Minute della lezione/esercitazione del giorno 14 Dicembre 2010)

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/fuso/dida
(Dated: version 1 - FF, December 14, 2010)

Queste pagine riportano esercizi e discussioni fatte nella lezione del giorno 14 Dicembre 2010. Il testo contiene due diversi argomenti, che riguardano rispettivamente la forza di attrito viscoso e il comportamento di sistemi di molle. Il primo argomento non rientra tra quelli previsti esplicitamente per la prossima prova di verifica, mentre il secondo permette di svolgere esercizio sulla forza elastica, che sicuramente sarà parte della prossima prova.

I. FORZA DI ATTRITO VISCOSO

L'esempio più semplice di attrito viscoso riguarda il moto di un oggetto (ad esempio, solido) all'interno di un mezzo viscoso (ad esempio un fluido, cioè un liquido o un gas). Pur appartenendo alla categoria degli attriti "dinamici" (si ha attrito viscoso solo in presenza di movimento!), le sue caratteristiche e la sua formulazione sono ben diverse rispetto a quelle dell'attrito dovuto, ad esempio, allo strisciamento di un oggetto su una superficie (attrito dinamico propriamente detto).

La forza di attrito viscoso è caratterizzata dal coefficiente (di attrito viscoso) β che dipende sia dal mezzo in cui avviene il moto sia dalla geometria dell'oggetto che si muove, in particolare dalle dimensioni della "sezione maestra"; inoltre esso dipende anche dalle condizioni in cui avviene il moto, ad esempio temperatura e pressione, e dal grado di finitura superficiale dell'oggetto che si muove. L'espressione della forza di attrito è $\vec{F}_{AV} = -\beta\vec{v}$, da cui si vede che β ha le dimensioni di una forza su una velocità, cioè [massa]/[tempo]. Notate che, poiché la forza dipende linearmente dalla velocità, che ha la direzione dello spostamento, in virtù del segno negativo l'espressione è corretta dal punto di vista vettoriale, cioè esprime che la forza ha la stessa direzione e verso opposto allo spostamento, come deve essere per qualsiasi forma di attrito.

La dipendenza dalla velocità è specifica per questo tipo di forza di attrito e rende molto interessante la dinamica governata dall'attrito viscoso.

A. Equazione differenziale a variabili separabili

Immaginiamo di avere un oggetto di massa m che si muove all'interno di un mezzo viscoso e che, supponiamo, risente della *sola* forza di attrito viscoso. La sua equazione del moto è (prendiamo un caso unidimensionale con moto lungo l'asse X):

$$a = -\frac{F_{AV}}{m} = -\frac{\beta}{m}v \ , \tag{1}$$

dove β è il coefficiente di attrito nel caso considerato. L'equazione del moto sopra scritta è, come al solito, un'equazione differenziale del secondo ordine (l'accelerazione è la "derivata seconda" della posizione). Per la sua soluzione conviene però considerarla come un'equazione del primo ordine, cioè scrivendo l'accelerazione come "derivata al primo ordine" (rispetto al tempo) della velocità, ovvero

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t) \ . \tag{2}$$

La soluzione di questa equazione differenziale porterà alla funzione $v(t)$, cioè alla determinazione della *legge oraria della velocità*; una volta nota questa funzione, sarà possibile determinare la legge oraria del moto, $x(t)$ (ma questo obiettivo non verrà conseguito in questi appunti!).

L'equazione 2 ha la caratteristica di essere al primo ordine e di avere la funzione $v(t)$ al secondo membro: tale funzione compare "da sola", cioè non ci sono dipendenze esplicite dal tempo. Per questi motivi l'equazione si chiama *a variabili separabili.* Il significato di questa espressione può essere colto facendo un po' di algebra sull'espressione, che è anche necessaria per la soluzione. Il punto di partenza consiste nel riscrivere l'equazione 2 portando al primo membro il termine $v(t)$ (che va a dividere) e al secondo membro il termine dt, che va a moltiplicare[1]. Si ottiene così:

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{\beta}{m}dt \ . \tag{3}$$

La forma di questa equazione suggerisce il motivo per cui essa si dice a variabili separabili: infatti al primo membro compare la sola funzione $v(t)$, mentre la variabile t compare esplicitamente, in forma infinitesima, solo al secondo membro. L'equazione stabilisce un'uguaglianza fra grandezze infinitesime: sommando tante grandezze infinitesime tra loro al primo membro e altrettante al secondo membro l'uguaglianza deve ancora esistere. Poiché si intendono sommare delle grandezze inifinitesime, l'operazione corretta coinvolge l'uso dell'integrale e l'affermazione appena fatta dà luogo alla seguente uguaglianza tra integrali:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{\beta}{m}\int_{t_0}^{t} dt \ . \tag{4}$$

