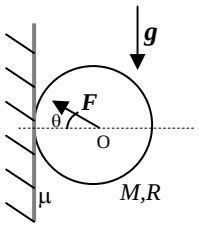
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 – 8/4/2011

Nome e cognome: …… Matricola: ……

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse (ortogonalmente a questo) ed è diretta in modo da formare un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, come rappresentato in figura. Il cilindro è a contatto con una parete verticale fissa, indeformabile e **scabra**, che presenta un coefficiente di attrito μ = 0.50. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $sin(\pi/6) = 1/2$]



   a) Quanto deve valere il **modulo** della forza F affinché il cilindro sia in equilibrio? Quanto vale, in tali condizioni di equilibrio, il **modulo** F_A della forza di attrito che la parete esercita sul cilindro? [Spiegate **per bene** in brutta come risolvete e perché, chiedendovi anche se le condizioni del problema possono realmente condurre all'equilibrio, o no!]

   F = …… = …… N $Mg/sin\theta = 20$ N [poiché il cilindro è un corpo esteso, occorre che sia garantito sia l'equilibrio traslazionale che quello rotazionale. Le forze agenti sul cilindro sono il peso, applicato al centro di massa, la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ della parete, orizzontale e applicata al punto di contatto con la parete, l'(eventuale) forza di attrito, evidentemente statico visto che il cilindro è in equilibrio, che ha direzione verticale ed è applicata al punto di contatto, e la forza $\boldsymbol{F}$, applicata al centro di massa O- Prendendo questo punto come polo, l'unica forza che ha braccio non nullo è la forza di attrito, che dunque deve essere nulla per garantire equilibrio. L'equilibrio traslazionale richiede poi, per i moduli: $N = Fcos\theta$, che non dà informazioni rilevanti, e $Fsin\theta = Mg$, da cui la soluzione]

   F_A = …… = …… N 0 [vedi sopra; questa forza di attrito può sicuramente essere generata nelle condizioni del problema!]

   b) Supponete ora che il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ passi improvvisamente dal valore F di equilibrio al valore F' = 40 N. Discutete a modino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro e perché. Inoltre stabilite quanto vale la forza di attrito F_A' in queste condizioni.

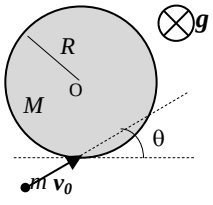
   Discussione: …… visto che la forza ha un modulo superiore a quello richiesto per l'equilibrio, è evidente che il cilindro si metterà in moto. Trattandosi di un corpo esteso che si trova a contatto con una parete scabra occorre valutare se il moto può essere di rotolamento puro, cioè occorre determinare la forza di attrito necessaria perché il moto sia di rotolamento puro e verificare se il contatto tra cilindro e parete può determinare tale forza, o no. Infatti, essendo noto il coefficiente di attrito, sappiamo che $F_{A,MAX} = \mu N = \mu F'cos\theta \sim 17$ N. Iniziamo con il notare che il moto traslatorio del centro di massa sarà verso l'alto, dato che la componente verticale della forza esterna, $F'sin\theta = 20$ N, è maggiore del peso, $Mg = 10$ N. In queste condizioni la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ sarà diretta verso il basso, opponendosi al moto (incipiente) della generatrice del cilindro a contatto con la parete. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa rispetto a un asse orientato verso l'alto è: $a_{CM} = -g+(F'sin\theta-F_A)/M$ e quella del moto rotazionale, rispetto al polo O e prendendo come positivo un verso di rotazione antiorario (in figura), è $\alpha = F_AR/I$, dove si è osservato che la sola forza di attrito ha braccio non nullo e $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo di raggio R e massa M. Supponendo per ipotesi che ci sia rotolamento puro, cioè che $a_{CM}=\alpha R$, e risolvendo per F_A il sistema di tre equazioni e tre incognite, si ottiene $F_A = (-Mg+F'sin\theta)/3 = 3.4$ N $< F_{A,MAX}$. Pertanto il moto è di rotolamento puro, il centro di massa trasla verticalmente verso l'alto e il cilindro ruota in verso antiorario (in figura)

   F_A' = …… = …….. N $(-Mg+F'sin\theta)/3 = 3.4$ N [vedi sopra]

   c) Si osserva che, per effetto dell'applicazione della forza, **costante e uniforme**, di modulo F' di cui sopra, il cilindro si muove in direzione verticale; sapendo che esso parte da fermo, quanto vale la sua velocità angolare ω' quando si è spostato per un tratto Δh = 4.0 m? [Considerate **trascurabile ogni forma di attrito** diversa da quella tra parete e cilindro!]

