincolo serve per obbligare il manicotto a muoversi verticalmente, dunque esso crea delle forze che bilanciano le componenti orizzontali delle forze elastiche), e dunque non va considerata per l'equazione del moto. Le forze elastiche vanno ovviamente proiettate lungo la direzione Y , ovvero il loro modulo $F_{el,i} = kL_i$, essendo $i=1,2$ e $L_i = (y^2 + d_i^2)^{1/2}$ la lunghezza delle molle, va moltiplicato per il coseno dell'angolo che l'asse della molla forma con la direzione verticale. Per motivi di similitudine geometrica, tale coseno vale y/L_i , per cui le componenti verticali delle due forze si esprimono come $-ky$ e vanno sommate tra loro con lo stesso segno negativo (la componente verticale delle forze elastiche tende ovviamente nel verso negativo dell'asse dato, essendo le molle sempre e comunque allungate rispetto alla propria lunghezza di riposo (che è, nulla!)). Inoltre occorre considerare la forza peso, che invece punta nel verso positivo. Riaggiustando, si ottiene la soluzione]

Discussione: $\dots$ esaminando l'equazione del moto si verifica facilmente che essa ha la forma dell'equazione di un moto armonico; infatti il termine fra parentesi quadre è una costante positiva che, cambiata di segno, moltiplica la posizione y (e poi c'è una costante, g , che determina la posizione di equilibrio). Questa è proprio la forma dell'equazione del moto armonico che, si noti, avverrà alla pulsazione $\omega = (2k/m)^{1/2} = 4.0$ rad/s

b) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto y_{EQ} ? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento indicato in figura]

$y_{EQ} = \dots = \dots \text{ m}$ $mg/(2k) = 0.61 \text{ m}$ [occorre determinare la posizione y_{EQ} che annulla l'accelerazione, cioè rende nulla l'equazione del moto sopra scritta. Da qui la soluzione]

- c) Supponete ora che il manicotto sia stato “perturbato” in qualche modo rispetto alla posizione di equilibrio (ad esempio da una manina che l’ha spostato e l’ha lasciato andare, oppure da qualcuno che gli ha dato un “colpettino”). In seguito a questa perturbazione, si osserva che all’istante $t_0 = 0$ esso si trova a passare per la posizione di equilibrio y_{EQ} determinata sopra avendo una velocità $v_0 = 1.0 \text{ m/s}$ (diretta verso il basso, cioè di segno positivo nel riferimento usato). Si osserva poi che, a un certo istante t' , il manicotto si arresta e inverte il verso del suo moto (cioè immediatamente dopo questo istante comincia a risalire). Quanto vale la coordinata y' raggiunta all’istante t' ? E quanto vale l’istante t' ? [Ovviamente vi si chiede di determinare il primo di infiniti istanti in cui la situazione descritta si verifica!]

$y' = \dots = \dots \text{ m}$ $v_0/\omega + y_{EQ} = 0.86 \text{ m}$ [essendo il moto armonico, con la pulsazione ω sopra determinata, le leggi orarie di posizione e velocità si scrivono rispettivamente: $y(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + y_{EQ}$ e $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$. I valori dei parametri A e Φ si determinano facilmente dalle condizioni iniziali: in particolare si ottiene $\Phi = \pi/2$ e $A = -v_0/\omega$, per cui le leggi orarie scritte tenendo conto delle condizioni iniziali recitano: $y(t) = -(v_0/\omega) \cos(\omega t + \pi/2) + y_{EQ}$ e $v(t) = v_0 \sin(\omega t + \pi/2)$. Nell’istante richiesto la velocità si deve annullare (il manicotto cambia il verso del suo moto!), per cui il seno deve annullarsi, che si verifica per la prima volta quando $\omega t' + \pi/2 = \pi$, cioè $\omega t' = \pi/2$. Sostituendo questo istante nella legge oraria del moto si trova la soluzione. Notate che essa poteva essere facilmente ottenuta anche ragionando in termini di conservazione dell’energia: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ela}$. La variazione di energia cinetica, essendo il manicotto fermo al “termine” del processo considerato, è $\Delta E_K = -(m/2)v_0^2$, mentre la variazione di energia potenziale gravitazionale, dovuta al fatto che il manicotto scende (si sta muovendo verso il basso) fino alla posizione y' partendo dalla posizione y_{EQ} , è $\Delta U_G = mg(y' - y_{EQ})$. La variazione di energia elastica delle molle, dovuta al fatto che esse cambiano la loro lunghezza, si scrive $\Delta U_{ela} = (k/2)(y'^2 + d_1^2 - y_{EQ}^2 - d_1^2) + (k/2)(y'^2 + d_2^2 - y_{EQ}^2 - d_2^2) = k(y'^2 - y_{EQ}^2)$. Scrivendo l’equazione di conservazione dell’energia meccanica si ottiene una equazione algebrica del secondo grado la cui soluzione dovrebbe permettere di determinare il valore di y']