Si noti che, nell'esprimere gli integrali, è stato necessario indicare gli estremi di integrazione: infatti l'uguaglianza tra le somme vale solo se le somme stesse sono fatte sullo stesso "intervallo", cioè considerando addendi corrispondenti tra loro. Pertanto è necessario indicare da dove a dove si esegue la somma, che in termini matematici significa scrivere esplicitamente gli estremi di integrazione. Come è chiaro, il tempo si fa variare dall'istante t_0 all'istante t (generico); in corrispondenza, la velocità varia da v_0, che è quella che si misura all'istante t_0, a $v(t)$ misurata all'istante generico t.

Se ricordiamo qualche base di analisi matematica possiamo facilmente "calcolare" gli integrali: al primo membro avremo un logaritmo naturale, al secondo membro una semplice moltiplicazione per t, ovvero, tenendo in debito conto degli estremi di integrazione:

$$\ln(v(t)) - \ln(v_0) = \ln(\frac{v(t)}{v_0}) = -\frac{\beta}{m}(t - t_0) \ . \qquad (5)$$

L'uguaglianza espressa dall'equazione deve rimanere anche se si calcola l'esponenziale del primo e del secondo membro che, ricordando la definizione e le proprietà di logaritmo naturale, porta a:

$$v(t) = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}(t - t_0)) \ . \qquad (6)$$

[2]
Avendo quindi determinato completamente (inclusa la condizione iniziale, v_0) la $v(t)$, possiamo affermare di aver risolto l'equazione differenziale assegnata. Questo tipo di equazione differenziale è molto frequente in diversi fenomeni fisici, in genere in tutti quelli in cui è coinvolta dissipazione di energia. Ad esempio, la forma dell'equazione differenziale per la scarica di un condensatore è esattamente identica.

Avendo determinato l'andamento della funzione $v(t)$ è possibile ricavare la legge oraria del moto $x(t)$ risolvendo l'ulteriore equazione differenziale del primo ordine:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}(t - t_0)) \ . \qquad (7)$$

Tale equazione può essere risolta conoscendo le proprietà della funzione esponenziale, conducendo in tal modo a esprimere la legge oraria del moto. Tuttavia questo non è di interesse primario per la trattazione presente, in cui intendiamo invece studiare la funzione $v(t)$ che abbiamo determinato. L'andamento esponenziale con un segno negativo nell'esponente (notate che $\beta, m, (t - t_0)$ sono tutte grandezze positive) significa $v(t) = v_0$ e $v(t) \to 0$ per $t = t_0$ e $t \to \infty$, rispettivamente: infatti è noto che la funzione esponenziale decrescente tende *asintoticamente* a zero quando l'argomento tende a infinito. L'andamento decrescente è monotono e la funzione non presenta massimi o minimi locali.

È interessante notare che, dovendo l'argomento della funzione esponenziale essere un numero puro, la grandezza m/β deve avere le dimensioni di un tempo. Questo è ovviamente in accordo con il dimensionamento di β che abbiamo dato in precedenza. Possiamo dare un nome alla grandezza $\tau = m/\beta$: il nome è quello di *tempo di decadimento* (o di smorzamento, o di costante tempo caratteristica). Il significato fisico di questo tempo è che quando $t - t_0 = \tau$, allora $v(t - t_0 = \tau) = v_0 \exp(-1) = v_0/e$; ricordando che la base dei logaritmi naturali vale $e \sim 2.8$, si ha che τ è il tempo necessario perché la grandezza ($v(t)$, in questo caso) decada a un valore che è circa un terzo del valore iniziale. La Fig. 1 mostra l'andamento della funzione $v(t)$ per diverse scelte di $m/\beta = \tau$: maggiore è τ (dunque minore è β) e più è "lenta" la decrescita.