   ω'= …… ~ …….. rad/s $(4\Delta h(F'sin\theta - Mg)/(3MR^2))^{1/2} \sim 9.2$ rad/s [poiché il moto è di rotolamento puro (notate che le accelerazioni sono costanti e uniformi, e quindi la condizione di rotolamento puro non viene mai modificatan durante la salita del cilindro sulla parete), conviene usare il bilancio energetico: $L = \Delta E_K+\Delta U_G$, con $L = F'sin\theta\Delta h$ lavoro della forza applicata (notate che è costante e uniforme e che forma un angolo $\pi/2-\theta$ rispetto allo spostamento, da cui l'espressione). Si ha $\Delta E_K=(M/2)v_{CM}'^2+(I/2)\omega'^2 = (MR^2/2)(1+1/2)\omega'^2 = 3MR^2\omega'^2/4$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia per il cilindro pieno omogeneo e usato la relazione geometrica $v_{CM}= \omega R$ del rotolamento puro; inoltre è $\Delta U_G = Mg\Delta h$ (il cilindro è salito di un tratto Δh). Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

2. Una piattaforma ruotante (una sorta di girostra) è costituita da un disco pieno **omogeneo** di raggio R = 6.0 m e massa $M = 1.0\text{x}10^2$ kg che può ruotare su un piano orizzontale con **attrito trascurabile** attorno a un asse passante per il suo asse geometrico. Inizialmente la piattaforma è **ferma**. A un dato istante, un bambino di massa $m = M/5$= 20 kg sale su un punto posto alla periferia della piattaforma, e lì rimane: come rappresentato in figura, al momento dell'impatto, il bambino possiede una velocità $\boldsymbol{v_0}$, di modulo v_0 = 1.0 m/s e direzione tale da formare un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto alla tangente alla circonferenza della piattaforma nel punto di impatto. Si osserva che l'insieme costituito da piattaforma e bambino si mette in rotazione. [Naturalmente il bambino è da considerare



puntiforme e non deve affrontare scalini, dislivelli o altro per salire sulla piattaforma! Ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $cos(\pi/3) = ½$]

a) Discutete **bene**,in brutta, quali grandezze del sistema (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare, e chi più ne ha più ne metta) si conservano nel processo e quali no, e spiegate perché. Considerate che il processo dura molto poco e che siete interessati a valutare le differenze tra **subito** prima e **subito** dopo la salita del bambino sulla piattaforma.
Discussione e spiegazione: …… visto che si può supporre che il processo duri poco tempo (si chiede cosa succede subito prima e subito dopo), esso può essere considerato come un "urto". Visto il carattere istantaneo del processo, nella valutazione dell'isolamento del sistema (bambino+piattaforma) possiamo trascurare l'analisi delle forze non impulsive, come per esempio la forza peso. Le uniche forze esterne di tipo impulsivo possono essere generate dal perno che permette la rotazione del sistema, pertanto la quantità di moto totale potrebbe non conservarsi. In effetti così deve essere: se la quantità di moto si conservasse, allora subito dopo l'urto **tutto** il sistema piattaforma+bambino che ci sta sopra dovrebbe traslare nella direzione della velocità iniziale del bambino. Questo non si verifica e quindi non si conserva la quantità di moto totale per la presenza delle forze impulsive che il perno genera sul sistema. Queste forze, però, hanno braccio nullo se consideriamo come polo proprio un punto del perno (cioè dell'asse di rotazione). Dunque si conserva il omento angolare totale del sistema. Infine, l'urto è palesemente anelastico e quindi non c'è ragione per cui si debba conservare l'energia cinetica totale.

