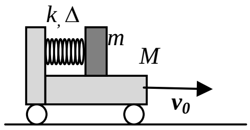
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 – 6/3/2012

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 1.0\times10^3$ N/m è montata su un carrellino di massa M = 1.1 kg che può scorrere con attrito trascurabile lungo un binario orizzontale. Inizialmente la molla si trova compressa per un tratto **incognito** Δ a causa di un filo che ne collega gli estremi e un proiettile di massa $m = M/10$ = 0.11 kg si trova appoggiato ad un estremo della molla (l'altro estremo è solidale ad una sponda, rigida, del carrellino), come rappresentato in figura. In queste condizioni iniziali, **l'intero sistema** (carrellino+proiettile) si muove con velocità $\mathbf{v}_0$ di modulo 1.0 m/s e direzione orizzontale. Ad un dato istante, il filo viene tagliato e il proiettile viene "sparato" via. In seguito a questo evento, si osserva che il carrellino rallenta **fino a fermarsi** completamente. [Trascurate completamente gli attriti sul moto e trascurate gli effetti della **forza peso** sul moto del proiettile, che quindi avviene in direzione orizzontale]



a) Quanto vale la velocità v del proiettile nell'istante in cui il carrello si ferma?

v = ……………………………………= ……… m/s $(M+m)v_0/m = 11\ v_0$ = 11 m/s [il sistema è isolato lungo l'asse orizzontale, per cui in questa direzione si ha $(m+M)v_0 = mv$; potendo trascurare il moto del proiettile in direzione verticale, affermazione conseguente alla circostanza che forza peso e attriti sono trascurabili, si ha che questa è la velocità chiesta nella domanda]

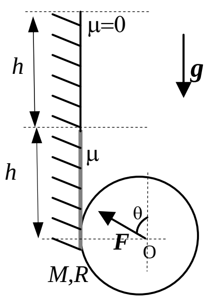
b) Quanto vale la compressione iniziale Δ della molla? [Notate che, dopo che il proiettile viene sparato via, prima o poi la molla finisce per trovarsi alla sua lunghezza di riposo]

Δ = ……………………………………~ ……… m $(((M/m)(M+m)v_0^2)/k)^{1/2}$ = 11×10^{-2} m [non essendoci forze dissipative, nel processo si conserva l'energia meccanica. Pertanto si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$ dove $\Delta E_K = (m/2)v^2 - (M+m)v_0^2/2 = (M/m)(M+m)v_0^2/2$. La variazione di energia, potendosi trascurare ogni effetto legato alla forza peso, è dov uta alla sola energai elastica : $\Delta U = -(k/2)\Delta^2$, da cui la soluzione]

c) Qual è la durata Δt del "processo di sparo"? [Si intende che questo processo ha inizio nell'istante in cui si taglia la fune e termina quando il proiettile si "stacca" dalla molla. Questo intervallo di tempo non corrisponde necessariamente al tempo necessario perché il carrellino si fermi. Spiegate bene in brutta come fate a individuare la durata del processo!]

Δt= ……………………………………~ ……… s $\pi(11M/k)^{1/2}$ = 0.345 s [il distacco del proiettile dalla molla avviene nell'istante in cui la velocità del proiettile supera quella del carrellino, cioè quando la veloità relativa del proiettile rispetto al carrellino diventa positiva (nel riferimento considerato). Ciò si verifica a partire dall'istante in cui la velocità **relativa** si annulla, cioè Δt è il tempo necessario affinchè si realizzi $v = V$. L'istante in cui i due oggetti hanno la stessa velocità è quello di massimo allungamento della molla. Ora il moto relativo del proiettile rispetto al carrellino è armonico con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, dove la massa ridotta è $1/\mu = 1/M + 1/m = 11/M$. Dunque il periodo del moto armonico (relativo) vale $T = 2\pi/\omega = 2\pi(M/(11k))^{1/2}$, l'intervallo di tempo ricercato vale, come è facile rendersi conto e sulla base di quanto già discusso, $T/2$, da cui la soluzione]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza esterna $\mathbf{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse (ortogonalmente a questo) ed è diretta in modo da formare un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto alla verticale, come rappresentato in figura. Il modulo della forza è F = 40 N. Il cilindro è a contatto con una parete verticale fissa e indeformabile. Il primo tratto di tale parete, di lunghezza h = 2.0 m a partire dalla posizione iniziale del cilindro, è **scabro**, e presenta un coefficiente di attrito μ = 0.50. Il secondo tratto di tale parete, anch'esso di lunghezza h = 2.0 m (vedi figura), è **liscio** e presenta attrito trascurabile. Per effetto delle forze applicate, il centro di massa del cilindro, che è inizialmente fermo (tutto il cilindro!), risale lungo la parete. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