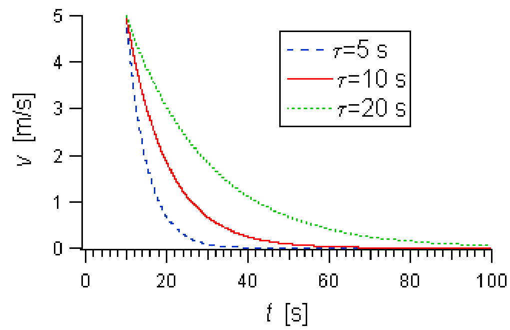

FIG. 1. Andamento della funzione $v(t)$ calcolata per $v_0 = 5.0$ m/s e per vari valori di τ, come indicato in legenda; nel grafico si è supposto $t_0 = 10$ s.

Vediamo infine di applicare quanto studiato a un semplice caso fisico: supponiamo allora di avere un oggetto di massa m che, all'istante $t_0 = 0$, ha la velocità v_0 ed entra in un mezzo viscoso con coefficiente β (sull'oggetto non agiscono altre forze all'infuori dell'attrito viscoso!). La legge oraria della velocità è $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$, con $\tau = m/\beta$: essa indica che la velocità decresce esponenzialmente con il tempo fino a tendere asintoticamente a zero, cioè l'oggetto tende a fermarsi. Il tempo necessario perché l'oggetto diminuisca sensibilmente la sua velocità è dell'ordine di τ, e pertanto è tanto minore quanto maggiore è il coefficiente di attrito viscoso β.

B. Velocità limite e discesa del paracadute

Un problema esemplare che serve a mostrare il ruolo che le forze di attrito hanno in situazioni relativamente comuni è la caduta di un oggetto sottoposto alla forza peso e alla forza di attrito viscoso. Questa è la situazione tipica di un omino appeso a un paracadute (ovvero di una goccia d'acqua o di grandine, e, come vedremo nel seguito del corso, di un elettrone che si muove in un metallo).

Scegliendo un asse verticale orientato verso il basso, l'equazione del moto si scrive:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\beta}{m}v(t) \ , \qquad (8)$$

che avrebbe la stessa forma della 3 se non fosse per il termine costante g, dovuto all'accelerazione di gravità.

Anche questa equazione, tuttavia, è a variabili separabili. Essa può infatti essere riscritta come:

$$\frac{dv(t)}{g - \frac{\beta}{m}v(t)} = dt \; . \tag{9}$$

L'integrazione del primo membro richiede un po' di lavoro algebrico in più rispetto al caso precedente. In particolare è opportuno eseguire un cambio di variabile: $g - \frac{\beta}{m}v(t) = \xi(t)$, dove la funzione $\xi(t)$ è tale che $d\xi(t)/dt = -(\beta/m)dv(t)/dt = -(dv(t)/dt)/\tau$, con $\tau = m/\beta$. Dall'uguaglianza fra le derivate temporali è facile rendersi conto che $dv(t) = -\tau d\xi(t)$ (in pratica abbiamo considerato le derivate come rapporti incrementali e uguagliato gli incrementi moltiplicati per le varie costanti).

In virtù di questi passaggi algebrici la 9 diventa:

$$\frac{d\xi(t)}{\xi(t)} = -\frac{1}{\tau}dt \; , \tag{10}$$

che ha proprio la forma di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e che quindi può essere integrata seguendo il metodo che abbiamo usato prima. Nell'integrare, poiché al primo membro la variabile è $\xi(t)$, occorrerà mettere come estremi di integrazione $\xi(t) = g - \frac{\beta}{m}v(t)$, che è il valore della funzione $\xi(t)$ all'istante t generico, e $\xi_0 = g - \frac{\beta}{m}v_0$, che è il valore della $\xi(t)$ all'istante t_0. Per semplificare ulteriormente il problema, possiamo davvero immaginare di trattare il problema del paracadutista e tenere conto che esso parte da fermo (da una certa altezza!) all'istante $t_0 = 0$ con velocità iniziale nulla, cioè con $v_0 = 0$. In queste condizioni si ha $\xi_0 = g$.