b) Quanto vale la variazione di energia cinetica totale nel processo, cioè la differenza ΔE_K tra energia cinetica di tutto il sistema **subito** dopo e quella **subito** prima della salita del bambino sulla piattaforma?
ΔE_K = …… = ……. J $(m/2)v_0^2(mR^2cos^2\theta/I_{TOT}-1)= (m/2)v_0^2(2cos^2\theta/7-1) = -9.3$ J
[l'energia cinetica iniziale è data dal movimento dal solo bambino, $E_{K,INI} = (m/2)v_0^2$. Subito dopo l'"urto" l'energia cinetica è quella di rotazione del sistema piattaforma+bambino: $E_{K,FIN}=(I_{TOT}/2)\omega^2$, dove $I_{TOT}=I_{DISCO}+I_{BAMBINO}=(MR^2/2)+(mR^2)=7mR^2/2$ è il momento di inerzia totale dopo l'urto e ω la sua velocità angolare. Questa può essere determinata dalla conservazione del momento angolare (vedi sopra). Infatti subito dopo l'urto il momento angolare vale $I_{TOT}\omega$, mentre subito prima l'unico contributo al momento angolare totale è dato dal bambino che, rispetto al polo O, possiede un momento angolare (assiale) di modulo mv_0b. Il "braccio" b rappresenta in pratica la distanza tra polo e direzione di $\boldsymbol{v_0}$: si vede dalla trigonometria che vale $b=Rcos\theta$ (attenti a usare bene la trigonometria!). Svolgendo i conti, si trova la velcoità angolare che, inserita nell'espressione di ΔE_K , fornisce la soluzione. Il valore trovato è negativo, come atteso in ogni urto anelastico!]

3. Un omino di massa $M_1 = 2m = 50$ kg si trova abbarbicato alla sponda posteriore di un carrellino di massa $M_2 = 4m = 1.00\text{x}10^2$ kg che può scorrere con attrito trascurabile lungo un binario orizzontale. Inizialmente sul carrello si trova un pietrone di massa $m = 25$ kg e tutto è fermo. A un certo istante l'omino (robusto!), che rimane sempre abbarbicato alla sponda del carrellino, prende la pietra e la scaglia in direzione del binario: nel momento in cui la pietra lascia la manina dell'omino, essa ha velocità di modulo $v_0 = 5.0$ m/s (misurata rispetto al binario) diretta **orizzontalmente**. Quindi la pietra, essendo soggetta alla sola forza peso (ogni altro attrito è trascurabile), cade sul binario a distanza $D = 18$ m dal punto di lancio (questa distanza è misurata in direzione orizzontale, e, l'omino, che evidentemente è in realtà l'incredibile Hulk, rimane sempre abbarbicato alla sponda per l'intero processo).

a) Quanto vale la distanza ΔX percorsa dal carrellino mentre la pietra resta in volo? [Spiegate **per bene**, in brutta, il procedimento!]
ΔX = …… = ……. m $mD/(M_1+M_2) = D/6 = 3.0$ m, in verso opposto a quello del lancio [il processo assomiglia molto a una frammentazione: inizialmente M_1,M_2,e m formano un unico corpo, alla fine da una parte c'è M_1+M_2 e dall'altra m. Il sistema complessivo è ovviamente isolato lungo l'asse orizzontale (asse X) e quindi in questa direzione il centro di massa non subisce accelerazioni. Inoltre esso è fermo all'inizio (quando tutto è fermo) e quindi la posizione del centro di massa lungo X non cambia nell'intero processo: $\Delta x_{CM} = 0$. Per definizione, la posizione del centro di massa nel caso considerato si calcola come: $x_{CM} = (mx+(M_1+M_2)X)/(M_1+M_2+m)$ e il suo spostamento è evidentemente esprimibile come $\Delta x_{CM}=(m\Delta x+(M_1+M_2)\ \Delta X)/(M_1+M_2+m)$. Ora, secondo il testo dell'esercizio è $\Delta x = D$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale il lavoro L fatto dall'omino nella **sola** fase di lancio? [Trascurate il lavoro necessario a sollevare la pietra e qualsiasi altro lavoro, inclusi quelli fisiologici; ricordate che il lancio avviene in direzione puramente orizzontale, quindi la forza peso non c'entra nulla con la risposta; anche qui, in brutta spiegate **per bene**!]
L = …… = ……. J $(m/2)v_0^2(1+m/(M_1+M_2))=(m/2)v_0^2(1+1/6)=7mv_0^2/12 = 3.6\text{x}10^2$ J [come in ogni frammentazione, il sistema modifica la sua energia, che nel caso in questione è cinetica (non ci sono potenziali gravitazionali perché nell'atto del lancio non ci sono variazioni di quota di alcun elemento del sistema). Per ragioni di bilancio energetico tale variazione è proprio dovuta al lavoro dell'omino, cioè $L = \Delta E_K = (m/2)v_0^2+((M_1+M_2)/2)V_0^2$. La velocità V_0, che è quella di omino e carrellino subito dopo il lancio della pietra, si trova dalla conservazione della quantità di moto lungo X (il sistema è isolato): $0 = mv_0+(M_1+M_2)V_0$, da cui $V_0=-mv_0/(M_1+M_2)$, che, inserita nella precedente, fornisce la soluzione]