a) Quanto vale il lavoro L della forza esterna $\mathbf{F}$ calcolato sull'intero spostamento del cilindro, dalla posizione iniziale al termine della parete? [Per termine della parete si intende il punto collocato a distanza $2h$ rispetto alla posizione di partenza]

L = ………………………………… = ……… J $2hFcos\theta$= 80 J [poiché la forza è costante e uniforme, è sufficiente moltiplicare la sua proiezione nella direzione dello spostamento (la verticale) per lo spostamento stesso. La proiezione vale $Fcos\theta$, da cui la soluzione]

b) Discutete per bene, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro nel primo tratto (quello in cui la parete è scabra) e determinate il modulo della forza di attrito F_A in questo tratto.

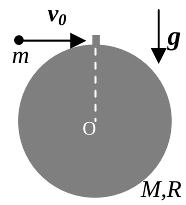
Discussione: …………………………………… sul cilindro sono applicate le seguenti forze: peso (sul centro di massa, verso il basso), forza di attrito (sul punto di contatto, verso il basso), forza $\mathbf{F}$ (con componenti verticali $Fcos\theta$ verso l'alto e orizzontali $Fsin\theta$ verso sinistra di figura), reazione vincolare della parete (orizzontale, verso la destra di figura). Queste forze determinano la dinamica dell'oggetto, che è traslatoria verso l'alto (per il centro di massa) e rotatoria. Le equazioni del moto sono: $a_{CM} = -g+Fcos\theta/M-F_A/M$, dove abbiamo scelto un asse verticale orientato verso l'alto, e $\alpha = F_AR/I = 2F_A/(MR)$, dove abbiamo notato che l'unica forza ad avere momento rispetto a un asse passante per il centro di massa è la forza di attrito e abbiamo usato $I = MR^2/2$ per il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo. A causa della presenza della forza di attrito, che tende a fermare il punto (la generatrice) di contatto, il cilindro ruota e può rotolare senza strisciare a patto che la forza di attrito abbia il valore necessario per questo scopo. Infatti la forza di attrito (statico) ha un valore massimo pari a $F_{A,MAX} = \mu N = \mu Fsin\theta$, dove abbiamo notato che la reazione vincolare, dovendosi opporre alla componente orizzontale della forza $\mathbf{F}$, ha modulo $Fsin\theta$. Come si vedrà nel seguito, la forza di attrito necessaria per il rotolamento puro è compatibile con l'attrito dato dal contatto, per cui il moto è di rotolamento puro.

F_A = ………………………………… = ……… N $(Fcos\theta - Mg)/3$ = 3.4 N [supponendo rotolamento puro, si ha un set di equazioni combinando le due equazioni del moto, sopra scritte, con la condizione cinematica $a_{CM} = \alpha R$. Risolvendo per F_A si ottiene la soluzione. Osservate che la forza di attrito massima vale $F_{A,MAX} \sim 17$ N > F_A, per cui il moto è di rotolamento puro]

c) Quanto vale la velocità v' del centro di massa del cilindro nell'istante in cui esso giunge al termine della parete? [Si intende che esso si è mosso sia lungo il tratto scabro che lungo quello liscio!]