$t' = \dots = \dots \text{ s}$ $\pi/(2\omega) = 0.39 \text{ s}$ [come già affermato, deve essere $\omega t' = \pi/2$, da cui la soluzione. Si noti che, come ovvio, $t' = T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo dell’oscillazione. Inoltre è ovvio che si tratta del primo istante in cui si verifica questa condizione: il moto è infatti periodico e, aspettando un altro periodo, il manicotto torna a passare per la posizione di equilibrio avendo sempre la stessa velocità (in modulo)]

- d) Come cambierebbe l’equazione del moto, e di conseguenza il tipo di moto, e perché, nel caso in cui le molle avessero una lunghezza di riposo $L_0 \neq 0$? Discutete per benino in brutta.

Discussione: $\dots$ nelle forze elastiche comparirebbe la lunghezza di riposo, cioè il modulo delle forze elastiche sarebbe $F_{ela,i} = k(L_i - L_0)$. Tuttavia la proiezione resterebbe la stessa di prima, essendo determinata dalla geometria. La nuova equazione del moto sarebbe $a(y) = -(k_1/m)y(L_1 - L_0)/L_1 - (k_2/m)y(L_2 - L_0)/L_2 + g$. Poiché la definizione di $L_i = (d_i^2 + y^2)^{1/2}$ contiene y , l’equazione del moto non dipende più, come prima, semplicemente in modo lineare da y e quindi il moto non è più puramente armonico. Ci si può ricondurre al caso armonico (con pulsazione ω) solo se i termini L_0/L_i sono trascurabile (molle con lunghezza di riposo praticamente nulla!) oppure rimangono quasi costanti durante il moto. Questo è il caso di piccole oscillazioni, dove $L_i \sim L_{i,EQ}$. Si noti che in questo caso si ritrova un moto armonico, ma che la pulsazione risulta modificata rispetto al caso esaminato in precedenza.

4. Un oggetto di massa m (nota) si muove su un piano XY essendo sottoposto all’azione di una forza $\mathbf{F}$ non uniforme le cui componenti possono essere espresse come: $F_X = Ax^2$; $F_Y = B$, con A, B costanti opportunamente dimensionate. [In questo problema **non** ci sono valori numerici e dovete esprimere le soluzioni usando i dati letterali noti]

- a) Come si calcola il lavoro L esercitato dalla forza $\mathbf{F}$ se l’oggetto viene spostato dall’origine alla posizione generica (x,y) ? [Può esservi utile ricordare che, per una variabile generica ξ , si ha $\int \xi^n d\xi = \xi^{(n+1)}/(n+1)$, per $n \neq -1$]

$L = \dots (A/3)x^3 + By$ [per definizione è $L_{a \rightarrow b} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b F_X dx + \int_a^b F_Y dy$, da cui la soluzione (dove si sono calcolati esplicitamente gli integrali)]

- b) Può la forza data essere considerata conservativa? Nel caso, quanto vale la variazione di energia potenziale ΔU associata allo spostamento considerato? Discutete ed esprimete il ΔU .

Discussione: $\dots$ Una forza è conservativa quando il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziali e finali e non dallo specifico percorso compiuto per muoversi. Nell’espressione del lavoro che abbiamo appena determinato non compare alcuna indicazione sul percorso e se lo spostamento avvenisse in senso inverso il lavoro cambierebbe di segno, come si può facilmente verificare. Benché questo non garantisca che la forza sia realmente conservativa (occorrono altre condizioni, che non siamo in grado di verificare), la forza **può** essere conservativa (e di fatto lo è!)

$\Delta U = \dots -L$ [per definizione di differenza di energia potenziale!]