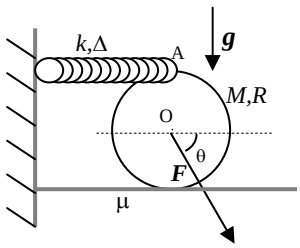
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 8/4/2011 Firma:

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 – 8/4/2011

Nome e cognome: …… Matricola: ……

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 10 cm è poggiato su una superficie piana orizzontale **scabra**, che presenta un coefficiente di attrito μ = 0.50. Nel punto A (il suo punto "più alto") il cilindro è attaccato a una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 1.0x10^2 N/m, il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida fissa e indeformabile. L'asse della molla è **orizzontale**. Inoltre sull'asse del cilindro (in direzione ortogonale ad esso) è applicata una forza ***F*** diretta in modo da formare un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale, come rappresentato in figura, e di modulo F = 40 N. In queste condizioni il cilindro è in equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) Quanto vale, in queste condizioni di equilibrio, l'allungamento Δ della molla, cioè la differenza tra la sua lunghezza attuale e quella di riposo? Quanto vale, in tali condizioni di equilibrio, il **modulo** F_A della forza di attrito che la superficie piana esercita sul cilindro? [Spiegate **per bene** in brutta come risolvete e perché, chiedendovi anche se le condizioni del problema possono realmente condurre all'equilibrio, o no!]

   Δ = …… = …… m $F\cos\theta/(2k) = 0.10$ m [poiché il cilindro è un corpo esteso, occorre che sia garantito sia l'equilibrio traslazionale che quello rotazionale. Le forze agenti sul cilindro sono il peso, verticale e applicato al centro di massa, la reazione vincolare ***N*** del piano, verticale e applicata al punto di contatto con la superficie, l'(eventuale) forza di attrito, evidentemente statico visto che il cilindro è in equilibrio, che ha direzione orizzontale ed è applicata al punto di contatto, la forza ***F*** , applicata al centro di massa O, e la forza della molla, orizzontale, diretta verso la sinistra della figura e di modulo $k\Delta$. Prendendo il punto O come polo, le forze che hanno momento non nullo sono solo la forza elastica e l'attrito, entrambe con braccio pari a R. Allora per l'equilibrio rotazionale è necessario che ci sia attrito (statico), orientato in modo tale da "bilanciare" il momento della forza elastica, e quindi di direzione orizzontale verso la sinistra della figura. Per quanto riguarda il modulo dell'attrito, esso deve evidentemente essere uguale a quello della forza elastica (i bracci sono uguali), cioè $F_A = k\Delta$. L'equilibrio traslazionale, scritto lungo la direzione orizzontale, che è quella del possibile moto del centro di massa, impone per i moduli $F\cos\theta = k\Delta + F_A = 2k\Delta$, da cui la soluzione]

   F_A = …… = …… N $k\Delta = F\cos\theta/2 = 10$ N [vedi sopra. Essendo noto il coefficiente di attrito, e notando che $N = Mg + F\sin\theta$, si ha $F_{A,MAX} = \mu N \sim 22$ N, quindi la condizione di equilibrio può essere effettivamente verificata]

   b) Supponete che a un dato istante il mago Silvan faccia scomparire la molla (la forza elastica si annulla istantaneamente) e che la forza ***F*** applicata all'asse del cilindro rimanga esattamente quella di prima (di cui al quesito precedente) e si mantenga costante e uniforme. Discutete a modino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro e perché. Inoltre stabilite quanto vale la forza di attrito F_A' in queste condizioni.