v' = …………………………………….. ~ ………. m/s $(10(Fcos\theta - Mg)h/(3M))^{1/2}$ ~ 8.2 m/s [conviene servirsi del bilancio energetico, visto che sappiamo che il moto nel primo tratto è di rotolamento puro, dunque non c'è lavoro della forza di attrito (che è statico), mentre nel secondo tratto non c'è proprio la forza di attrito. Si ha quindi $L = \Delta E_K+\Delta U_G$ con $\Delta U_G = 2Mgh$ e $\Delta E_K = (M/2)v'^2+(I/2)\omega^2$, dove ω è la velocità angolare del cilindro. Tale velocità angolare ha lo stesso valore di quella all'istante in cui il cilindro termina il tratto scabro. Infatti nel tratto liscio la velocità angolare non può variare, non essendoci forze che generano momenti (e dunque accelerazioni angolari). Per determinare la velocità angolare ω si può utilizzare il bilancio energetico nel primo tratto: si ha, ragionando come in precedenza, $(I/2)\omega^2 = L'-\Delta U'_G-(M/2)v^2$. In questa espressione si ha $L'=F\cos\theta h$ (lo spostamento è pari a h) e $v = \omega R$ (c'è rotolamento puro nell'intero tratto). Si ha quindi: $\omega^2 = (4F\cos\theta h-4Mgh)/3$, da cui, con un po' di rimaneggiamenti di algebra, la soluzione]

3. Un disco pieno e omogeneo di raggio R = 50 cm e massa M = 2.0 kg è imperniato in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno a un asse che passa per il suo centro (O in figura). Sulla periferia del disco si trova un piccolo dente come rappresentato in figura (il dente ha in realtà dimensioni e massa **trascurabili**!); il disco è inizialmente fermo. A un dato istante un oggetto puntiforme di massa $m = M/4$, dotato di velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta orizzontalmente verso la destra di figura, colpisce il dentino. L'urto può essere considerato **completamente elastico**.



a) Discutete **bene**,in brutta, quali grandezze del sistema (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare, e chi più ne ha più ne metta) si conservano nel processo di urto e quali no, e spiegate perché. [Si intende che il processo da considerare è solo quello dell'urto, che ha una durata molto breve]
Discussione e spiegazione: …………………………………… . Poiché l'urto è dichiarato "elastico", si verifica la conservazione dell'energia cinetica totale del sistema. La quantità di moto, invece, non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, la forza peso sul "proiettile" e sul disco e la reazione vincolare che il perno esercita sul disco per bilanciare la forza peso), che non vanno considerate vista la breve durata del processo, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Tuttavia tali forze hanno braccio nulla (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale.