Integrando i due membri della 10 si trova: $\ln(\xi(t)/\xi_0) = -t/\tau$. Esponenziando i due membri si ha:

$$\xi(t) = g - \frac{v(t)}{\tau} = \xi_0 \exp(-t/\tau) = g \exp(-t/\tau) \; , \tag{11}$$

che, riordinata, recita:

$$v(t) = \tau g(1 - \exp(-t/\tau) = \frac{mg}{\beta}(1 - \exp(-t/\tau) \; . \tag{12}$$

La legge oraria della velocità così ottenuta è soluzione dell'equazione differenziale di partenza. Il suo andamento temporale è rappresentato in Fig. 2: il valore di $v(t)$, che all'istante $t_0 = 0$ è nullo (il paracadutista parte da fermo), aumenta fino a raggiungere asintoticamente il valore *limite* $v_{lim} = \tau g = mg/\beta$. Dunque il paracadutista, a patto di far trascorrere abbastanza tempo per il processo di caduta (che significa a patto di partire da una certa quota), raggiunge asintoticamente una velocità limite che è tanto più bassa tanto più alto è β; poiché β dipende dall'area dell'oggetto che si muove nel fluido viscoso (l'aria, in questo caso), aumentando con l'area, si capisce perché i paracadute abbiano la canonica forma!

Notate che esistenza e valore della velocità limite possono essere dedotte a prescindere dalla soluzione dell'equazione differenziale. Infatti la 8 ci dice che può esistere un istante, quello in cui $v(t) = mg/\beta$, in cui l'accelerazione si annulla. A partire da questo istante la velocità non può più modificarsi, essendo nulla l'accelerazione, e questo comporta che l'accelerazione resti nulla. Questa velocità è proprio quella limite del processo secondo quanto abbiamo appena dimostrato.

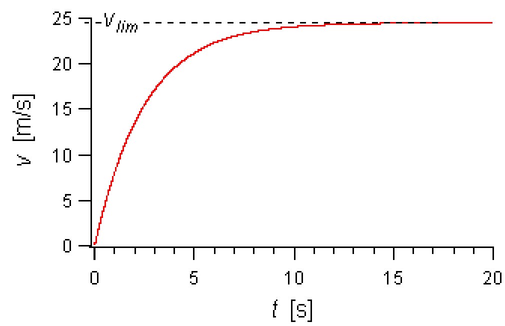

FIG. 2. Andamento della funzione $v(t)$ calcolata supponendo $m = 50$ kg e $\beta = 5.0$ kg/s; nel calcolo si è supposto $t_0 = 0$ e $v_0 = 0$, secondo quanto discusso nel testo.

II. SISTEMI DI MOLLE

Riprendiamo l'argomento che riguarda il comportamento di "sistemi" di molle esaminando esercizi in cui due molle agiscono su uno stesso punto materiale. La settimana scorsa si dimostrò che, per una massa m agganciata a due molle i cui estremi sono vincolati a muretti collocati in posizioni opposte alla massa (caso unidimensionale, moto lungo la direzione orizzontale), si ha moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, essendo k_1 e k_2 le costanti elastiche delle due molle. Questo risultato si può interpretare dicendo che il sistema delle due molle si comporta come un'unica molla con costante elastica "efficace" $k_{tot} = k_1 + k_2$ e la scorsa settimana si accennò al fatto che tale situazione corrisponde a configurare le due molle come se fossero in "parallelo" fra loro.

Qui vogliamo verificare questa affermazione, considerare configurazioni "in parallelo" e "in serie" e, inoltre, fare un po' di esercizio su argomenti di dinamica con molle in previsione della prova di verifica in itinere.

A. Molle in parallelo

Supponiamo di avere due molle (ovviamente di massa trascurabile) che hanno costanti elastiche k_A e k_B e lunghezze di riposo l_{0A} e l_{0B}, rispettivamente. Si ricorda che questi parametri sono quelli costruttivi delle molle considerate, e dunque dipendono dalla loro costruzione e non da come esse vengono usate. Immaginiamo che le due molle siano disposte su un piano verticale come rappresentato in Fig. 3(a). In particolare, i due estremi "in alto" delle molle sono agganciati saldamente allo stesso solaio rigido e indeformabile, e i due estremi "in basso" agiscono su un'unica massa puntiforme m. Notate che, con qualche sistema di guide e vincoli, si fa in modo che *entrambe le molle abbiano sempre la stessa lunghezza*. In altre parole, il moto della massa m viene vincolato in modo da avvenire solo lungo la direzione verticale (naturalmente vincoli e quant'altro non fanno attrito e hanno massa trascurabile, come per ogni buon esercizio di fisica generale, e le loro forze hanno direzione orizzontale, e quindi non ci interessano ai fini della soluzione che stiamo cercando...).

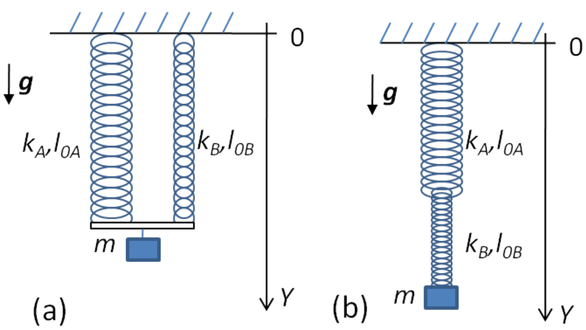

FIG. 3. Rappresentazione dei sistemi di molle in parallelo (a) e in serie (b) discussi nel testo. I disegni vanno ovviamente intesi come schematici e non in scala.

Scegliamo il riferimento indicato in figura come asse Y: esso è verticale, orientato verso il basso e centrato sul solaio. Indicheremo con y la coordinata (generica) della massa m rispetto a tale asse: possiamo supporre che y rappresenti anche la lunghezza (comune) delle due molle[3].

Notiamo che la configurazione realizzata è ben descritta dalla definizione di molle "in parallelo" e osserviamo che nella nostra costruzione, o modello, del sistema abbiamo posto una grandezza in comune tra le due molle, cioè la loro lunghezza che deve essere sempre la stessa per le due molle.

Consideriamo le forze che agiscono sulla massa m, limitandoci a quelle che hanno componente verticale (la direzione verticale è, come abbiamo affermato, quella rilevante per la dinamica). Sulla massa agiscono: la forza peso $m\vec{g}$ e la *somma* delle due forze elastiche. Notate che, in un sistema realistico, le due forze elastiche agiscono su punti differenti, però, supponendo che i vincoli funzionino impedendo ogni moto che non sia verticale (traslazionale!), possiamo tranquillamente sommare (vettorialmente) le due forze elastiche create dalle due molle per studiarne l'effetto complessivo. Inoltre per ognuna delle due molle si ha: $|\vec{F}_{ela,i}| = k_A(y - l_{0i})$, con i indice che vale A o B a seconda della molla considerata, dove si è supposto che le molle siano elongate rispetto alla lunghezza di riposo (altrimenti il segno della differenza tra coordinata e lunghezza a riposo potrebbe essere negativo, mentre il modulo di una forza deve essere per forza positivo!).

Scriviamo l'equazione del moto rispetto al riferimento considerato. Notando che la forza peso punta nel verso positivo dell'asse che vogliamo usare, e che sulla massa agisce la somma delle forze elastiche delle due molle A e B, si ha:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = g - \frac{k_A}{m}(y(t) - l_{0A}) - \frac{k_B}{m}(y(t) - l_{0B}) \; , \quad (13)$$

dove abbiamo correttamente considerato che, nel caso in cui la lunghezza delle molle sia maggiore della propria lunghezza di riposo, la forza elastica tende verso l'alto e quindi ha un segno negativo (occhio a controllare sempre!). Se raggruppiamo i termini costanti nell'equazione, possiamo scrivere:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{k_A + k_B}{m} y(t) + B \; , \quad (14)$$

con:

$$B = g + \frac{k_A l_{0A} + k_B l_{0B}}{m} \; . \quad (15)$$

L'equazione 14 ha chiaramente la forma dell'equazione del moto armonico. Dunque il moto è armonico e la sua pulsazione si trova estraendo la radice quadrata del termine (positivo, poi c'è un segno meno davanti) che moltiplica la funzione $y(t)$ al secondo membro, cioè: $\omega = \sqrt{(k_A + k_B)/m}$. Si vede chiaramente che, come nel caso della scorsa settimana, la costante elastica equivalente è $k_{tot} = k_A + k_B$[4].

Vediamo ora di rispondere ad alcune domande specifiche che si possono fare su questo problema:

1. Quanto vale la quota di equilibrio y_{eq}?

2. Supponendo che inizialmente la massa si trovi nella posizione $y_0 \neq y_{eq}$ e che da qui all'istante $t_0 = 0$ venga lasciata andare libera di muoversi con velocità iniziale nulla, come si scrive la legge oraria del moto $y(t)$?

3. In quale istante t_1 la massa ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio e quanto vale la sua velocità v_1 in questo istante?

La posizione di equilibrio è, per definizione, quella in cui $a = 0$. Imponendo $a = 0$ nella 14 si ottiene: $y_{eq} = mB/(k_A + k_B)$, ovvero, esplicitando B: $y_{eq} = mg/(k_A + k_B) + (k_A l_{0A} + k_B l_{0B})/(k_A + k_B)$: da un rapido controllo si vede che le dimensioni tornano (almeno quelle!). Inoltre nel caso (semplice) in cui le due molle siano identiche fra loro, entrambe con costante elastica k e lunghezza di riposo l_0, esce $y_{eq} = l_0 + mg/(2k)$, che è la posizione di equilibrio attesa per una molla di costante elastica efficace $2k$ e lunghezza di riposo $l_0 = l_{0A} = l_{0B}$.

Per scrivere la legge oraria occorre: (i) notare che, come già sottolineato, il moto è armonico; (ii) usare in modo opportuno le condizioni iniziali del problema date nel testo. Vista la forma della 14, il moto è armonico, cioè la massa compie delle oscillazioni armoniche che avvengono *attorno alla posizione di equilibrio* y_{eq} (che non ha coordinata nulla come in qualche altro esercizio che abbiamo visto assieme). Come abbiamo dimostrato trattando la cinematica del moto armonico, l'espressione generale della legge oraria è: $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + y_{eq}$, con, in questo specifico caso e come abbiamo già osservato, $\omega = \sqrt{(k_A + k_B)/m}$; A e Φ sono dei coefficienti costanti (opportunamente dimensionati) che vanno scelti sulla base delle condizioni iniziali.

Per stabilire i valori di A e Φ conviene prima di tutto ricordarsi (o ricavarsi) la forma generale della legge oraria della velocità, che recita: $v(t) = dy(t)/dt = -\omega A\sin(\omega t + \Phi)$ (il termine costante, ovvero la posizione di equilibrio, che è anche detto soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea, non contribuisce alla derivata). A questo punto sappiamo che A e Φ devono essere tali che le leggi orarie soddisfino le condizioni iniziali, cioè, posto $t_0 = 0$, deve essere:

$$y(t = t_0 = 0) = A\cos(\Phi) + y_{eq} = y_0 \qquad (16)$$

$$v(t = t_0 = 0) = -\omega A\sin(\Phi) = 0\ . \qquad (17)$$

Si ottiene dunque un sistema di due equazioni (trascendentali, dato che ci sono seni e coseni) la cui soluzione fornisce i valori cercati. Conviene partire dalla seconda delle due equazioni, quella che al secondo membro ha uno zero. Si vede subito, infatti, che affinché l'uguaglianza possa essere soddisfatta occorre $\Phi = 0$. Infatti ω è sicuramente diverso da zero, mentre la soluzione $A = 0$ indica che non c'è oscillazione (si ritrova la soluzione particolare già citata prima, cioè la massa rimane in equilibrio). Notate poi che la condizione iniziale è soddisfatta anche per $\Phi = n\pi$, con n intero, ma, per evitare complicazioni (non significative dal punto di vista fisico) possiamo scegliere la prima di queste soluzioni, che è, appunto, $\Phi = 0$. Usando questo risultato nella prima delle due equazioni si ottiene $A = y_0 - y_{eq}$.

Avendo determinato i valori di A e Φ che soddisfano le condizioni iniziali, è finalmente possibile scrivere la legge oraria del moto:

$$y(t) = (y_0 - y_{eq})\cos(\omega t) + y_{eq}\ , \qquad (18)$$

la quale stabilisce, come atteso, che il moto è descritto da un'oscillazione armonica (ovviamente periodica) attorno alla posizione di equilibrio con semi-ampiezza pari ad A.

Per rispondere all'ultima delle domande dell'esercizio occorre in linea di principio determinare l'istante t_1 che soddisfa l'equazione $y(t_1) = y_{eq}$ (questa equazione ha infinite soluzioni, essendo il moto periodico: noi sceglieremo la "prima", cioè quella che dà il valore minore). Per non sapere nè leggere né scrivere, vediamo che dobbiamo risolvere l'equazione:

$$y(t_1) = (y_0 - y_{eq})\cos(\omega t_1) + y_{eq} = y_{eq}\ . \qquad (19)$$

Dobbiamo dunque determinare l'istante t_1 tale che il coseno si annulla (per la prima volta); questo si verifica quando l'argomento del coseno vale $\pi/2$, cioè per $t_1 = \pi/(2\omega)$. Ricordando che, come abbiamo dimostrato, il periodo T è $T = 2\pi/\omega$, si vede che $t_1 = T/4$, cioè, esplicitando ω, $t_1 = (\pi/2)\sqrt{m/(k_A + k_B)}$. A questo risultato si poteva arrivare in modo pressochè immediato notando che, dato che la massa parte da ferma dalla posizione più distante da quella di equilibrio, occorre un quarto del periodo affinché passi per la prima volta attraverso la posizione di equilibrio. Fate un rapido controllino per verificare che le dimensioni tornino!

Infine, la velocità v_1 si può calcolare dalla legge oraria della velocità: $v_1 = -\omega(y_0 - y_{eq})\sin(\omega t_1) = -\omega(y_0 - y_{eq})\sin(\pi/2) = -\omega(y_0 - y_{eq})$. Anche qui ci sta bene un controllino per verificare le dimensioni!

B. Molle in serie

Immaginiamo ora di avere le due molle di prima disposte "in serie" (sempre su un piano verticale), cioè con la prima attaccata al solaio e la seconda, al cui estremo si trova la massa m, attaccata all'estremità della prima (non so se si capisce: guardate la Fig. 3(b)).

Anche qui cominciamo con lo scrivere l'equazione del moto, sempre usando un riferimento verticale, puntato verso il basso e centrato sul solaio (vedi figura). Il diagramma delle forze mostra che sulla massa agiscono la forza peso e la *sola* forza elastica della molla B, cioè $a = -(k_B/m)(l_B - l_{0B}) + g$, dove l_B indica la lunghezza della molla B. Notate che questa espressione fa tornare i segni come si deve: infatti (trascuriamo per il momento la forza peso) se la molla è estesa (la sua lunghezza è maggiore di quella di riposo, cioè $l_B - l_{0B} > 0$) l'accelerazione risulta negativa, cioè diretta verso l'alto, come si deve, e viceversa se la molla è compressa. Osserviamo che la coordinata della massa è data da $y = l_A + l_B$; per andare avanti, dobbiamo in qualche modo legare l_A a l_B ed esprimere y di conseguenza.

Analizziamo cosa succede sul punto di giunzione fra le due molle e, per chiarire le idee, immaginiamo di farlo quando il sistema si trova all'equilibrio: su questo punto sono applicate due forze, una (che punta verso il basso) dovuta alla molla B e l'altra (che punta verso l'alto) dovuta alla molla A. In condizioni di equilibrio queste due forze devono essere uguali e opposte, dato che il punto in questione non deve muoversi. Possiamo tranquillamente immaginare che l'uguaglianza sussista anche in condizioni dinamiche, di non equilibrio, per cui avremo sempre che *le forze elastiche delle due molle sono uguali fra loro*, cioè, scrivendo un'equazione per i moduli delle forze: $k_A(l_A - l_{0A}) = k_B(l_B - l_{0B})$.

Da questa equazione possiamo determinare il legame matematico tra le lunghezze delle molle che andavamo cercando: l'algebra ci dice infatti che $l_A = l_{0A} + (k_B/k_A)(l_B - l_{0B})$. Unendo questa equazione con le precedenti, si ottiene che la coordinata generica della massa si può scrivere come $y = l_A + l_B = l_{0A} + (k_B/k_A)(l_B - l_{0B}) + l_B = (1 + k_B/k_A)l_B + l_{0A} - (k_B/k_A)l_{0B}$.

A questo punto possiamo "invertire" questa equazione esprimendo la lunghezza della molla l_B in funzione della coordinata y[5]: si ottiene $l_B = (k_A y - k_A l_{0A} + k_B l_{0B})/(k_A + k_B)$. Ricordate che qualche rigo sopra avevamo scritto: $a = -(k_B/m)(l_B - l_{0B}) + g$. Ora, sostituendo in l_B l'espressione appena determinata, abbiamo una buona scrittura per l'equazione del moto in funzione della coordinata generica $y(t)$, che risulta:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = && (20)\\
&= -\frac{k_B}{m}(\frac{k_A y(t) - k_A l_{0A} + k_B l_{0B}}{k_A + k_B} - l_{0B}) + g = && (21)\\
&= -\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)} y(t) + [\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)}(l_{0A} + l_{0B}) + g] && (22)\\
&= -\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)} y(t) + C\ , && (23)
\end{aligned}
$$

avendo indicato con la costante C i termini (costanti!) che compaiono fra parentesi quadre.