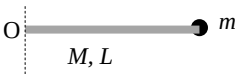
   Discussione: …… è evidente che in queste nuove condizioni il cilindro si metterà in moto. Trattandosi di un corpo esteso che si trova a contatto con una superficie scabra, occorre valutare se il moto può essere di rotolamento puro, cioè occorre determinare la forza di attrito necessaria perché il moto sia di rotolamento puro e verificare se il contatto tra cilindro e parete può determinare tale forza, o no. Iniziamo con il notare che il moto traslatorio del centro di massa sarà verso la destra di figura e quindi l'attrito sarà orizzontale e diretto verso sinistra. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa rispetto a un asse orientato verso destra è: $a_{CM} = (F\cos\theta - F_A)/M$ e quella del moto rotazionale, rispetto al polo O e prendendo come positivo un verso di rotazione orario (in figura), è $\alpha = F_A R/I$, dove si è osservato che la sola forza di attrito ha braccio non nullo e $I = MR^2/2$ è il momento id inerzia per un cilindro pieno e omogeneo di raggio R e massa M. Supponendo per ipotesi che ci sia rotolamento puro, cioè che $a_{CM} = \alpha R$, e risolvendo per F_A il sistema di tre equazioni e tre incognite, si ottiene $F_A = F\cos\theta/3 = 6.7$ N $< F_{A,MAX}$. Osservate che, se la reazione vincolare non fosse stata "aumentata" per bilanciare la componente verticale della forza ***F*** , allora il valore massimo dell'attrito sarebbe stato insufficiente per il moto di rotolamento puro, che in quelle condizioni non si sarebbe potuto verificare. Pertanto il moto è di rotolamento puro, il centro di massa trasla verso destra e il cilindro ruota in verso orario (in figura)

   F_A' = …… = …….. N $F\cos\theta/3 = 6.7$ N [vedi sopra]

   c) Sapendo che, prima della sparizione della molla, il cilindro si trova fermo in equilibrio e che quindi, per effetto della magia, si mette in movimento, quanto vale la sua velocità angolare ω' quando ha compiuto un quarto di giro (cioè una rotazione per un angolo $\Delta\phi = \pi/2$)? [Considerate trascurabile ogni forma di attrito diversa da quella tra superficie e cilindro!]

   ω'= …… ~ …….. rad/s $(4F\cos\theta\, \pi R/(6MR^2))^{1/2} \sim 20$ rad/s [quando il cilindro ha compiuto una rotazione di mezzo giro in condizioni di rotolamento puro, il suo centro di massa si sposta di un tratto $\Delta s = \Delta\phi R = \pi R/2$. Inoltre, poiché il moto è di rotolamento puro (notate che le accelerazioni sono costanti e uniformi, e quindi la condizione di rotolamento puro non viene mai modificata), conviene usare il bilancio energetico: $L = \Delta E_K + \Delta U_G$, con $L = F\cos\theta\Delta s$ lavoro della forza applicata (notate che questa forza è costante e uniforme e che forma un angolo θ rispetto allo spostamento, da cui l'espressione), $\Delta E_K = (M/2)v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 = (MR^2/2)(1+1/2)\omega'^2 = 3MR^2\omega'^2/4$ e $\Delta U_G = 0$ non essendoci forze conservative che compiono lavoro (la quota del cilindro non varia nel processo, non ci sono molle, forze elettriche,o altro). Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

2. Un'asta sottile, **omogenea** e rigida, di massa M = 30 kg e lunghezza L = 2.0 m, è imperniata a un suo estremo ed è libera di ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Una