b) Quanto vale la velocità v' che l'oggetto puntiforme possiede subito dopo l'urto? [Vista la geometria del dentino, si può supporre che la velocità subito dopo l'urto abbia la stessa direzione della velocità subito prima dell'urto]
v' = …………………………………… = ………. m/s $-v_0/3$ =3.3 m/s [sfruttiamo le conservazioni dell'energia cinetica e del momento angolare totali. Per l'energia cinetica si ha. $(m/2)v_0^2 = (m/2)v'^2 + (I/2)\omega^2$, dove $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del disco e ω la sua velocità angolare subito dopo l'urto. Prima dell'urto il disco è fermo e il momento angolare è "portato" solo dall'oggetto puntiforme. Esso vale mv_0R, dove abbiamo notato che la quantità di moto è $m\mathbf{v}$ e il "braccio", cioè la distanza tra polo e retta di applicazione del vettore (quantità di moto), è pari a R (quando avviene l'urto il "proiettile" si trova sul dente e la velocità è orizzontale). Poiché si può supporre che la direzione della velocità non cambi subito dopo l'urto, come suggerito nel testo, subito dopo l'urto l'oggetto puntiforme contribuisce al momento angolare totale con un termine $mv'R$. Inoltre subito dopo l'urto al momento angolare contribuisce anche il disco, con un termine $I\omega$ (si noti che, come al solito, si considera il momento angolare assiale e che il segno è preso positivo se la rotazione avviene in senso orario rispetto alla figura). Quindi la conservazione del momento angolare recita: $mv_0R=mv'R+I\omega$. Questa equazione, unita a quella della conservazione dell'energia cinetica, forma un sistema di due equazioni e due incognite. Dalla conservazione del momento angolare si ha infatti: $\omega = (mR/I)(v_0-v')$ che, sostituita nell'equazione di conservazione dell'energia cinetica, porta a: $(m/2)v_0^2=(m/2)v'^2+(m^2R^2/(2I)(v_0^2+v'^2-2v'v_0)$, ovvero, ricordando che $I = MR^2/2$ e facendo un po' di aggiustamenti algebrici, $v_0^2=v'^2+2(m/M)(v_0^2+v'^2-2v'v_0)$. Questa è un'equazione algebrica di secondo grado. Per la soluzione conviene sfruttare il dato del problema m/M = ¼. Si ottiene allora, mettendo insieme i termini dello stesso grado e riarrangiando: $3v'^2-2v_0v'-v_0^2 = 0$. Le soluzioni sono $v' = v_0$, che va scartata in quanto indicherebbe in sostanza che l'urto non è avvenuto (bersaglio mancato!), e $v' = -v_0/3$, che è la soluzione "buona". Notate che il segno negativo indica che il "proiettile" rimbalza e torna indietro dopo aver urtato il dentino]

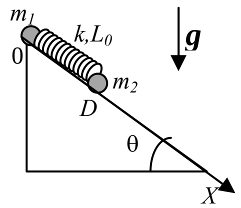
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/3/2012 Firma:

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2bis – 13/3/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due oggetti (puntiformi) di massa m_1 e m_2 possono scivolare con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato (fisso, rigido, indeformabile) che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. I due oggetti sono tenuti insieme da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. Inizialmente i due oggetti sono tenuti fermi da forze esterne (ad esempio due manine) in posizioni che, rispetto ad un asse X che corre lungo il piano inclinato, ha origine sulla sua sommità, e punta verso il basso (come rappresentato in figura), sono $x_{01} = 0$ e $x_{02} = D$. All'istante t_0=0 le forze esterne che tenevano fermi gli oggetti vengono improvvisamente rimosse (senza che venga impartita alcuna velocità iniziale agli oggetti) ed essi sono liberi di muoversi. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni letterali dei vari parametri. Usate il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si scrivono le equazioni del moto relativo, a_{REL} , e del moto del centro di massa, a_{CM} , del sistema? [Dovete scrivere delle **funzioni delle posizioni generiche** x_1 e x_2 dei due oggetti rispetto all'asse considerato nel testo]

   a_{REL}= …………………………………… $-(k/\mu)(x_2-x_1-L_0)$, con $1/\mu=1/m_1+1/m_2$ [il moto relativo avviene per effetto della forza elastica della molla, che è l'unica forza interna al sistema dei due oggetti.. Rispetto all'asse considerato, detta d la distanza (generica) tra gli oggetti, cioè $d = x_2-x_1$, si ha $F = -k(d-L_0)$, da cui, ricordando l'espressione dell'equazione del moto relativo, si ottiene la soluzione. Notate infatti che, essendo le accelerazioni dovute alla forze esterne uguali per le due masse, la nota equazione del moto relativo è valida]

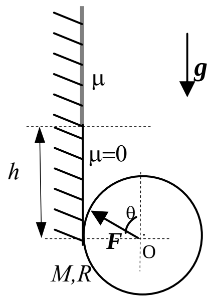
   a_{CM} = …………………………………… $g\sin\theta$ [le uniche forze esterne con componenti non nulle lungo X sono le componenti "attive" delle forze peso, $m_1 g\sin\theta$ e $m_2 g\sin\theta$. Ricordando che l'equazione del moto del CM recita $a_{CM}=\Sigma F_{ext}/M_{tot}$ si ottiene la soluzione]

   b) Come si scrivono le leggi orarie del moto dei due oggetti, $x_1(t)$ e $x_2(t)$? [Cercate di tenere conto in modo opportuno delle condizioni iniziali del problema; anche in questo caso dovete esprimere la soluzione in termini dei dati letterali noti del problema]

   $x_1(t)$ = …………………………………… $(m_2/(m_1+m_2))((D-L_0)(1-\cos(\omega t)))+g\sin\theta t^2/2$.

   $x_2(t)$ = …………………………………… $x_1(t)+(D-L_0)\cos(\omega t)+L_0=-m_1/(m_1+m_2))((D-L_0)(1-\cos(\omega t)))+g\sin\theta t^2/2$ [la legge oraria del moto del CM è $x_{CM}(t)= (m_1x_1(t)+m_2x_2(t))/(m_1+m_2)=x_{0CM}+g\sin\theta t^2/2$, con $x_{0CM}=Dm_2/(m_1+m_2)$. La legge oraria del moto relativo è $d(t) = x_2(t)-x_1(t)$, $= A\cos(\omega t+\Phi)+d_{EQ}$, con ω sopra determinato, $d_{EQ}=L_0$ (si ottiene ponendo uguale a zero l'equazione del moto relativo) e A e Φ dati dalle condizioni iniziali; in particolare, visto che il sistema parte da fermo, si ha Φ = 0 , mentre $d(t_0=0)=D$, secondo i dati del problema, da cui $A = (D-L_0)$. A questo punto si ha un sistema di due equazioni per le (funzioni) incognite $x_1(t)$ e $x_2(t)$, la cui soluzione fornisce la risposta]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza esterna $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse (ortogonalmente a questo) ed è diretta in modo da formare un angolo θ = π/3 rispetto alla verticale, come rappresentato in figura. Il modulo della forza è F = 27.6 N. Il cilindro è a contatto con una parete verticale fissa e indeformabile. Il primo tratto di tale parete, di lunghezza h = 2.0 m a partire dalla posizione iniziale del cilindro, è **liscio** e presenta attrito trascurabile. Subito di seguito a questo tratto la parete diventa **scabra**, con un coefficiente di attrito μ = 0.50 (**nota bene**: questo coefficiente vale sia nel caso di attrito statico che dinamico!). Per effetto delle forze applicate, il cilindro, che è **inizialmente fermo** (tutto il cilindro!), risale lungo la parete. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) Quanto valgono la velocità del centro di massa v'_{CM} e la velocità angolare ω*'* e quando il cilindro è risalito per il **primo** tratto della parete? [Si intende che il primo tratto è quello liscio di lunghezza h]

   v'_{CM} = …………………………………… = ……… m/s $(2h)^{1/2}(F\cos\theta/M-g)^{1/2}$ = 4.0 m/s [conviene applicare un bilancio energetico. In assenza di forze dissipative, detto L il lavoro della forza esterna $\boldsymbol{F}$, si ha: $L = \Delta E_K+\Delta U_G = (M/2)v'^2_{CM}+Mgh$ (dove abbiamo anticipato quanto dimostrato nella risposta al successivo quesito). Poiché la forza è costante e uniforme, per calcolare il lavoro L è sufficiente moltiplicare la sua proiezione nella direzione dello spostamento (la verticale) per lo spostamento stesso. La proiezione vale $F\cos\theta$, da cui la soluzione]

   ω*'* = …………………………………… = ……… rad/s 0 [il cilindro parte da fermo e nel primo tratto non c'è alcuna forza che possa produrre un momento in grado di avviare la rotazione. In altre parole in questo tratto, in cui non c'è attrito, il cilindro compie un moto di traslazione rigida in direzione verticale verso l'alto]

   b) Come si scrivono le equazioni del moto $a_{CM}(t)$ e $\alpha(t)$ quando il cilindro percorre il secondo tratto, quello scabro? [Dovete scrivere delle funzioni: non usate valori numerici!]

   $a_{CM}(t)$ = …………………………………… $-g+F\cos\theta/M-F_A/M$ [l'equazione del moto del centro di massa si scrive rispetto a un asse verticale che supponiamo orientato verso l'alto. Le forze che hanno componenti verticali sono il peso, applicato al centro di massa e diretto verso il basso, la componente verticale della forza $\boldsymbol{F}$ e la forza di attrito, applicata al punto di contatto e diretta verso il basso (si oppone al moto del punto di contatto rispetto alla parete). Notate che la forza di attrito, come sarà chiarito in seguito, all'inizio è sicuramente di tipo dinamico, cioè $F_A = \mu N = \mu F\sin\theta$ dove abbiamo notato che la reazione vincolare esercitata dalla parete sul cilindro, che impedisce che questo penetri al suo interno, è pari in modulo alla componente orizzontale della forza $\boldsymbol{F}$. . Nell'evoluzione del moto tale forza può diventare di tipo statico, per cui $F_A \le \mu N$. Per ognuna delle situazioni l'accelerazione rimane costante nel tempo, dato che non c'è dipendenza esplicita dal tempo]

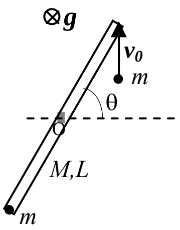
   $\alpha(t)$ = …………………………………… $2F_A/(MR)$ [l'unica forza che ha braccio non nullo è la forza di attrito, da cui la soluzione nella quale abbiamo anche considerato che il momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo è $I = MR^2/2$. Per quanto riguardo la tipologia di forza di attrito e la dipendenza dal tempo valgono le considerazioni fatte sopra. Notate inoltre che questa equazione del moto si intende scritta in un riferimento (angolare) con il verso positivo corrispondente alla rotazione in senso antiorario (in figura)]

   c) Discutete **per bene**, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro quando risale per il secondo tratto di parete, quello in cui è presente attrito. Chiarite in particolare se e quando si verificano le condizioni per il rotolamento puro e stabilite la velocità v''_{CM} del centro di massa nell'istante in cui ha eventualmente inizio il rotolamento puro. [Attenzione a considerare **bene** il problema, che potrebbe essere diverso rispetto a quello a cui pensate! Supponete che il tratto scabro della parete sia molto lungo]

   Discussione: …………………………………… nell'istante in cui il cilindro entra nel secondo tratto sul cilindro comincia ad agire la forza di attrito. Tale forza ha il duplice effetto di diminuire l'accelerazione del centro di massa rispetto al primo tratto e di produrre un momento non nullo rispetto a un polo collocato al centro del cilindro. Dunque il cilindro comincia a ruotare attorno al proprio asse. Tuttavia in nessun caso questa rotazione comporterà **subito all'inizio** rotolamento puro. Infatti il rotolamento puro richiede che il punto (la generatrice) di contatto fra il cilindro e la parete sia istantaneamente fermo. Almeno all'inizio, invece, il punto di contatto è dotato della stessa velocità v'_{CM} determinata sopra (il cilindro sta traslando rigidamente). Essendoci strisciamento l'attrito è di tipo dinamico. Sulla base delle equazioni del moto scritte prima, le leggi orarie delle velocità (vedi dopo) prevedono che la velocità del centro di massa diminuisca e che la velocità angolare aumenti. Ci sarà dunque un istante t' tale che $v_{CM}(t')=\omega(t')R$, in cui cioè si verificano le condizioni di rotolamento puro. Per verificare che il moto, da questo istante in poi, resti di rotolamento puro occorre che la forza di attrito statico esercitata al contatto sia sufficientemente alta. La verifica si fa risolvendo le equazioni del moto assumendo rotolamento puro, cioè mettendo a sistema le due equazioni scritte prima (in cui F_A è statica) con la condizione (geometrica) $\alpha = a_{CM}/R$. Risolvendo per F_A si trova $F_A = (F\cos\theta - Mg)/3 = 1.3$ N < $F_{A,MAX} = \mu F\sin\theta \sim 12$ N. Dunque a partire dall'istante t' il moto diventa di rotolamento puro.

