

## Appunti & trasparenze - Parte 2

Versione 2b, Ottobre 2003

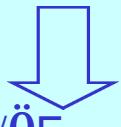
Francesco Fuso, tel 0502214305, 0502214293 - [fuso@df.unipi.it](mailto:fuso@df.unipi.it)  
<http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

- Proprietà quantistiche di trasporto elettronico in sistemi a bassa dimensionalità: Quantum Hall Effect, electron waveguide, ballistic electrons

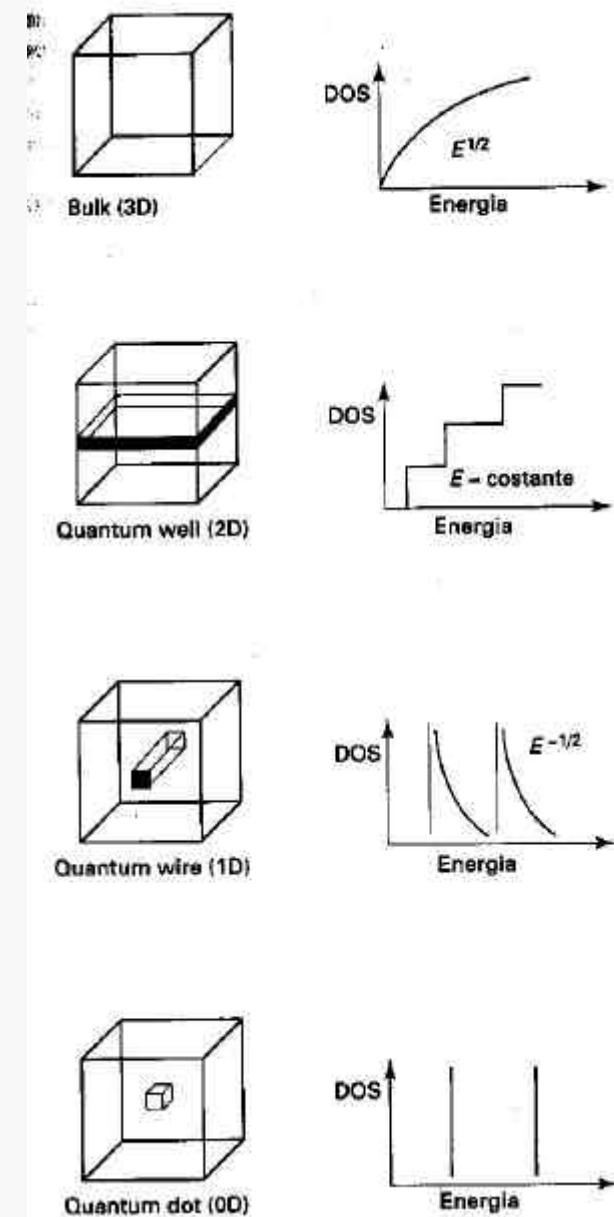
7/10/2003 - 8.30+2 ITI G

13/10/2003 - 8.30+1 ITI L

## Densità degli stati (DOS) e dimensionalità

	L/h dp	1-D
$g(p) dp \propto$	$S/h^2 2p dp$	2-D
	$V/h^3 4p^2 dp$	3-D
		
	$dE / \partial E$	1-D
$g(E) dE \propto$	$dE$	2-D
	$\partial E dE$	3-D

La dimensionalità governa  
l'andamento di DOS ed influenza  
pesantemente le proprietà fisiche  
(es. trasporto, proprietà ottiche, etc.)



# Effetto Hall quantistico (QHE)

Effetti quantistici diventano importanti ad esempio quando la separazione dei livelli energetici quantizzati è paragonabile a energia del sistema, oppure quando la lunghezza d'onda di de Broglie  $\lambda_{dB} = h/p$  si avvicina ad una lunghezza caratteristica del sistema.

Nel QHE si ha quantizzazione dell'energia dovuta alla presenza di  $\mathbf{B}$ , che produce effetti osservabili (anche per valori di campo realisticamente) grazie alle piccole dimensioni del sistema in una direzione.

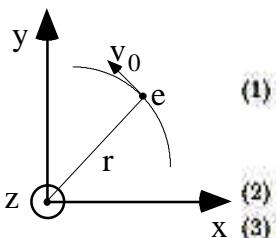
## 0.1 Moto classico di un elettrone in presenza di $\mathbf{B}$

Suppongo  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ . Dalla forza di Lorentz:

$$\mathbf{F}_{Lorentz} = -ev \times \mathbf{B} \quad (1)$$

si ha:

$$\begin{aligned} mv_x &= -ev_y B \\ mv_y &= ev_x B \end{aligned} \quad (2)$$



da cui (derivando e sostituendo):

$$mv_z = -\frac{e^2 B^2}{m} v_x \quad (4)$$

Il moto lungo  $x$  ed  $y$  è oscillatorio con la pulsazione di ciclotrone  $\omega_c = eB/m$ . La combinazione dei moti lungo  $x$  ed  $y$  con opportune condizioni iniziali dà luogo ad uno moto circolare con la stessa pulsazione  $\omega_c$  (raggio arbitrario) (purché  $\omega_c = \omega_0$ ). Se l'elettrone ha anche moto lungo  $z$ , la traiettoria è una spirale.

## 0.2 Trattazione quantistica

L'Hamiltoniana di un elettrone in presenza di  $\mathbf{B}$  è (gauge di Lorentz):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2, \quad (5)$$

con  $\mathbf{A}$  potenziale vettore ( $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ). Nel nostro caso conviene scegliere  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ , quindi si ha:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}((p_x + eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (6)$$

Dato che non compare dipendenza esplicita né da  $x$  né da  $z$ ,  $p_x$  e  $p_z$  sono costanti del moto, quindi la soluzione sarà del tipo  $\psi = \exp(i k_x x) \exp(i k_z z) \mathcal{F}(y)$ , con

$\mathcal{F}(y)$  funzione da determinare attraverso l'applicazione dell'eq. di Schrödinger (Eq. 6), che dà:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_0)^2 \mathcal{F} = E' \mathcal{F}, \quad (7)$$

con  $E'$  espressione opportuna di energia. Questa è l'equazione di un oscillatore armonico lungo  $y$  con pulsazione  $\omega_c$  e centro di oscillazione:

$$y_0 = -\frac{\hbar k_x}{eB}. \quad (8)$$

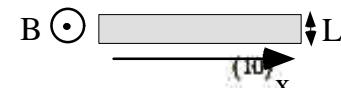
I livelli di energia sono quantizzati con autovalori:

$$E_{n,j} = E_{kin} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad (9)$$

dove  $j$  è un numero quantico riferito all'energia cinetica  $E_{kin}$ . Si noti che i valori del quanto di energia sono generalmente bassi (meV o frazioni di meV) per campi magnetici usuali.

Se il sistema ha piccole dimensioni lungo  $y$  (supponiamo lo spessore sia  $L$ ), allora deve essere  $|y_0| \leq L$ , da cui:

$$k_x < \frac{eBL}{\hbar} = \frac{\omega_c m L}{\hbar}. \quad (10)$$



Quindi, la bassa dimensionalità lungo  $y$  produce una limitazione sul valore di  $k_x$  (effetto di "mescolamento" delle direzioni spaziali tipico delle situazioni in cui si ha a che fare con un campo magnetico).

## 0.3 Densità degli stati e degenerazione

Nel caso unidimensionale, che qui si applica per tenere conto del confinamento spaziale lungo la direzione  $y$ , e di conseguenza del confinamento nello spazio  $\mathbf{k}$  lungo la direzione  $x$  (vedi Eq. (10)), si ha che la densità degli stati (riferita solo alla direzione di quantizzazione) è:

$$g(k_x) dk_x = dk_x \frac{L}{2\pi}. \quad (11)$$

Considerando la sola direzione  $x$ , integrando si ottiene:

$$\int_0^k dk_x \frac{L}{2\pi} = \frac{eBL^2}{2\pi\hbar}, \quad (12)$$

dove si è tenuto conto della condizione Eq. (10). Dividendo l'espressione al membro di destra di Eq. (12) per  $L^2$  si ottiene in pratica una densità ( $n_s$ ) di portatori di carica per unità di superficie (reale), che vale quindi:

$$n_s = \frac{eB}{2\pi\hbar}. \quad (13)$$

## Livelli di Landau

D'altra parte, l'energia del portatore di carica si può scrivere

$$E = E_n + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \quad (14)$$

dove rispetto alla Eq. (14) si è esplicitata la parte cinetica. Dalla Eq. (14) si ricava

$$dk_z = \frac{\sqrt{2m}}{2\hbar} \frac{1}{\sqrt{E - E_n}} dE \quad (15)$$

da cui

$$g(E) \propto \frac{1}{\sqrt{E - E_n}}, \quad (16)$$

densità degli stati tipica per un gase 1-DEG. In corrispondenza delle energie  $E_n$  la  $g(E)$  tende a divergere (livelli di Landau).