SITUAZIONE INIZIALE

scimmietta (puntiforme!), di massa $m = M/3 = 10$ kg, è abbarbicata sull'estremo libero. Inizialmente, per qualche motivo (una o più forze esterne, che non vi interessano), l'asta si trova in direzione orizzontale, come rappresentato in alto in figura. A un dato istante, il "motivo" che teneva l'asta in direzione orizzontale scompare improvvisamente, e il **sistema** asta+scimmietta si mette a ruotare con velocità iniziale nulla. Esattamente quando esso passa per la direzione verticale, la scimmietta "si dà un colpetto" e si stacca dall'asta: si osserva che **subito** dopo il distacco, la scimmietta possiede una velocità (misurata rispetto al riferimento fisso, non rispetto all'asta) di modulo $v = 8.0$ m/s e verso e direzione come indicati in figura (l'angolo θ misurato rispetto all'orizzontale vale $\theta = \pi/3$). [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $\cos(\pi/3) = ½$]

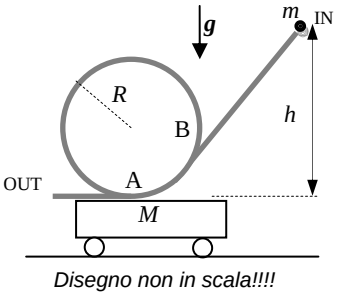
a) Considerando il **solo** processo del distacco della scimmietta dall'asta (quindi **non** la fase di rotazione del sistema) quali grandezze del sistema (energia cinetica totale, quantità di moto totale, momento angolare totale, chi più ne ha più ne metta) si conservano e perché? Discutete **per bene** in brutta. [Suggerimento: il processo di distacco può essere ritenuto come molto rapido…]

Discussione: …… il distacco della scimmietta dall'asta implica che il sistema si frammenta (da due oggetti ne rimane uno solo); questo è rilevante per affermare subito che l'energia cinetica totale del sistema non si conserva (la scimmietta farà pur del lavoro per staccarsi). Inoltre, vista la breve durata del processo, possiamo anche affermare che le forze non impulsive, tipo la forza peso, non sono in grado di modificare né quantità di moto né (se hanno momento non nullo) il momento angolare. Tuttavia il perno può trasmettere al sistema forze impulsive, che dunque rendono la quantità di moto totale del sistema non conservata. Questo si può intuire considerando anche che, dato che dopo la frammentazione un componente (la scimmietta) ha velocità di tralsazione, allora anche tutto il sistema avrebbe dovuto avere velocità di traslazione prima della frammentazione, che per noi non è vero. Il momento angolare totale invece si conserva, dato che le forze esterne impulsive, essendo applicate al perno, hanno momento nullo.

b) Quanto vale la velocità angolare ω che l'asta assume **subito** dopo il distacco della scimmietta? [Suggerimento: occhio, il problema ha due "fasi" successive distinte fra loro…]

$\omega =$ …… $\sim$ ……. rad/s $(I_{TOT}/I_{ASTA})\omega_0 - mvL\cos\theta/I_{Asta} = 2\omega_0 - v\cos\theta/L = 5.0$ rad/s [si conserva il momento angolare. Subito prima del distacco, il momento angolare (assiale) è dovuto alla rotazione dell'intero sistema: $L_{INI}=I_{TOT}\omega_0$, dove $I_{TOT}=I_{ASTA}+I_{SCIM}=ML^2/3+mL^2=2mL^2$, dove abbiamo usato l'espressione per il momento di inerzia di un'asta sottile omogenea in rotazione attorno a un asse passante per un suo estremo e la relazione fra le masse data nel testo La velocità angolare ω_0 prima della frammentazione si trova con la conservazione del'energia meccanica (si considerano trascurabili gli attriti): $0 = \Delta E_K+\Delta U_G=(I_{TOT}/2)\omega_0^2-mgL-MgL/2 = (I_{TOT}/2)\omega_0^2-gL(m+M/2)= (I_{TOT}/2)\omega_0^2-5mgL/2$, dove abbiamo notato che la variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta alla discesa della scimmietta per un tratto L e a quella del centro di massa dell'asta per un tratto $L/2$ e abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo. Mettendo tutto insieme si trova $\omega_0=(5mgL/I_{TOT})^{1/2}.= (5g/(2L))^{1/2}$ Il momento angolare del sistema dopo l'urto è dovuto sia alla rotazione della **sola** asta, $I_{ASTA}\omega$, che al moto della scimmietta. Essendo la sua velocità $\boldsymbol{v}$ misurata rispetto al riferimento "fisso" e non rispetto all'asta, il momento angolare della sola scimmietta si esprime semplicemente come mvb dove il "braccio" b è la distanza fra polo (il perno) e retta della velocità. Dalla trigonometria, che dovete stare attenti a usare bene, si trova $b=L\cos\theta$. Da tutto ciò, mettendo tutto assieme, si trova la soluzione]

3. Un giochino per bambini è fatto in questo modo: un sottile tubo (cavo) è modellato in modo da formare un percorso a "giro della morte" su un piano verticale, con una rampa iniziale alta $h = 1.0$ m raccordata con una circonferenza di raggio $R = h/10 = 10$ cm che quindi termina con un tratto orizzontale di uscita. Il tubo è saldato su un carrellino: il tutto ha massa $M = 1.0$ kg e può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale, come rappresentato in figura. Una pallina (**puntiforme!**) di massa $m = M/4 = 0.25$ kg può scorrere con **attrito trascurabile** all'interno del tubo, lungo il percorso stabilito dalla sua forma. All'inizio tutto è fermo: il bambino infila la pallina nel tubo, al punto "IN" di figura, e la lascia andare con **velocità iniziale nulla**. La pallina compie il giro della morte e fuoriesce dal punto "OUT". Il bambino è molto contento ma, mosso da curiosità infantile, vi fa alcune domande: [Supponete trascurabile il diametro interno del tubo e usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!!!

a. Quanto vale in modulo la velocità V_A del **carrellino** nell'istante in cui la pallina passa per il punto più basso del giro della morte (marcato con A in figura)? [Per il segno, usate il riferimento indicato in figura; inoltre spiegate **per bene** in brutta ogni passaggio della soluzione!]

$V_A =$ …… $\sim$ ……. m/s $(gR)^{1/2} \sim 1.0$ m/s [il sistema pallina + carrellino (con tubo e quant'altro) è isolato in direzione orizzontale, per cui in questa direzione si conserva la quantità di moto totale, che è inizialmente nulla perché tutto è fermo. Deve quindi essere in ogni istante $0 = mv_x+MV = m(v_x+4V)$, da cui $v_x = -4V$. Nell'istante considerato, la velocità della pallina ha solo componente orizzontale, per cui $v_x = v$. Inoltre, non essendoci forze dissipative, si ha anche conservazione dell'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v^2 + (M/2)V^2 +\Delta U_G$. Nell'istante considerato $\Delta U_G = -mg\Delta h = -mgh = -10mgR$ (il proiettile è sceso per l'intera rampa), da cui, inserendo la conservazione della quantità di moto nella conservazione dell'energia meccanica, $0 = (m/2)(-4V)^2+(4m/2)V^2-10mgR$, che, risolta, dà la soluzione, in cui il segno negativo indica che il carrellino si muove verso la sinistra della figura]

b. Quanto vale, **in modulo**, la velocità v_B della **pallina** nell'istante in cui essa raggiunge il punto B di figura, cioè passa (per la seconda volta quando percorre il giro della morte) per "metà altezza" della circonferenza? [Anche qui spiegate **per bene**!]

v_B = …… ~ ……. m/s $(18gR)^{1/2} \sim 4.2$ m/s [si fanno le stesse considerazioni di prima, ma in questo caso si nota che all'istante considerato il proiettile si sta muovendo in direzione verticale **rispetto alla circonferenza** , cioè rispetto al carrellino. Pertanto la componente orizzontale della sua velocità deve essere uguale a quella del carrellino e la conservazione della quantità di moto lungo x diventa $0 = mV+MV$, cioè $V = 0$. Allora la conservazione dell'energia meccanica si scrive: $0 = (m/2)v^2-9mgR$ (la variazione di quota stavolta è $\Delta h=h-R=9R$), da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 8/4/2011 Firma: