Esercizio su incertezza della misura della resistenza di Thevenin

francesco.fuso@unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 1 - FF, 12 novembre 2015)

Queste poche righe presentano una possibile soluzione a un esercizio proposto agli studenti nella lezione del 23 Ottobre 2015. L'esercizio chiedeva di valutare *numericamente* l'incertezza relativa sulla misura della resistenza di Thevenin R_{Th} in funzione del valore della resistenza di carico R_L.

I. INTRODUZIONE

Nell'ambito dell'approccio di Thevenin, che consente di schematizzare un generatore di d.d.p. reale come un generatore ideale che produce una d.d.p. V_{Th} con in serie una resistenza R_{Th}, la caratterizzazione del generatore si fa seguendo una semplice ricetta: V_{Th} si misura "a circuito aperto", R_{Th} si deduce misurando la d.d.p. V_L ai capi di un carico resistivo R_L collegato al generatore.

Ci sono validi motivi che spingono a scegliere $R_L \sim R_{Th}$ allo scopo di aumentare la "sensibilità" della misura. Con questo esercizio vogliamoi verificare che tale scelta implica, nelle nostre condizioni di lavoro, di avere la minima incertezza di misura, ovvero di minimizzare $\Delta R_{Th}/R_{Th}$. Nello svolgimento si fa riferimento all'esperienza pratica di laboratorio: si suppone di impiegare il multimetro digitale in dotazione e di avere $V_{Th} = 5$ V e $R_{Th} = 20$ ohm (per il momento senza incertezze).

II. ESERCIZIO

La relazione che permette di determinare R_{Th} a partire dalle misure è

$$R_{Th} = R_L \frac{V_{Th} - V_L}{V_L} , \quad (1)$$

dove tutti i simboli sono stati già definiti. Questa equazione può essere riscritta come

$$\frac{R_{Th}}{R_L} = \xi = \frac{V_{Th} - V_L}{V_L} . \quad (2)$$

Per la legge di Ohm applicata alla serie $R_{Th} + R_L$ si ha anche

$$V_L = R_L \frac{V_{Th}}{R_L + R_{Th}} . \quad (3)$$

Lo scopo dell'esercizio è quello di trovare, in via numerica e quindi grafica (con Python), la dipendenza di $\Delta R_{Th}/R_{Th}$ dal valore di R_L. Naturalmente, vista la semplicità delle equazioni che governano l'esperimento, sarebbe possibile, e anche molto facile, trovare una soluzione analitica. Però lo scopo dell'esercizio è quello di individuare una via "numerica", possibilmente la "più numerica" possibile.

A. Uno svolgimento possibile

Io ho seguito questa strada. In primo luogo ho creato un array di valori di R_L, scegliendo un range "ragionevole" e rendendo i valori equispaziati logaritmicamente. Quindi ho determinato il corrispondente array V_L usando l'Eq. 3. Ho poi osservato che l'Eq. 1 prevede una dipendenza monotona (decrescente) di ξ con V_L.

Nella misura, V_L sarà compreso tra un minimo $V_{L,min} = V_L - \Delta V_L$ e un massimo $V_{L,max} = V_L + \Delta V_L$ a causa dell'incertezza di misura ΔV_L. Supponendo di usare il multimetro digitale, tale incertezza comprenderà (e, anzi, sarà spesso dominata da) un errore sistematico. Dunque non c'è alcun bisogno di operare statisticamente, cioè di creare valori casuali della misura V_L, e, come è facilmente comprensibile dal testo dell'esercizio, ci si può tranquillamente limitare a considerare la propagazione dell'errore *massimo*. Di conseguenza ho creato un array ΔV_L "simulando" l'impiego del multimetro digitale in scale che massimizzassero sempre il numero di cifre significative. Ho allora creato un ciclo di loop in cui ho letto i valori dell'array V_L prima creato, attribuendo il corretto errore ΔV_L come da manuale (ho sommato in quadratura errore di calibrazione e di lettura).