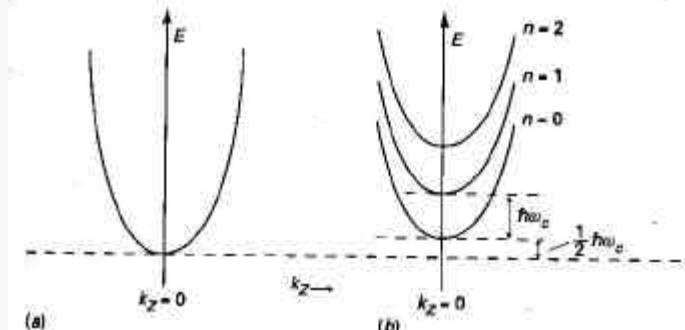


Figura 9.3  
Schema di bande di energia in funzione di  $k_z$  in assenza (a) ed in presenza (b) di un campo magnetico  $\vec{B}$  applicato in direzione  $z$  (vedi eq. 9.52).

## Densità degli stati (DOS)

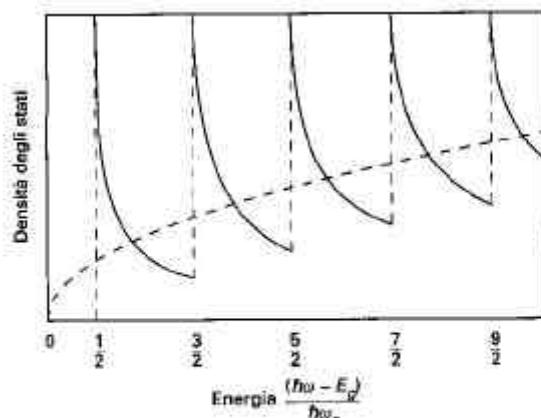


Figura 9.5  
Densità di stati vicino al minimo di una banda in presenza di un campo magnetico costante. Il caso  $B = 0$  è indicato con linea tratteggiata (vedi eq. 9.25) e il caso  $B \neq 0$  con linea continua (vedi eq. 9.56).

La presenza del campo magnetico (lungo z) e la bassa dimensionalità (lungo y) creano DOS peculiare

# Quanto di resistenza (di Von Klitzing)

## 0.4 Quanto di resistenza di Von Klitzing

Considerando la forza di Lorentz come forza elettromotrice, nell'effetto Hall classico si ha che la differenza di potenziale  $V_H$  (in direzione  $y$ , cioè trasversa rispetto al moto delle cariche e al campo magnetico) è  $V_H = LBv$  e la corrente di portatori di carica è  $I = n_s v e L$ , con  $n_s$  densità superficiale di carica già introdotta. Dalla legge di Ohm si deduce una resistenza Hall  $R_H$ :

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{n_s e} \quad (17)$$

Nel QHE, l'azione combinata del campo magnetico e del confinamento spaziale porta alla presenza dei livelli di Landau e alla loro degenerazione. Quando un livello di Landau (supponiamo il livello  $m$ ) è completamente occupato e il successivo è completamente vuoto, cioè  $m$  livelli di Landau sono pieni, ognuno con la degenerazione vista in precedenza, allora, secondo la Eq. (13), si avrà un numero di elettroni per unità di superficie pari a:

$$n = m \frac{eB}{h} \quad (18)$$

da cui deriva che la resistenza Hall si esprime come sottomultiplo del valore  $h/e^2$ , dipendente solo da costanti fondamentali:

$$R_H = \frac{1}{m} \frac{h}{e^2} \quad (19)$$

Questo risultato ha diverse conseguenze. In primo luogo stabilisce un valore quantizzato della resistenza (il cui valore è 25812.806 ohm). Occorre notare che nell'effetto Hall quantistico la quantizzazione della resistenza è conseguenza del confinamento spaziale, ma la sua osservazione è resa possibile dalla presenza del campo magnetico (e conseguente quantizzazione del moto dei portatori di carica). In condizioni ordinarie l'effetto di quantizzazione non è facilmente osservabile (e, in generale, si ricordi che la resistenza misurata può essere interpretata come un parallelo di tante resistenze). Inoltre esistono delle conseguenze notevoli dal punto di vista metrologico, legate alla precisione con cui si può eseguire la misura delle costanti fondamentali  $\hbar$  e  $e^2$ . Dal punto di vista tecnologico, la conseguenza principale è comunque che la differenza di potenziale misurata non è lineare con la corrente, ma segue un tipico andamento a gradini. Per ragioni di tipo sperimentale, i sistemi in cui tradizionalmente si osserva QHE sono delle eterostrutture, ad esempio tipo GaAs/GaAsAl, in cui il confinamento spaziale è ottenuto in strati sottili (pozzi quantici).

Per completezza, occorre ricordare che accanto al QHE intero, scoperto da Von Klitzing (premio Nobel 1985), esiste un QHE frazionario, legato all'occupazione frazionaria dei livelli di Landau (Tsui and Stormer, premio Nobel 1998).

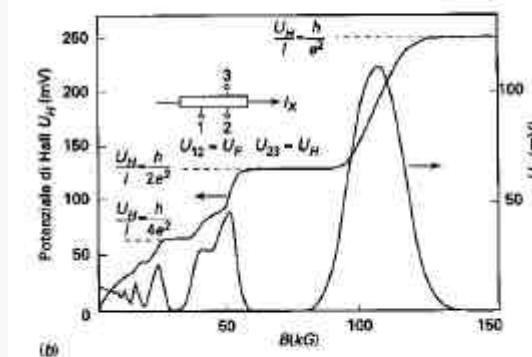
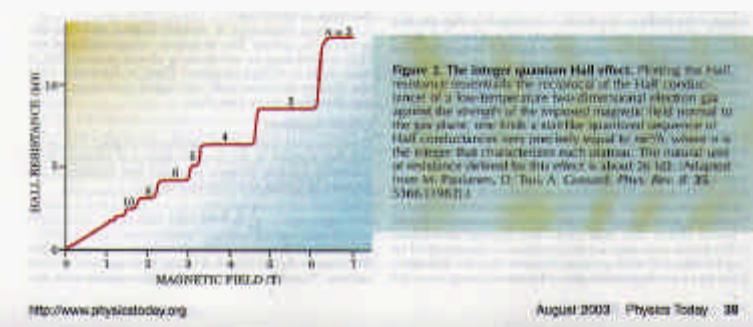


Figure 11.11  
 (a) Illustrazione schematica della giunzione con campo elettrico, che produce stati con mobilità alla superficie della giunzione. (b) Misure di effetto Hall quantizzato, con i caratteristici gradini dove il potenziale di Hall è costante, e il potenziale nella direzione della corrente è nullo. (Da K. von Klitzing, Europhysics News 13, 2 (Aprile 1982)).



Resistenza quantizzata  $R_{vk}$

## Trasporto balistico/sistemi mesoscopici

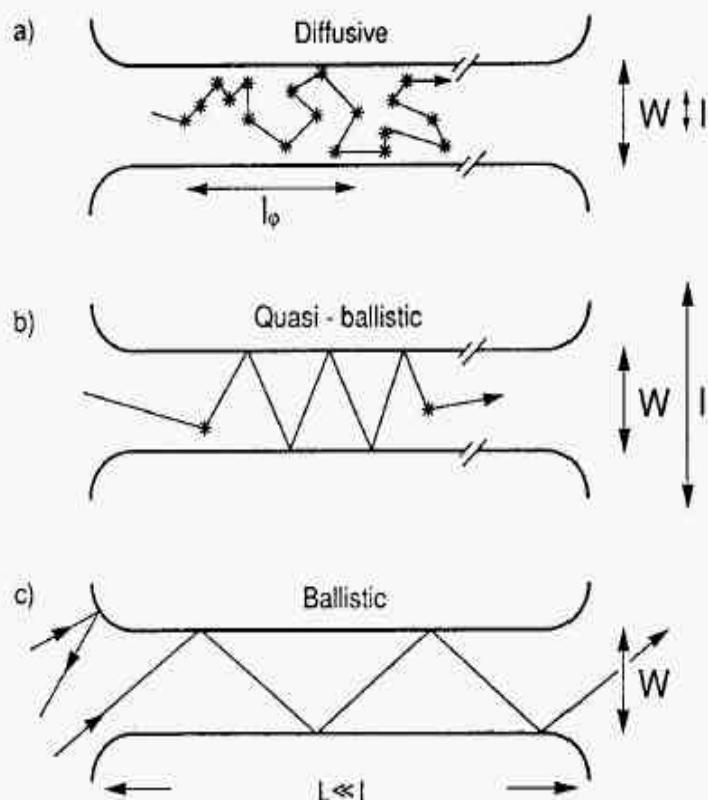


Figure 10.4: Electron trajectories characteristic of the diffusive ( $\ell < W, L$ ), quasi-ballistic ( $W < \ell < L$ ), and ballistic ( $W, L < \ell$ ) transport regimes, for the case of specular boundary scattering. Boundary scattering and internal impurity scattering (asterisks) are of equal importance in the quasi-ballistic regime. A nonzero resistance in the ballistic regime results from backscattering at the connection between the narrow channel and the wide 2DEG regions. Taken from H. Van Houten et al. in "Physics and Technology of Submicron Structures" (H. Heinrich, G. Bauer and F. Kuchar, eds.) Springer, Berlin, 1988.

In QHE B agisce in modo da "costringere" il moto degli elettroni che diventa "balistico"

- resistenza dipende solo dai contatti
- non c'è "saturazione" della velocità
- un singolo elettrone può essere trasportato efficacemente

Comportamento simile a fibra ottica  
(riflessioni multiple)  
con vantaggi (es.  
interconnessioni) e  
mondo "mesoscopico"

## Electron waveguides (EW)

- larghezza  $< \lambda_{DB} = h/p \sim 7 \times 10^{-4}/v$  [m/s] in nm ( $v_{term} \sim 10^4 - 10^5$  m/s,  $v_F \sim 10^6$  m/s)
- lunghezza  $< l_{\uparrow\downarrow m}$  (elastic scattering, cfr. Drude)

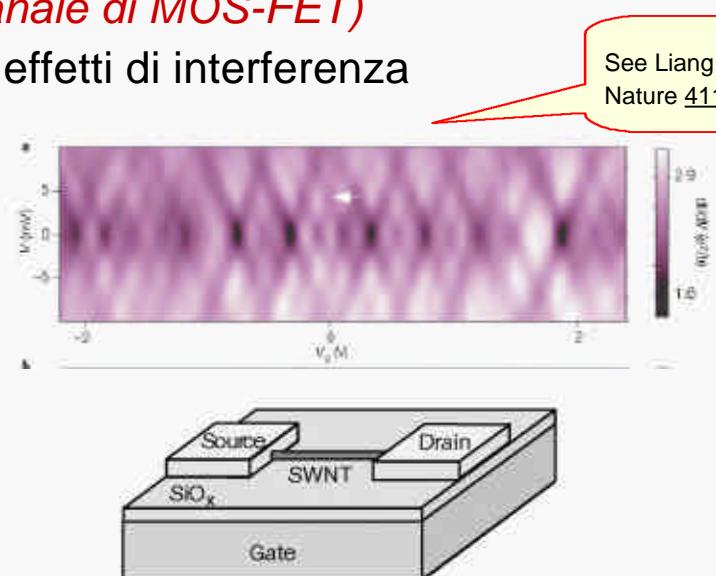
↓  
*operazione a bassa T!!!*

Simile a fibra ottica singolo modo (es., core  $\varnothing \sim 4$   $\mu\text{m}$  per  $\lambda \sim 850$  nm), con in più possibilità di controllo elettrico (*canale di MOS-FET*)

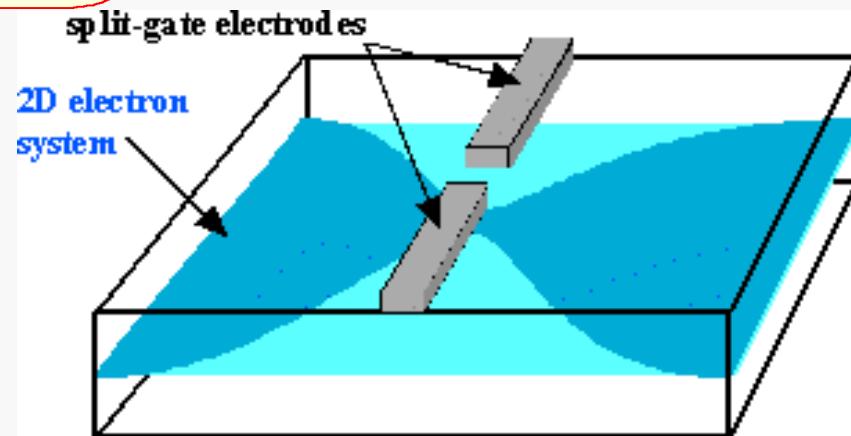
ed effetti di interferenza

→ **Trasporto balistico**

Costrizione dimensionale nel canale: MOS-FET con split gate



See Liang et al.  
Nature 411 665 (2001)



oggi anche Carbon Nanotubes  
(~200 nm metallic SWNT)

## Split gate in un MOS-FET (MODFET)

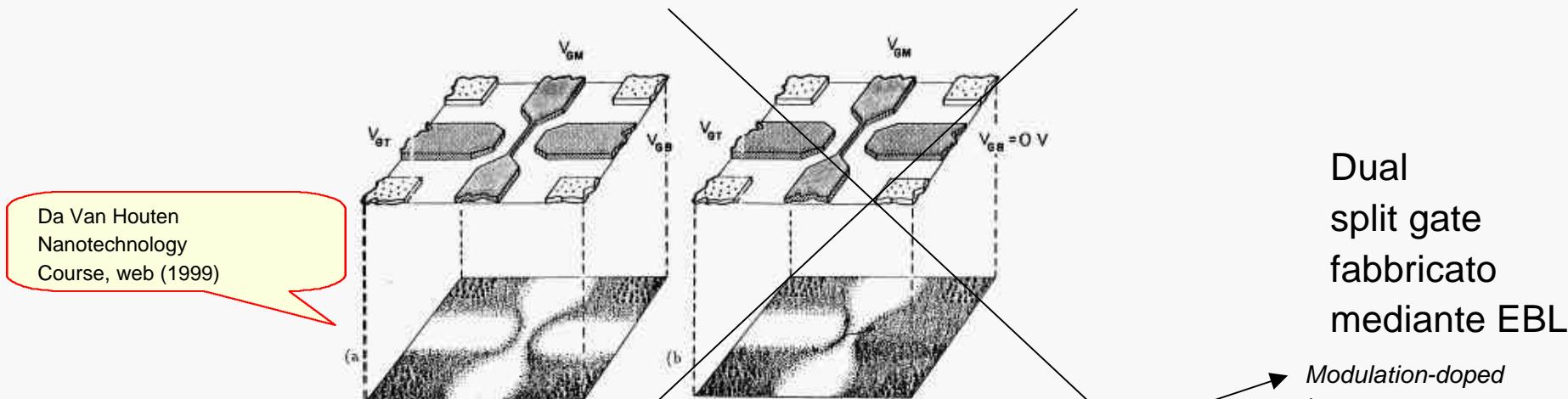
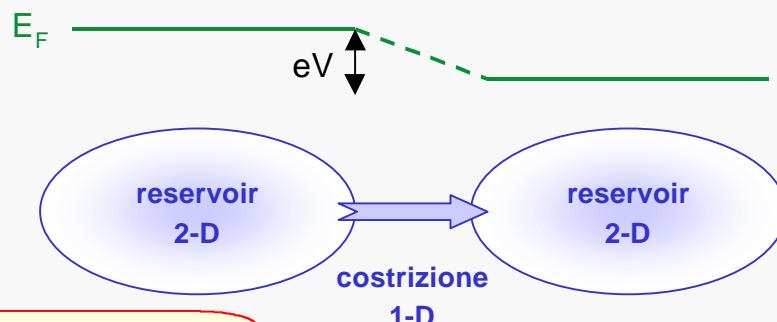


Figure 10.6: (a) Schematic illustration of the split-gate dual electron waveguide device. The top plane shows the patterned gates at the surface of the MODFET structure. The bottom plane shows the implementation of two closely spaced electron waveguides when the gates (indicated by  $V_{GT}$ ,  $V_{GB}$  and  $V_{GM}$ ) are properly biased. Shading represents the electron concentration. Also shown are the four ohmic contacts which allow access to the inputs and outputs of each waveguide. (b) Schematic of the “leaky” electron waveguide implementation. The bottom gate is grounded ( $V_{GB}=0$ ) so that only one waveguide is in an “on” state.  $V_{GM}$  is fixed such that only a small tunneling current crosses it. The current flowing through the waveguide as well as the tunneling current (depicted by arrows) are monitored simultaneously.

# Trasporto in EW



Da G. Timp, Nanotechnology  
(Springer-Verlag, 1999)

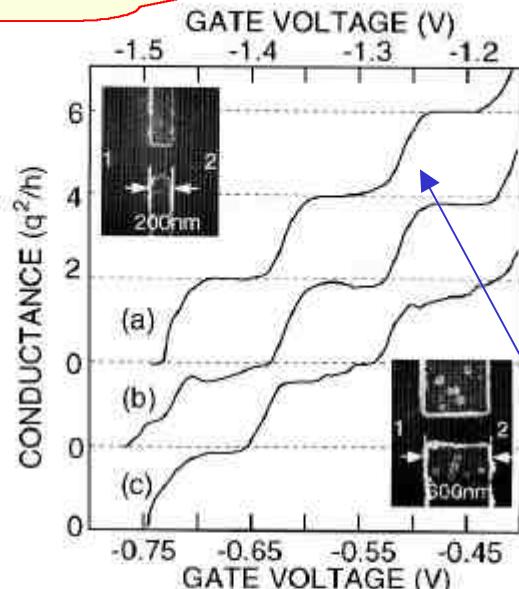


FIGURE 19. The two terminal conductance of an electron waveguide at  $T=200\text{mK}$  as a function of gate voltage (or the width of the constriction). The inset at the top of the figure shows a top view of 200 nm long split-gate electrodes with a 300 nm gap between them placed on a high mobility  $\text{GaAs}/\text{AlGaAs}$  heterostructure. The bottom inset shows a similar device on the same heterostructure with a 600 nm lithographic length. The quantization of the conductance ( $\delta G = (1 \pm 0.01)2q^2/h$ ) of the 200 nm long constriction shown in (a) deteriorates after cycling to room temperature, as shown in (b). We attribute the deterioration to a difference in the configuration of depletion charges corresponding variations in the width of the constriction. The poor quantization of the conductance of a 600 nm long constriction, shown in (c), is also supposed to develop from fluctuations in the width. (See color plate.)

Macroscopicamente:

$$j = n e v$$

See van Wees et al.  
PRL 60 848 (1988)

1. a  $T=0$  solo la frazione di elettroni  $eV/E_F$  partecipa alla conduzione;
2. la velocità è  $v_F = v (2E_F/m)$ ;
3.  $n \propto \int g(E)dE$  per caso 1-D  $\propto v E_F$

$$i = eV/E_F \text{ e } v (2E_F/m) v (2m E_F)/h = = 2 e^2 V/h$$

Conducibilità in EW ideale:

$$G_{1D} = i/V = 2 e^2/h$$

(nel caso non ideale,  $G = T G_{1D}$ , cioè si ha parallelo di quanti di resistenza)

LIVELLI DI  
LANDAUER

Resistenza quantizzata  
 $R_{vk}$   
(anche senza B)

- Effetto tunnel, diodo ad effetto tunnel risonante (RTD); transistor a singolo elettrone, Coulomb blockade; cenni su superconduttori, giunzioni SIS e NIS, effetto Josephson e SQUID

14/10/2003 - 9.30+1 ITI G

20/10/2003 - 9.30+2 ITI L C

## Richiami sull'effetto tunnel

Table 6-2. A Summary of the Systems Studied in Chapter 6

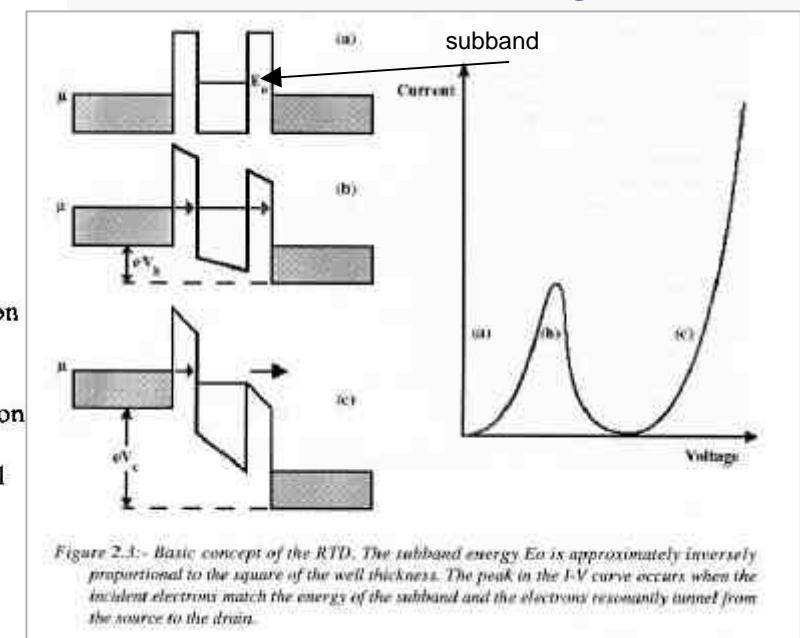
Name of System	Physical Example	Potential and Total Energies	Probability Density	Significant Feature
Zero potential	Proton in beam from cyclotron			Results used for other systems
Step potential (energy below top)	Conduction electron near surface of metal			Penetration of excluded region
Step potential (energy above top)	Neutron trying to escape nucleus			Partial reflection at potential discontinuity
Barrier potential (energy below top)	$\alpha$ particle trying to escape Coulomb barrier			Tunneling
Barrier potential (energy above top)	Electron scattering from negatively ionized atom			No reflection at certain energies
Finite square well potential	Neutron bound in nucleus			Energy quantization
Infinite square well potential	Molecule strictly confined to box			Approximation to finite square well
Simple harmonic oscillator potential	Atom of vibrating diatomic molecule			Zero-point energy

Riassunto dei risultati per sistemi quantistici (particella e potenziale)

Da Eisberg Resnick, Quantum Physics Wiley (1985)

## Effetto tunnel

## Resonant Tunneling



RT Diodes: elementi per alta velocità (100 GHz) e bassa dissipazione

For the barrier potential of (6-45), we know from the qualitative arguments of the last chapter that acceptable solutions to the time-independent Schrödinger equation should exist for *all* values of the total energy  $E \geq 0$ . We also know that the equation breaks up into three separate equations for the three regions:  $x < 0$  (left of the barrier),  $0 < x < a$  (within the barrier), and  $x > a$  (right of the barrier). In the regions to the left and to the right of the barrier the equations are those for a free particle of total energy  $E$ . Their general solutions are

$$\begin{aligned}\psi(x) &= Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} & x < 0 \\ \psi(x) &= Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x} & x > a\end{aligned}\quad (6-46)$$

where

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

In the region within the barrier, the form of the equation, and of its general solution, depends on whether  $E < V_0$  or  $E > V_0$ . Both of these cases have been treated in the previous sections. In the first case,  $E < V_0$ , the general solution is

$$\psi(x) = Fe^{-k_3 x} + Ge^{k_3 x} \quad 0 < x < a \quad (6-47)$$

where

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad E < V_0$$

In the second case,  $E > V_0$ , it is

$$\psi(x) = Fe^{k_4 x} + Ge^{-k_4 x} \quad 0 < x < a \quad (6-48)$$

where

$$k_4 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad E > V_0$$

Note that (6-47) involves *real* exponentials, whereas (6-46) and (6-48) involve *complex* exponentials.

Since we are considering the case of a particle incident on the barrier from the left, in the region to the right of the barrier there can be only a transmitted wave as there is nothing in that region to produce a reflection. Thus we can set

$$D = 0$$

In the present situation, however, we cannot set  $G = 0$  in (6-47) since the value of  $x$  is limited in the barrier region,  $0 < x < a$ , so  $\psi(x)$  for  $E < V_0$  cannot become infinitely large even if the increasing exponential is present. Nor can we set  $G = 0$  in (6-48) since  $\psi(x)$  for  $E > V_0$  will have a reflected component in the barrier region that arises from the potential discontinuity at  $x = a$ .

We consider first the case in which the energy of the particle is less than the height of the barrier, i.e., the case:

$$E < V_0$$

In matching  $\psi(x)$  and  $d\psi(x)/dx$  at the points  $x = 0$  and  $x = a$ , four equations in the arbitrary constants  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$ , and  $G$  will be obtained. These equations can be used to evaluate  $B$ ,  $C$ ,  $F$ , and  $G$  in terms of  $A$ . The value of  $A$  determines the amplitude of the eigenfunction, and it can be left arbitrary. The form of the probability density corresponding to the eigenfunction obtained is indicated in Figure 6-14 for a typical situation. In the region  $x > a$  the wave function is a pure traveling wave and so the probability density is constant, as for  $x > 0$  in Figure 6-10. In the region  $x < 0$  the wave function is principally a standing wave but has a small traveling wave component because the reflected traveling wave has an amplitude less than that of the

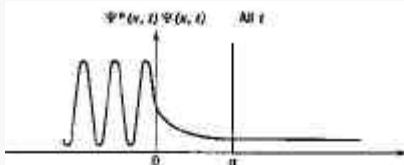


Figure 6-14 The probability density function  $\Psi^* \Psi$  for a typical barrier penetration situation.

incident wave. So the probability density in that region oscillates but has minimum values somewhat greater than zero, as for  $x < 0$  in Figure 6-10. In the region  $0 < x < a$  the wave function has components of both types, but it is principally a standing wave of exponentially decreasing amplitude, and this behavior can be seen in the behavior of the probability density in the region.

The most interesting result of the calculation is the ratio  $T$ , of the probability flux transmitted through the barrier into the region  $x > a$ , to the probability flux incident upon the barrier. This transmission coefficient is found to be

$$T = \frac{\tau_1 C^* C}{\tau_1 A^* A} = \left[ 1 + \frac{(e^{ik_3 a} - e^{-ik_3 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\sinh^2 k_3 a}{4 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right)} \right]^{-1} \quad (6-49)$$

where

$$k_3 a = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) \quad E < V_0$$

If the exponents are very large, this formula reduces to

$$T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2ka} \quad k_3 a \gg 1 \quad (6-50)$$

as can be verified with ease. When (6-50) is a good approximation,  $T$  is extremely small.

These equations make a prediction which is, from the point of view of classical mechanics, very remarkable. They say that a particle of mass  $m$  and total energy  $E$ , incident on a potential barrier of height  $V_0 > E$  and finite thickness  $a$ , actually has a certain probability  $T$  of penetrating the barrier and appearing on the other side. This phenomenon is called *barrier penetration*, and the particle is said to *tunnel* through the barrier. Of course,  $T$  is vanishingly small in the classical limit because in that limit the quantity  $2mV_0a^2/\hbar^2$ , which is a measure of the opacity of the barrier, is extremely large.

We shall discuss barrier penetration in detail shortly, but let us first finish describing the calculations by considering the case in which the energy of the particle is greater than the height of the barrier, i.e., the case:

$$E > V_0$$

In this case the eigenfunction is oscillatory in all three regions, but of longer wavelength in the barrier region,  $0 < x < a$ . Evaluation of the constants  $B$ ,  $C$ ,  $F$ , and  $G$  by application of the continuity conditions at  $x = 0$  and  $x = a$ , leads to the following formula for the transmission coefficient

$$T = \frac{\tau_1 C^* C}{\tau_1 A^* A} = \left[ 1 - \frac{(e^{ik_4 a} - e^{-ik_4 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\sin^2 k_4 a}{4 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1} \quad (6-51)$$

where

$$k_4 a = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right) \quad E > V_0$$

## Trasporto in quantum dots (metalli, semicond., supercond.)

### Conductive quantum dot (0-DEG system)

Es.: sfera metallica con raggio  $r$



$$\begin{aligned}Q &= C V \\V &= Q/4\pi\epsilon_0 r \\C &= 4\pi\epsilon_0 r \\E &= CV^2/2\end{aligned}$$

Es.: per  $r \sim 10$  nm,  $C \sim 1$  aF  
per  $V = 1$  V si ha  $Q \sim 10^{-18}$  Coulomb  
cioè  $N \sim 6$  e !!!

1) Requisito fondamentale:  
lavoro per aggiungere  $e \gg$  en. termica  
 $e Q/C \gg kT$



*operazione a bassa  $T$ !!!*

Natura discreta della carica ( $Q = N e$ )  
produce effetti "quantizzati"

### Three-wire device



(necessario per avere  
capacitore e per caricarlo)

2) **Effetto tunnel** tra diversi dots

⇒ requisito ulteriore:  
resistenza di tunnel  $R_t \gg R_{vk}$   
infatti, il tempo di carica è  
 $\Delta t = \tau \sim R_t C$  ;  $\Delta E \Delta t > h$   
 $\Rightarrow R_t > h/e^2$



*weak coupling !!*

See R. Compaño et al.  
MEL-ARI EC Project  
Technol. Rodmap 1999

## Coulomb blockade (Cb) and SE tunneling

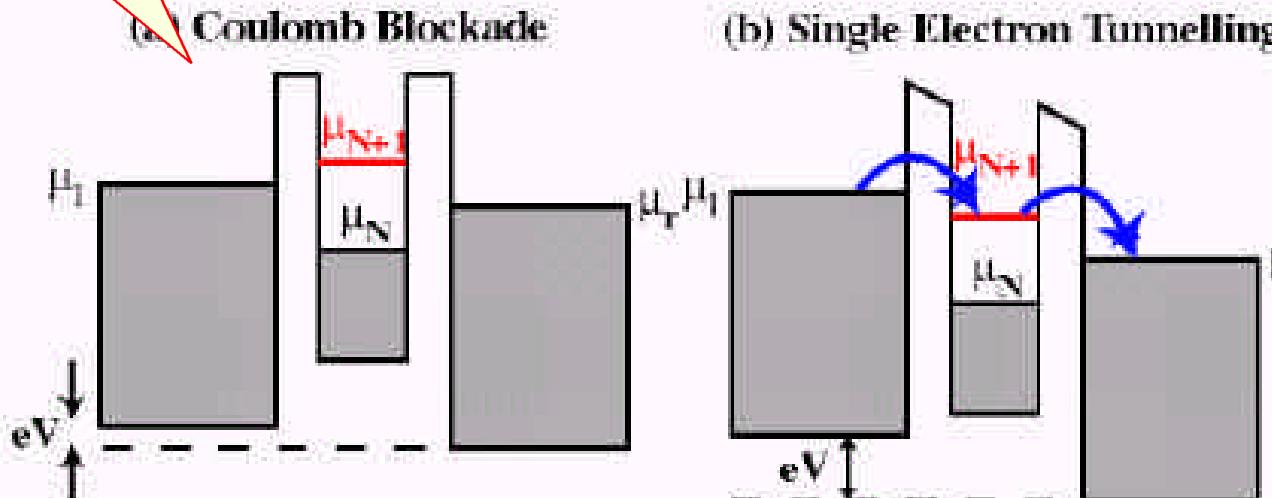


Figure 2.2:- For an island of total capacitance  $C$  with  $N$  electrons, being  $\mu_{N+1}$  the chemical potential of the highest filled electron state,  $\mu_N$  the chemical potential of the first available empty state for an electron and  $\mu_L$  and  $\mu_R$  the chemical potentials of the left and right electrodes respectively, it may be shown that the energy to add an electron to the island is  $\mu_{N+1} - \mu_N = e^2/C$ . Therefore provided  $e^2/C \ll k_B T$  (the thermal energy - i.e.  $C$  is small) and the tunnelling resistance,  $R_T \gg R_K = 25.8 k\Omega$  (i.e. the electron wavefunction may be localised on the island) for a voltage  $V$  applied across the electrodes, no electrons may flow if  $\mu_{N+1} \geq \mu_L$  and  $\mu_R$  - the state known as Coulomb blockade (a). If a larger bias is applied across the electrodes such that  $\mu_L \geq \mu_{N+1} \geq \mu_R$ , then empty states may be populated in the island and single electrons may tunnel through the island (b). A gate may be used to change the Fermi level of the island and therefore switch the single electron current on or off.

Regimi:

1.  $e^2/C \ll kT$   
(carica continua)
2.  $\Delta E \ll kT \ll e^2/C$   
(classical Cb - flutt.)
3.  $kT \ll \Delta E \ll e^2/C$   
(quantum Cb)

ΔE energia necessaria per popolare il livello successivo della buca, cioè per crescere di un elettrone la popolazione del quantum dot

# Coulomb oscillations and staircase

Da G. Timp, Nanotechnology  
(Springer-Verlag, 1999)

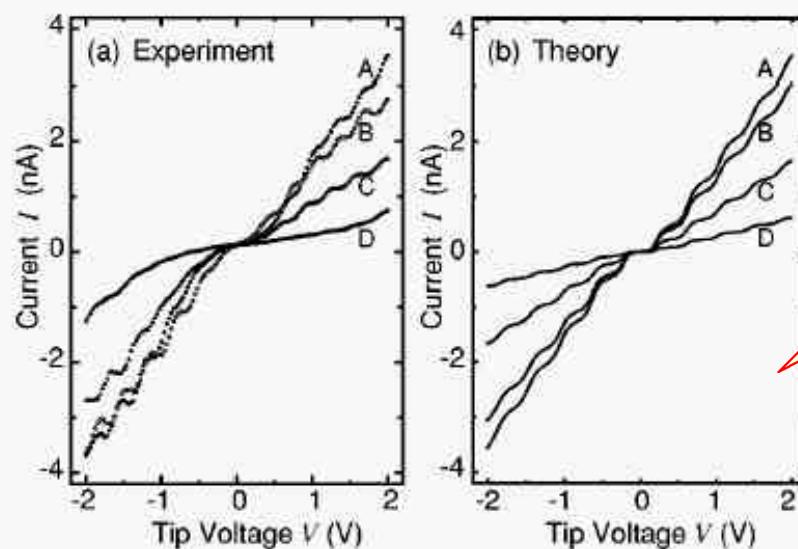
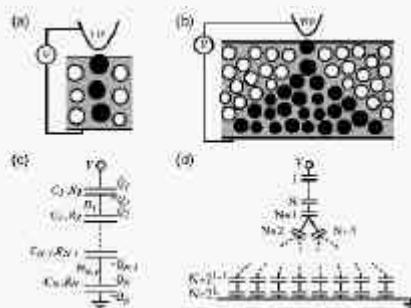


FIG. 3. (a) Experimental  $I$ - $V$  curves for a 10-nm-thick  $\text{Co}_{36}\text{Al}_{22}\text{O}_{42}$  at room temperature. A, B, C, and D refer to different distances between the STM tip from the surface of the sample. The lateral position for A and B is different from that for C and D. (b) Corresponding theoretical curves in a triple tunnel junction system at  $T=300$  K. The tunnel resistance at the bottleneck is taken to be  $R_1=600$ , 700, 1300, and 3500  $\text{M}\Omega$  for lines A, B, C, and D, respectively. The other tunnel resistances are  $R_2=R_3=1$   $\text{M}\Omega$  and the capacitances are  $C_1=4.48\times 10^{-19}$   $\text{F}$ ,  $C_2=2.13\times 10^{-19}$   $\text{F}$ , and  $C_3=3.62\times 10^{-19}$   $\text{F}$  for all curves.



STM measurements  
room-temperature  
granular metal films  
( $\phi$  1-10 nm)

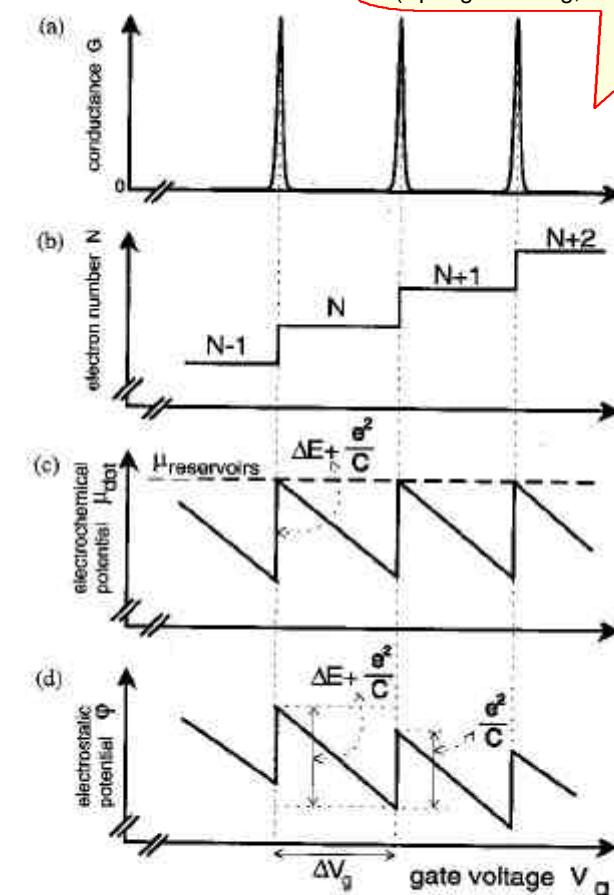
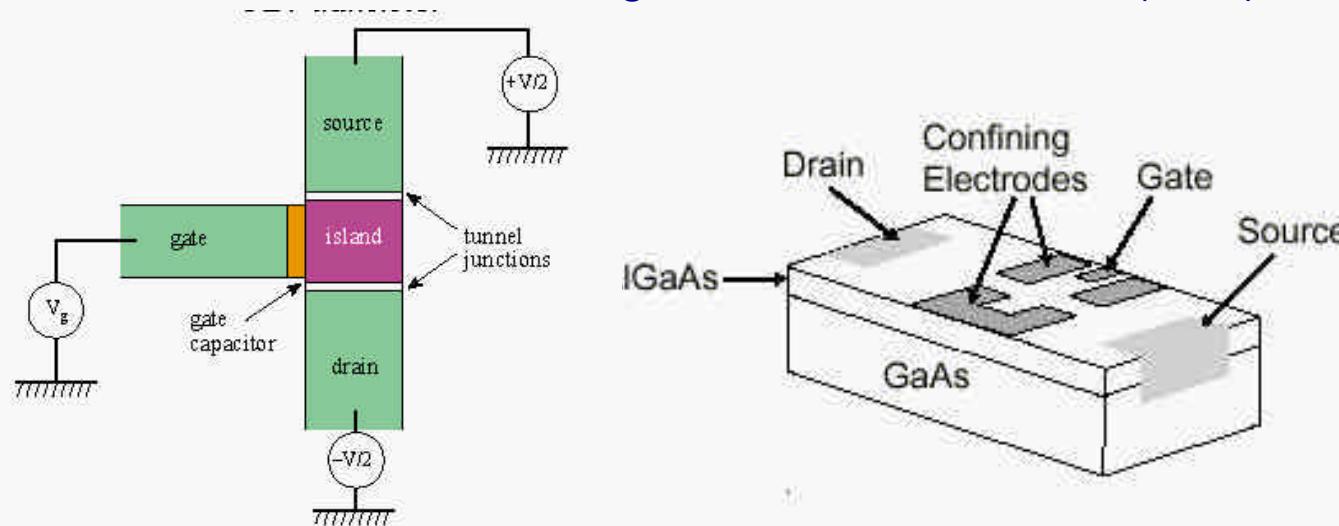


FIGURE 6. Schematic comparison, as a function of gate voltage, between (a) the Coulomb oscillations in the conductance  $G$ , (b) the number of electrons in the dot ( $N+i$ ), (c) the electrochemical potential in the dot,  $\mu_{\text{dot}}(N+i)$ , and (d) the electrostatic potential  $\phi$ .

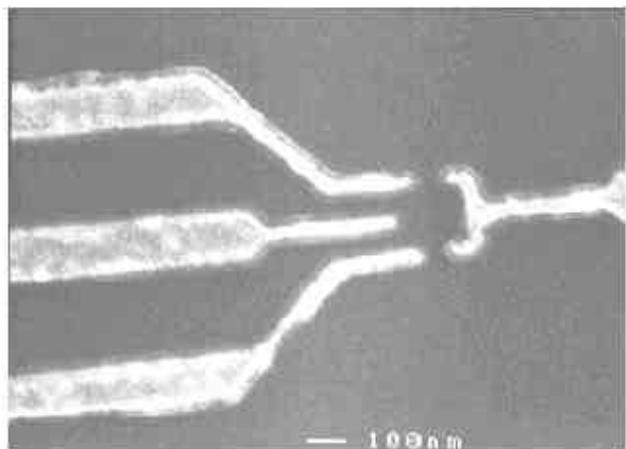
N cambia solo in modo discreto  
V può cambiare in modo continuo  
↓  
Coulomb oscillations

## Single-Electron Transistor (SET)



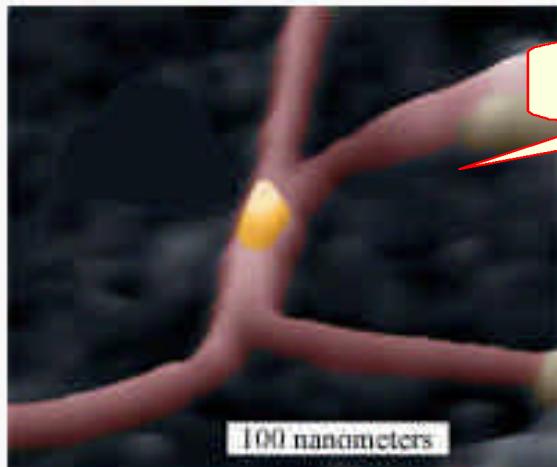
See Kastner  
Ann.Phys 9 885 (2000)

**Fig. 1** Schematic drawing of a SET. Wires are connected to source and drain contacts to pass current through the 2DEG at the GaAs/AlGaAs interface. Wires are also connected to the confining electrodes to bias them negatively and to the gate electrode that controls the electrostatic energy of the confined electrons.



SET: dispositivo a tre (e più!) terminali  
fabbricato via EBL con funzionalità simili a  
MOS-FET (incluse funzioni di memoria) con  
in più;  
singolo elettone e più veloce (ps range)  
*(ma operazione a bassa T!!)*

## Alcune implementazioni alternative (*hot topic!*)

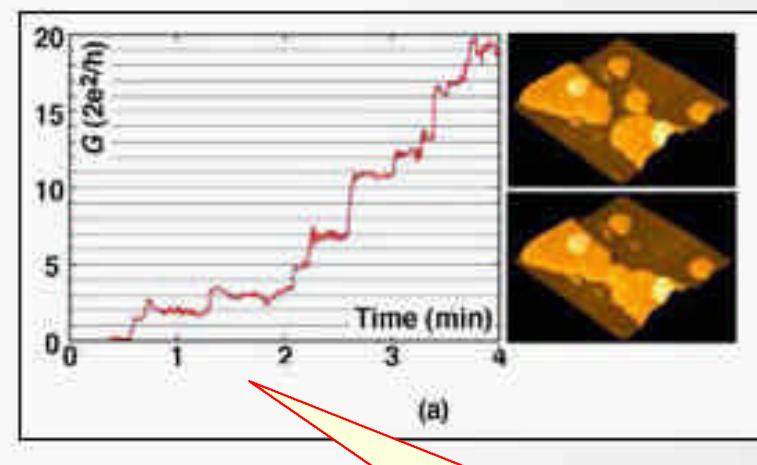
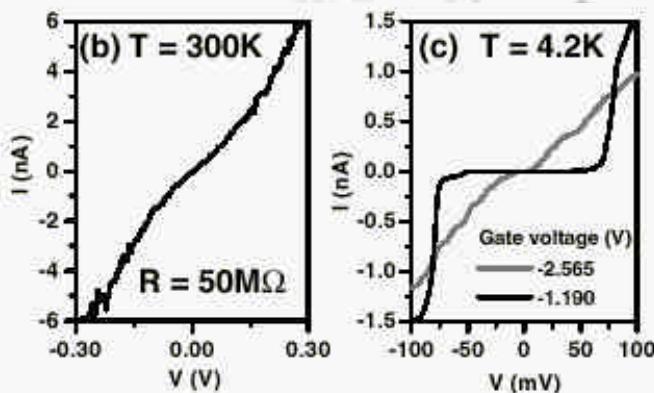


See Thelander and Samuelson  
Nanotechnology **13** 108 (2002)

Manipolazione AFM di aerosol-sprayed  
Au nanoparticles sistemate tra SWNT  
oppure tra elettrodi convenzionali (EBL-  
fabricated Au)

A tiny speck of gold positioned  
between two parallel carbon  
nanotubes forms a transistor that  
forwards one electron at a time.  
These single electron transistors  
could be used to make extremely  
small, low-power logic circuits.

Source: Lund University



See Junno et al.,  
APL **72** 548 (1998); APL **80** (2002)

# Tunneling in superconduttori

## 0.1 Funzione d'onda macroscopica

La teoria di Ginzburg-Landau suppone che un superconduttore possa essere descritto da una funzione d'onda *macroscopica*  $\Psi_s(\vec{r})$ . Il carattere macroscopico della funzione d'onda suggerisce che essa possa essere espressa come funzione esplicita di un parametro di fase:  $\Psi_s = |\Psi|e^{iS}$ . Supponendo di essere in presenza di un campo magnetico con potenziale vettore  $\vec{A}$  tale che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , a tale funzione d'onda può essere associata una corrente, che vale:

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{m} |\Psi|^2 \vec{\nabla} S - \frac{e^2}{mc} |\Psi|^2 \vec{A}, \quad (1)$$

Si noti che il primo termine nell'eq. (1) rappresenta l'ordinaria espressione della corrente quantistica (cioè associata ad una funzione d'onda<sup>1</sup>), mentre il secondo termine è conseguenza dell'equazione di London (modello fenomenologico della supercondutività), qui di seguito riportata nel sistema cgs:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{ne^2}{mc} \vec{B}. \quad (2)$$

## 0.2 Quantizzazione del flusso di campo magnetico

Poiché la funzione d'onda dipende esplicitamente dal fattore di fase  $S$ , se essa deve assumere un valore univoco, su ogni percorso chiuso  $L$  deve essere:

$$\oint_L \vec{\nabla} S \cdot d\vec{l} = 2n\pi. \quad (3)$$

D'altra parte, fuori dal materiale superconduttore (a distanza sufficientemente grande - vedi dopo - dalla superficie) si ha  $\vec{j} = 0$ . Quindi per il flusso del campo magnetico  $\Phi(\vec{B})$  si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{surf}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = n \frac{2\pi\hbar c}{2e}. \quad (4)$$

La relazione eq. (4) esprime la condizione di quantizzazione del flusso inclusa nei modelli fenomenologici della supercondutività (London) e verificata sperimentalmente.

<sup>1</sup>La densità di corrente di probabilità è definita come  $-\frac{\hbar\omega}{2m}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$ .

## 0.3 Tunneling con superconduttore

Se due materiali superconduttori sono separati da un sottile film dielettrico (giunzione SIS), ovvero se un metallo e un materiale superconduttore sono separati da un sottile strato dielettrico (giunzione NIS), esiste la possibilità che le funzioni d'onda dei due materiali si sovrappongano, dando origine ad un processo di tunneling.

Secondo la teoria BCS, la supercondutività è associata ad un gap di energia,  $\Delta_0$ . Questo gap, che nei superconduttori ordinari è  $\sim$  meV, può essere interpretato come l'energia dello stato fondamentale della funzione d'onda del superconduttore, ovvero ha il ruolo di un'energia di legame per la coppia di Cooper. La densità degli stati viene modificata di conseguenza, mostrando un carattere normale (metallico) per  $E < (E_F - \Delta_0)$ , tendendo a divergere per  $E \sim (E_F \pm \Delta_0)$  ed essendo nulla per  $(E_F - \Delta_0) < E < (E_F + \Delta_0)$ .

Se la giunzione SIS è polarizzata, l'effetto tunnel ha un onset per  $eV \geq 2\Delta_0$ . Infatti solo in queste condizioni si può avere passaggio di elettroni (solo gli stati con  $E < (E_F - \Delta_0)$  sono pieni). Se invece considero una giunzione NIS, allora l'onset è a  $eV \geq \Delta_0$ , dato che gli elettroni del metallo si trovano già al livello di Fermi (corrispondente all'equilibrio al livello di Fermi del superconduttore).

L'analisi della conducibilità per effetto tunnel (curve I-V), eseguita eventualmente a livello locale con microscopi STM (misure "spettroscopiche"), fornisce tradizionalmente un potente metodo di indagine delle proprietà dei superconduttori.

Da Grossi and Pastori P.,  
Solid State Physics  
(Academic Press, 2000)

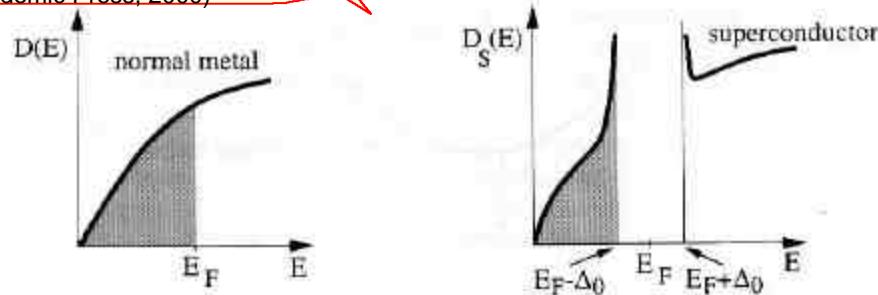


Fig. 11 Schematic density-of-states for quasiparticles in a normal metal and in a superconductor; for sake of clarity of the figure, the gap  $2\Delta_0$  around  $E_F$  has been greatly magnified.

## Giunzione SIS

Da G. Timp, Nanotechnology  
(Springer-Verlag, 1999)

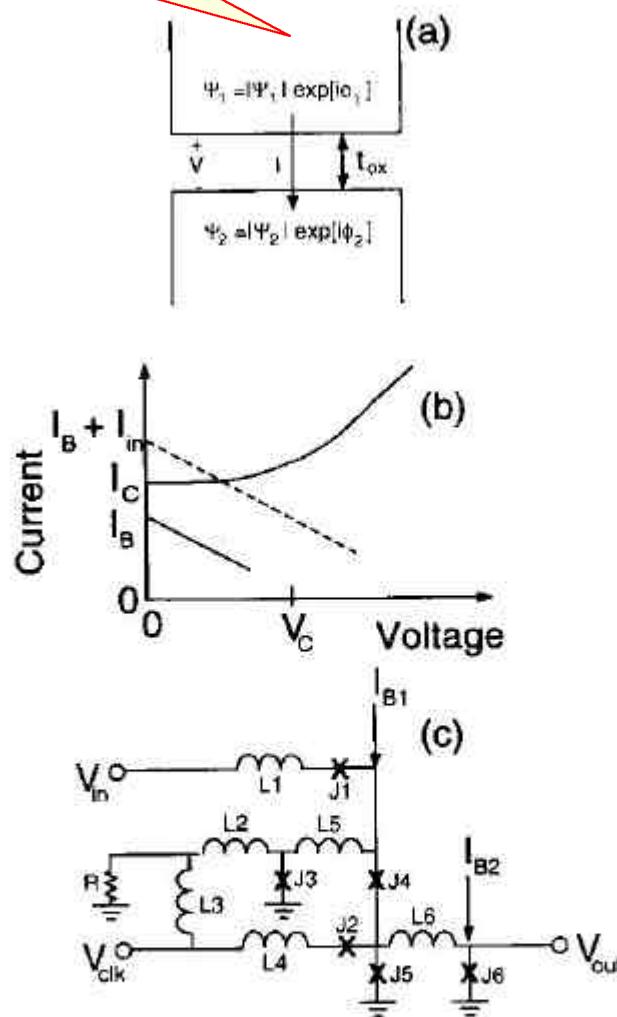


FIGURE 21. (a) A schematic representation of a tunnel junction comprised of an oxide layer sandwiched between two superconducting electrodes. The voltage that develops across the electrodes arises from the change in the phase of the wavefunction across the gap. (b) The I-V characteristic of an overdamped Josephson-junction, the building block of RSFQ logic. (c) Schematic representation of an inverter realized with JJ technology. The device count required to realize a simple function may preclude the use of JJ technology.

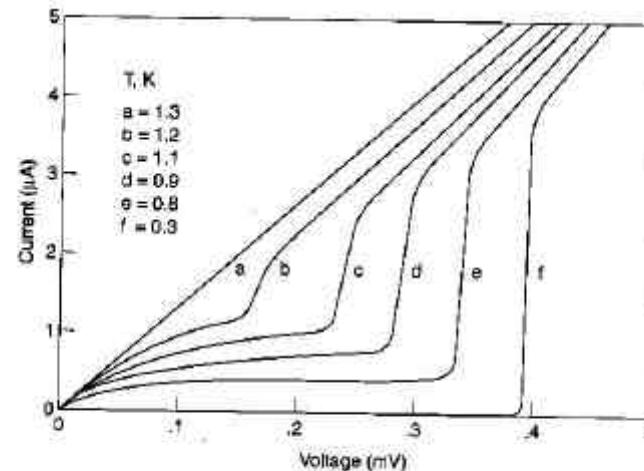


Fig. 13 Typical current-voltage characteristics of an Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Al superconductor-insulator-superconductor junction (only quasiparticle tunneling current is considered). The onset of the sharp break in the curves for  $T < T_c$  occurs when  $eV = 2\Delta(T)$ ; the critical temperature is  $T_c = 1.26$  K, and  $2\Delta_0/e = 0.379$  mV [from D. N. Langenberg, D. J. Scalapino and B. N. Taylor, Proc. IEEE 54, 560 (1966); copyright 1996 IEEE].

Dispositivi basati su superconduttori:  
bassa impedenza  $\rightarrow$  alta velocità  
basso voltaggio ( $2\Delta_0/e$ )  $\rightarrow$  basso consumo  
*(ma operazione a bassa T!!)*

Esempio: RSFQL devices  
(Rapid Single Flux Quantum Logic)

Prestazioni previste: 100 GHz, PetaFlops  
Limite alla miniaturizzazione: lungh. pen.  
(<100 nm per LTS, ~300 nm per HTS!!)

# Effetto Josephson e SQUID

## 0.4 Effetto Josephson

Se in una giunzione SIS si utilizza un film dielettrico di spessore nanometrico o subnanometrico, si osserva passaggio di corrente anche in assenza di polarizzazione. Questo effetto è noto come effetto Josephson, ed è alla base di numerosi dispositivi tra cui il più diffuso è lo SQUID (Supercond. Quantum Interf. Detector), usato per la rivelazione di debolissimi campi magnetici.

L'effetto Josephson è legato al tunneling di coppie di elettroni (coppie di Cooper), ed è quindi un fenomeno peculiare dei superconduttori. Le funzioni d'onda dei due superconduttori (1 e 2) possono essere scritte come:  $\Psi_1 = |\Psi_1| e^{iS_1}$  e  $\Psi_2 = |\Psi_2| e^{iS_2}$ . È ragionevole supporre che le funzioni d'onda "decadano" esponenzialmente dentro la barriera dielettrica, cioè che all'interno della barriera (supponiamo disposta lungo l'asse  $z$ ) si abbia:

$$\Psi(z) = \Psi_1 e^{-\beta z} + \Psi_2 e^{+\beta(z-b)}, \quad (5)$$

dove  $\beta$  caratterizza lo "smorzamento" della barriera, che si trova nell'intervallo  $z = 0, z \approx b$ .

Se si inserisce questa funzione d'onda nell'equazione della corrente (eq. 1) si ottiene, con po' di passaggi, che la corrente di tunneling  $I$  è proporzionale alla differenza di fase ( $S_2 - S_1$ ):

$$I = I_0 \sin(S_2 - S_1), \quad (6)$$

dove  $I_0$  dipende dalla costruzione della giunzione (geometria, materiali, etc.).

L'eq. (6) è l'elemento chiave per l'effetto Josephson in continua (dc), e, con ulteriori sviluppi, permette anche di interpretare alcuni peculiari comportamenti che si hanno quando la giunzione SIS è polarizzata, e danno luogo ad effetti in alternata (ac Josephson effect).

Da Grosso and Pastori P.,  
Solid State Physics  
(Academic Press, 2000)

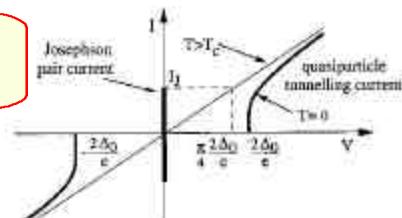


Fig. 21 Schematic representation of the direct current  $I$  -  $V$  characteristics (at  $T=0$ ) of a superconductor-insulator-superconductor junction displaying the Josephson current. For  $V=0$  a direct supercurrent can flow (up to a maximum value  $I_1$ ). For  $0 < V < 2\Delta_0/\beta$  an alternate supercurrent flows with frequency  $\omega = 2eV/\hbar$ , and no direct supercurrent is observed. For  $V > 2\Delta_0/\beta$  the quasiparticle tunneling current is reported.

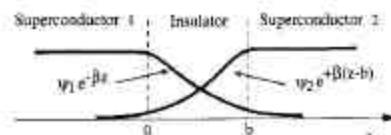


Fig. 22 Schematic representation of a junction between two superconductors separated by a thin insulating barrier of width  $b$ . The behavior of the order parameter wavefunction for the superconductor-insulator-superconductor junction is indicated.

## 0.5 SQUID

Se si considerano due semianelli di materiale superconduttore separati da due sottili strati di dielettrici (cioè un sistema ad asello chiuso con due giunzioni Josephson) si ottiene un dispositivo (SQUID) in cui la supercorrente è proporzionale ai quanti di flusso magnetico che tagliano la superficie (chiusa) dei due semianelli. Si noti che, mentre la fabbricazione di giunzioni SIS richiede solo l'abilità di depositare film sottili di isolanti tra due superconduttori, la realizzazione di uno SQUID richiede di definire lateralmente la geometria delle due giunzioni con una risoluzione spaziale a livello nanometrico.

Infatti, dette  $A$  e  $B$  le due giunzioni fra i materiali 1 e 2 (vedi figura), si ha per la eq. (6), dette  $\gamma_A = S(A_2) - S(A_1)$  e  $\gamma_B = S(B_2) - S(B_1)$ :

$$I = I_0(\sin(\gamma_A) + \sin(\gamma_B)) = 2I_0 \sin \frac{\gamma_A + \gamma_B}{2} \cos \frac{\gamma_A - \gamma_B}{2}. \quad (7)$$

D'altra parte, all'interno dell'anello la corrente  $\vec{j}$  deve essere nulla (effetto Meissner), per cui, come visto sopra, tenendo conto della eq. (1) si ha:

$$\hbar \vec{\nabla} S = \frac{2e}{c} \vec{A}.$$

Con alcune manipolazioni algebriche si ottiene allora:

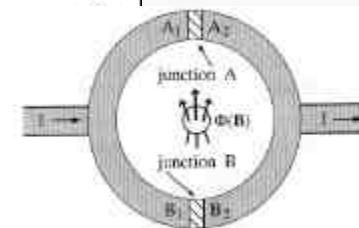
$$\gamma_A - \gamma_B = -2\pi \frac{\Phi(\vec{B})}{\Phi_0},$$

da cui:

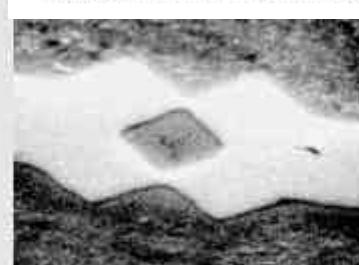
$$I = 2I_0 \cos \pi \frac{\Phi(\vec{B})}{\Phi_0} \sin \frac{\gamma_A + \gamma_B}{2},$$

dove  $\Phi_0 = hc/(2e)$  è il singolo quanto di flusso di campo magnetico nel sistema cgs (dell'ordine di  $10^{-7}$  G/cm<sup>2</sup>). La corrente presenta quindi delle oscillazioni in funzione di  $\Phi(\vec{B})$ , che permettono di distinguere singoli quanti di flusso magnetico. Per ottenere la massima sensibilità nella misura, conviene avere bassi valori di flusso. Questa circostanza induce alla miniaturizzazione degli anelli SQUID, spesso realizzati interponendo dei microbridge tra film di superconduttori.

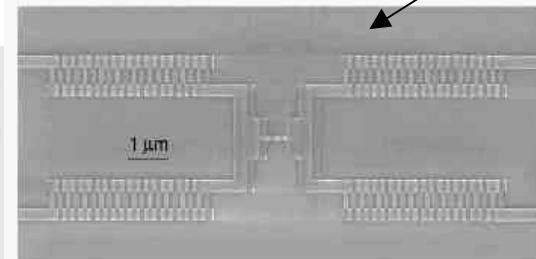
Infine, oltre all'uso come misuratori di deboli campi magnetici, gli SQUID possono costituire elementi base nell'operazione dei dispositivi RSFQL (rapid Single Flux Quantum Logic), dove l'informazione è associata ad un singolo quanto di flusso. Questa tecnologia, che promette altissime velocità di trattamento dati e densità di miniaturizzazione, condivide diversi aspetti sia con il Quantum Computing che con la cosiddetta Spintronica (elettronica in cui i livelli digitali sono associati allo stato quantistico del momento magnetico di una singola particella, es. l'elettrone).



Array of linear SQUIDS  
(Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Al)



SEM picture of a niobium nanobridge dc-SQUID with gated effective area. The inner dimensions of the SQUID ring (dark square in the center of the picture) are about 1x1  $\mu\text{m}^2$ .



Watanabe et al., PRL 86 5123 (2001)