È evidente che anche in questo caso abbiamo scritto un'equazione del moto che ha la forma dell'equazione del moto armonico; dunque il moto è armonico con pulsazione, stavolta, $\omega = \sqrt{\frac{k_A k_B}{m(k_A+k_B)}}$, cioè le due molle in serie si comportano come un'unica molla con costante elastica equivalente $k_{tot} = \frac{k_A k_B}{k_A+k_B}$. Da questa espressione si capisce che, nel caso di molle in serie, si sommano i reciproci delle costanti elastiche, cioè $1/k_{tot} = 1/k_A + 1/k_B$.

Anche per questo problema possiamo rispondere ad alcune domande specifiche, simili (ma non identiche, state attenti!) a quelle proposte nel caso precedente:

1. Quanto vale la quota di equilibrio y_{eq}?

2. Supponendo di sapere che all'istante $t_0 = 0$ la massa *passa* per la posizione di equilibrio avendo una velocità $v_0 \neq 0$, come si scrive la legge oraria del moto $y(t)$?

3. In quale istante t_1 la massa si ferma istantaneamente (per la prima volta)?

Alla prima domanda si risponde imponendo $a = 0$ nella 20: si ottiene $y_{eq} = Cm\frac{k_A+k_B}{k_A k_B}$, con C termine costante esplicitato sopra.

Per quanto riguarda la legge oraria del moto, anche in questo caso, trattandosi di moto armonico, la legge ha la forma $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + y_{eq}$, con ω e y_{eq} determinati prima e A e Φ da aggiustare secondo le condizioni iniziali. Qui le condizioni iniziali sono diverse da prima: si ha infatti $y(t = t_0 = 0) = A\cos(\Phi) + y_{eq} = y_{eq}$, cioè, semplificando, $A\cos(\Phi) = 0$, e $v(t = t_0 = 0) = -\omega A \sin(\Phi) = v_0$. Dalla prima condizione si ricava $\Phi = \pi/2$ (si prende solo la "prima" soluzione valida) che, inserito nella seconda, permette di determinare $A = -v_0/\omega$. La legge oraria specifica per questo problema è dunque: $y(t) = -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \pi/2) + y_{eq} = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + y_{eq}$, dove abbiamo usato una nota relazione fra grandezze trigonometriche di angoli complementari.

La risposta all'ultima domanda può essere affrontata come prima, ovvero usando la legge oraria della velocità e trovando l'istante (il primo istante) in cui essa si annulla. Si può però anche prendere una scorciatoia e notare che l'istante di arresto (temporaneo) è quello in cui la massa raggiunge l'estremo del segmento all'interno del quale oscilla, cioè il punto di inversione del moto (si tratta nello specifico del punto che si trova in coordinata $y_1 = \frac{v_0}{\omega} + y_{eq}$). Se pensate alle caratteristiche del moto armonico, potete facilmente rendervi conto che l'istante richiesto si ha dopo un intervallo di tempo da t_0, istante in cui la massa passa per la posizione di equilibrio, pari a un quarto del periodo. Si ha quindi $t_1 = T/4 = \pi/(2\omega)$, con ω determinato prima.

---

[1] Si potrebbe opinare che questa operazione non sia del tutto lecita avendo a che fare con degli infinitesimi. Nei problemi che ci apprestiamo a risolvere dt va inteso come un termine quantitativamente piccolo (indefinitamente piccolo), ma pur sempre diverso da zero.

[2] La scrittura exp indica una elevazione alla potenza indicata nell'argomento del numero di Neper e, base dei logaritmi naturali.

[3] Questa affermazione richiede a rigore che la massa sia puntiforme e che l'elemento elastico abbia l'intera lunghezza della molla, cioè che la molla non termini con dei tratti non elastici, ma rigidi, come di solito avviene. In ogni caso, anche se così non fosse non ci sarebbe alcuna differenza significativa nei risultati, dato che la lunghezza dell'elemento elastico sarebbe legata alla y attraverso una somma o differenza con una costante.

[4] Occhio! Questo B è diverso da quello di prima!.

[5] Per intuire che anche nel problema della scorsa settimana le molle erano in parallelo, immaginate che i muretti fossero tutti e due dalla stessa parte...

[6] Sono sicuro che esiste una strada più diretta, ma questa è quella che mi viene in mente, mi scuso per i tanti passaggi, che comunque mi sembrano tutti facili facili.