Quindi ho creato gli array $V_{L,max}$ e $V_{L,min}$ semplicemente sommando e sottraendo a V_L il ΔV_L appena determinato. Da questo ho prodotto due array, ξ_{min} e ξ_{max}, e determinato l'array di errore (massimo) $\xi_{err} = \xi_{max} - \xi_{min}$. Per come è costruita la ξ, si ha $\Delta R_{Th}/R_{Th} = \xi_{err}/\xi$, dove ξ è un array prodotto secondo Eq. 2. La Fig. 1 rappresenta (traccia blu) il risultato. Notate le discontinuità che corrispondono al "cambio di portata" che dovrebbe essere effettuato nella realtà per mantenere massima la significatività della misura (di V_L).

B. Ulteriori considerazioni

La procedura descritta tiene conto, in sostanziale accordo con il testo dell'esercizio, solo della propagazione dell'incertezza ΔV_L. Questa procedura conduce a una sottostima dell'errore (massimo) che si fa nella realtà, dove anche V_{Th} e R_L sono grandezze misurate, dunque affette da errore. Il contributo dovuto a ΔV_{Th} (che vale ± 0.04 V nelle condizioni dell'esperimento) può essere tenuto in conto nella determinazione di V_L secondo Eq. 3: è infatti sufficiente aggiungere ΔV_{Th} a $V_{L,max}$ e toglierlo a $V_{L,min}$ per simularne l'effetto. Il contributo di ΔR_L

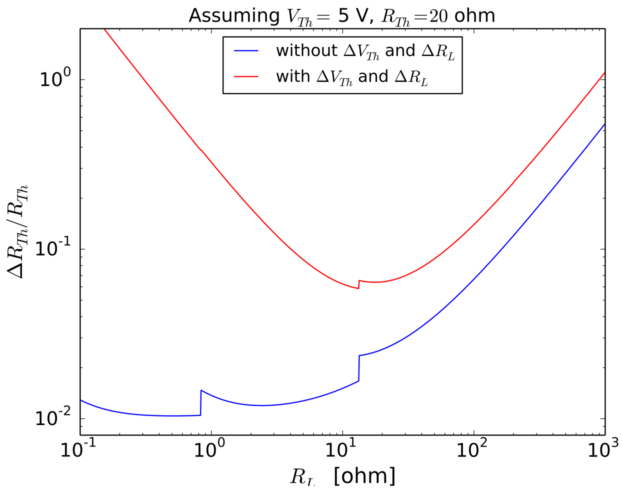

Figura 1. Incertezza relativa $\Delta R_{Th}/R_{Th}$ determinata come discusso nel testo, senza tenere conto o tenendo conto dei contributi elencati in legenda.

può essere tenuto in conto propagando l'errore relativo nell'Eq. 1: si vede facilmente che $\Delta R_L/R_L$ si somma a $\Delta R_{Th}/R_{Th}$ determinato prima. Non ha senso sforzarsi di considerare anche l'effetto dell'incertezza con la quale è stato determinato sperimentalmente il valore $R_{Th} = 20$ ohm usato nei calcoli, poiché esso deve essere preso come dato nominale (senza incertezza) se si vuole stimare l'errore stesso.

Il risultato di queste ulteriori aggiunte alla stima è riportato in Fig. 1 (traccia rossa): si vede che, per bassi valori di R_L, dove l'incertezza relativa sulla misura aumenta a causa del ridotto numero di cifre significative, si ha un marcato aumento di $\Delta R_{Th}/R_{Th}$.

Un paio di osservazioni conclusive:

- nel grafico si considerano anche valori molti piccoli di R_L: la misura di piccole resistenze con un ohmetro ordinario ("a due fili") è fortemente afflitta dalla presenza di resistenze di contatto (e anche dei fili stessi usati per collegarsi al resistore), che possono facilmente aggiungere un'ulteriore incertezza ΔR_L al di là del dato strumentale che abbiamo considerato;

- la procedura che veniva un tempo insegnata agli elettricisti, basata sul collegamento diretto di un amperometro all'uscita del generatore di Thevenin, non può e non deve essere seguita, poiché essa, oltre a mettere a rischio generatore e strumento, non permette di conoscere con la debita accuratezza R_L (i manuali riportano solo il valore nominale).