v''_{CM} = …………………………………… ~ ……… m/s $v'_{CM}2\mu F\sin\theta/(F(\cos\theta+\mu\sin\theta)-Mg) \sim 7.0$ m/s [le leggi orarie delle velocità (del centro di massa e angolare) nella fase transiente sono, supponendo $t_0 = 0$ l'istante in cui il cilindro entra nella regione scabra: $v_{CM}(t)=v'_{CM}+a_{CM}t$ e $\omega(t)=\alpha t$, dove abbiamo tenuto in debito conto i valori iniziali delle due velocità. L'istante t' di cui alla risposta precedente si trova risolvendo l'equazione $v_{CM}(t')=\omega(t')R$. Si ha: $t'=v'_{CM}/(a_{CM}+\alpha R)$. Le espressioni delle accelerazioni sono quelle trovate in precedenza. Sostituendo si trova: $t'=v'_{CM}/(-g+F\cos\theta/M+F_A/M)$. La velocità richiesta si trova ponendo questo valore del tempo in una delle due leggi orarie della velocità, per esempio in quella della velocità angolare. Si ha cioè: $v''_{CM} = \alpha t'R=(2F_A/M)v'_{CM}/(-g+F\cos\theta/M+F_A/M)=v'_{CM}2F_A/(F\cos\theta+F_A-Mg)$. La soluzione a questo punto si determina facilmente ricordando che, nella fase transiente (di slittamento) considerata, l'attrito è dinamico e quindi $F_A = \mu N = \mu F\sin\theta$]

3. Due gemellini (puntiformi) di massa m = 20 kg giocano con una specie di giostra fatta in questo modo: una trave sottile e indeformabile, di massa $M = 6m$ =1.2x10^2 kg e lunghezza L = 4.0 m, imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano orizzontale attorno a un asse passante per il suo punto di mezzo (indicato con O). Inizialmente la giostra è ferma e un gemellino è seduto a una sua estremità: come mostrato in figura (vista dall'alto), a un dato istante l'altro gemellino "monta" sull'altra estremità della trave, avendo una velocità di modulo v_0 = 2.0 m/s diretta orizzontalmente come rappresentato in figura (l'angolo indicato vale $\theta = \pi/3$). Si intende che dopo essere montato sull'estremità della trave, il gemellino ci rimane a sedere (fermo rispetto alla trave). [Ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $\cos(\pi/3) = ½$]



a) Discutete **per bene**,in brutta, quali grandezze del sistema (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare) si conservano nel processo descritto sopra, e spiegate perché. [Il processo da considerare è quello relativo al gemellino che monta sulla trave!]
Discussione e spiegazione: …………………………………… Il processo somiglia a un urto anelastico: infatti inizialmente si hanno due oggetti materiali (giostra+gemellino e gemellino) che poi diventano uno solo. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa per permettere al gemellino di "aderire" alla trave. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Infatti è facile dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, tutto il sistema assumerebbe una velocità di traslazione (rigida) nella stessa direzione di $\mathbf{v_0}$. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nulla (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale.

b) Quanto vale la velocità angolare ω del sistema trave+gemellini subito dopo che il gemellino ci è montato sopra?
ω = …………………………………… = ………. rad/s $v_0\cos\theta/(2L)$ =0.125 rad/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima dell'"urto" esso è dovuto al movimento del gemellino, e si esprime $mv_0(L/2)\cos\theta$. Dopo l'"urto" esso è dovuto alla rotazione dell'intero sistema, e si esprime $I_{TOT}\omega$. Il momento di inerzia I_{TOT} si riferisce all'intero sistema, e dunque è somma dei momenti di inerzia della trave (sottile!), $I_T = ML^2/12$ (il perno passa per il centro di massa) e dei gemellini, ognuno dei quali contribuisce con un termine $I_G = m(L/2)^2$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 13/3/2012 Firma: