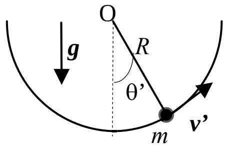
Corso di Laurea CIA – ESAME SPECIALISSIMO DI FISICA GENERALE I – 29/10/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

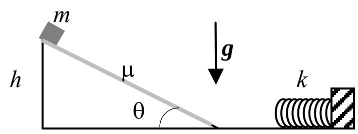
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Un piccolo oggetto di massa m = 10 g percorre un "giro della morte" essendo guidato da una guida circolare di raggio R = 20 cm fatta di un materiale rigido e indeformabile e fissa su un piano verticale. Si sa che l'oggetto, quando passa per la posizione indicata in figura (l'angolo vale θ' = π/6; la figura riporta solo mezza circonferenza) si muove a velocità tangenziale di modulo v' = 4.0 m/s. [Trascurate ogni forma di attrito; usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]
   a) Quanto valgono, **in modulo**, l'accelerazione **tangenziale** a_T' e l'accelerazione **radiale** a_R' a cui è sottoposto l'oggetto quando passa per la posizione θ'? [Per accelerazione tangenziale si intende ovviamente la componente dell'accelerazione dell'oggetto in direzione tangenziale; analogamente per la direzione radiale; per la seconda domanda ricordate che l'oggetto percorre un'orbita **circolare**!]
   a_T' = …………………………………… = ... m/s^2 $g sin\theta$ = 4.9 m/s^2 [le uniche forze che agiscono sull'oggetto sono la forza peso, verticale, e la forza di reazione vincolare esercitata dalla guida. Questa, dovendo essere ortogonale alla guida stessa, ha direzione radiale e dunque non ha componenti in direzione tangenziale. Quindi in direzione tangenziale agisce solo la componete tangenziale della forza peso, da cui, applicando il principio di Newton, il risultato]
   a_R' = …………………………………… = ... m/s^2 v'^2/R = 4.0x10^2 m/s^2 [poiché l'oggetto percorre un'orbita circolare, su di esso deve agire l'accelerazione centripeta, che ha proprio direzione radiale. Da qui, ricordando l'espressione per l'accelerazione centripeta, il risultato]

   b) Quanto vale, **in modulo**, la forza di reazione vincolare F_N' esercitata dalla guida sull'oggetto quando esso passa per la posizione θ'?
   F_N' = …………………………………… ~ .... N $mv'^2/R + mgcos\theta$ ~ 4.1 N [la reazione vincolare e la componente radiale della forza peso devono concorrere a fornire all'oggetto la necessaria accelerazione centripeta, cioè la necessaria accelerazione radiale determinata sopra. Deve quindi essere $ma_R' = F_N - mgcos\theta$, dove i segni tengono conto della diversa orientazione della forza di reazione vincolare (centripeta) e della componente radiale della forza peso (centrifuga, cioè orientata verso l'esterno della circonferenza). Da qui e usando la risposta al quesito precedente esce la soluzione]

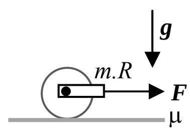
   c) Sulla base dei dati del problema, riuscite ad affermare che l'oggetto percorre "effettivamente" e per intero il giro della morte, senza cadere al suolo neanche nel punto più in alto della circonferenza? Discutete per benino in brutta.
   Discussione: …………………………………. Affinché un oggetto percorra per intero un giro della morte occorre che esso abbia una sufficiente velocità di percorrenza quando raggiunge la sommità dell'orbita. Infatti nel punto più alto dell'orbita, supponendo che la reazione vincolare si riduca fino ad annullarsi, la forza peso da sola crea un'accelerazione centripeta, cioè $a_C = v^2/R = g$., da cui si deduce che la velocità minima dell'oggetto deve essere $v_{MIN} = (gR)^{1/2}$. Supponendo trascurabile ogni forma di attrito, la velocità che il nostro oggetto assume quando arriva alla sommità della circonferenza (se ci arriva) è data dal principio di bilancio energetico, o conservazione dell'energia meccanica: $(m/2)v^2-(m/2)v'^2+mg\Delta = 0$, essendo Δ la differenza di quota tra altezza massima e altezza quando l'oggetto passa per la posizione θ'. La trigonometria suggerisce $\Delta = R(1+cos\theta')$, da cui $v^2 = v'^2 - 2gR(1+cos\theta)$. Tenendo conto dei dati del problema si ottiene $v \sim$ 3 m/s, superiore al valore minimo determinato sopra, che numericamente è $v_{MIN} \sim$ 1.4 m/s. Quindi l'oggetto percorre effettivamente il giro della morte per intero.



2. Una cassa di massa m = 10 kg (da considerare puntiforme!) si trova inizialmente ferma sulla sommità di un piano inclinato di altezza h = 5.0 m che forma un angolo θ = π/6 rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è **scabro** e presenta attrito dinamico con coefficiente μ = 0.20. Alla base del piano inclinato c'è un tratto orizzontale **liscio** (di attrito trascurabile) in cui è presente un respingente costituito da una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 1.0x10^3 N/m, un cui estremo è vincolato a un muretto verticale come rappresentato in figura. A un dato istante la cassa viene lasciata libera di scendere lungo il piano inclinato fino ad arrivare al respingente, dove schiaccia l'estremità libera della molla, comprimendola. [Trascurate ogni forma di attrito che non sia quello dinamico esercitato dal piano inclinato sulla cassa; usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]
   a) Quanto vale la compressione massima Δ subita dalla molla? [Determinate la compressione in valore assoluto, senza preoccuparvi dei segni]
   Δ = …………………………………… ~ .... m $(2(mgh/k)(1-\mu/tg\theta))^{1/2}$ ~ 0.93 m [per il bilancio energetico, deve essere $L = \Delta E_K+\Delta U$. Poiché la massa è ferma sia all'inizio di tutto il processo che quando si raggiunge la massima compressione della molla, si ha ΔE_K = 0. Le forze conservative che agiscono nel problema sono la forza peso, la cui variazione di energia potenziale è $\Delta U_G = -mgh$, e la forza elastica della molla, la cui variazione di energia potenziale è $\Delta U_{ELA}=(k/2)\Delta^2$ (la molla si trova ovviamente in condizioni di riposo prima che la cassa arrivi sul respingente, per cui inizialmente non c'è energia elastica nella molla). Il lavoro L da considerare in questa espressione è quello della forza di attrito, $F_A = \mu N = \mu mgcos\theta$. La forza di attrito è costante e uniforme durante la discesa della cassa ed è sempre diretta come lo spostamento (in verso opposto!). Quindi il lavoro si determina semplicemente moltiplicando la forza per lo spostamento, che è pari alla lunghezza del piano inclinato, $h/sin\theta$, ricordandosi di mettere il segno giusto (negativo). Si ha quindi $L = -mg\mu cos\theta h/sin\theta = -mg\mu h/tg\theta$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt che trascorre da quando la cassa arriva sul respingente, iniziando a comprimere la molla, a quando la molla raggiunge la massima compressione? [Notate che, ovviamente, prima che la cassa arrivi sul respingente la molla è alla sua lunghezza di riposo]
   Δt = …………………………………… ~ .... s $T/4 = \pi(m/k)^{1/2}/2$ ~ 0.16 s [il moto di compressione della molla è un moto armonico, dato che avviene sotto l'azione di una forza elastica. La pulsazione di tale moto armonico è $\omega = (k/m)^{1/2}$, come si può facilmente verificare scrivendo l'equazione del moto: $a = -(k/m)\Delta x$, con Δx spostamento dalla posizione di riposo (che è anche la posizione di equilibrio). Nota la pulsazione, si ha che il periodo dell'oscillazione è $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$. Affinché la molla passi dalla posizione di riposo a quella di massima compressione occorre un tempo pari a un quarto del periodo, da cui la soluzione]

   c) Dopo aver schiacciato la molla del respingente fino alla sua massima compressione, la cassa viene respinta, risalendo quindi lungo il piano inclinato. Discutete per benino, in brutta, se essa risale fino alla posizione di partenza (la sommità del piano) o no, determinando l'altezza massima h' (sul piano inclinato) raggiunta dalla cassa nel suo moto "di ritorno". [Immaginate trascurabile l'effetto dell'attrito statico]
   Discussione: ………………………… Evidentemente la cassa non ritorna al punto di partenza a causa della presenza di una forza dissipativa, l'attrito dinamico, che agisce sia quando la cassa scende che quando risale lungo il piano. Infatti, considerando in questo caso come istante "finale" del processo considerato quello in cui la cassa si ferma dopo essere risalita sul piano, il principio di bilancio energetico, già introdotto nella risposta precedente, stabilisce che $L_A = \Delta U_G = mg(h'-h)$, dove abbiamo considerato che la cassa è ferma sia all'inizio che alla fine e la molla è in posizione di riposo sia all'inizio che alla fine. Poiché è sicuramente $L_A<0$ (il lavoro della forza di attrito è semopre negativo!), è di sicuro $h'<h$.
   h'= …………………………………… = ... m $h(tg\theta-\mu)/(tg\theta+\mu)$ = 1.2 m [per il calcolo usiamo proprio il bilancio energetico nella forma appena scritta, notando che, come già dimostrato nella risposta al quesito b), si può scrivere $L_A = -mg\mu(h+h')/tg\theta$, dove abbiamo usato la circostanza che il lavoro della forza di attrito è sempre negativo a prescindere dal verso del moto (la forza è sempre opposta allo spostamento). Uguagliando il lavoro con la variazione di energia potenziale gravitazionale si ottiene $-\mu(h+h')/tg\theta=h'-h$, da cui la soluzione]



3. Una ruota è costituita da un cilindro pieno di materiale **omogeneo e uniforme**, con raggio R = 10 cm e massa m = 2.0 kg. Questa ruota è appoggiata su una superficie orizzontale piana (la strada!) dove inizialmente, all'istante t_0=0, si trova ferma. A partire da questo istante, la ruota è sottoposta all'azione di una forza esterna $\boldsymbol{F}$ diretta orizzontalmente (come in figura) e applicata all'asse della ruota grazie a un giogo di massa trascurabile. La forza $\boldsymbol{F}$ è costante e uniforme, e il suo modulo vale

F = 10 N. Inoltre si sa che la strada è scabra e ha un coefficiente di attrito statico μ = 0.50. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e trascurate ogni forza di attrito eccetto quella tra strada e superficie della ruota]

a) Ad un certo istante, ad esempio a t'=1.0 s, si esegue un'osservazione sperimentale e si nota che la ruota rotola **senza strisciare** (moto di rotolamento puro). Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della forza di attrito F_A che la strada esercita sulla ruota? [Sfruttate in modo opportuno la circostanza, enunciata nel testo, di moto di rotolamento puro e **verificate in brutta** che il moto possa essere effettivamente di rotolamento puro!]

F_A = …………………..…………………… = ………… N $F/3$ = 3.3 N [il moto di rotolamento puro è "composto" da un moto di traslazione del centro di massa e da un moto di rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa. Assumendo un riferimento orizzontale orientato come la forza ***F*** **,** l'equazione del moto del centro di massa si scrive: $a_{CM} = (F-F_A)/m$. Il moto di rotazione è dovuto alla forza di attrito, che è l'unica, tra quelle agenti sulla ruota, che ha braccio non nullo rispetto al polo di rotazione (il centro di massa). L'equazione del moto di rotazione, indicando con α l'accelerazione angolare, recita allora: $\alpha = F_A R/I$, con I momento di inerzia del cilindro (è $I = mR^2/2$ per un cilindro pieno e omogeneo, come nell'esercizio). Poiché il moto è di rotolamento puro, esiste una relazione geometrica tra le accelerazioni:$a_{CM} = \alpha/R$. Si ha quindi un sistema di tre equazioni in tre incognite che, risolto per F_A, fornisce la soluzione. Si noti che il valore determinato è numericamente compatibile con il coefficiente di attrito statico μ dato nel testo. Infatti deve essere $F_A \le \mu N = \mu mg$, che è soddisfatta dai dati del problema, per cui il moto è effettivamente di rotolamento puro]

b) Quanto vale il lavoro L' fatto dalla forza ***F*** sulla ruota nell'intervallo di tempo considerato (cioè dall'istante t_0=0 all'istante t'= 1 s)?

L' = …………………………………… = ………… J $F^2t'^2/(3m)$ = 17 J [ci sono almeno due modi equivalenti per esprimere il lavoro fatto dalla forza ***F*** . Il primo si basa sul bilancio energetico e prevede che, non essendoci forze dissipative che fanno lavoro (l'attrito coinvolto è di tipo statico!) e non verificandosi variazioni di energia potenziale (la strada è orizzontale!), si abbia $L' = I\omega' + (m/2)v'^2_{CM}$, con ω' velocità angolare di rotazione e v'_{CM} velocità del centro di massa, entrambe calcolate all'istante t' . Essendo il moto di rotolamento puro tra le due velocità esiste una relazione geometrica, cioè $\omega'=v'_{CM}/R$. Tenendo conto dell'espressione del momento di inerzia data nella risposta in precedenza e di quest'ultima relazione, si ha quindi $L' = (3/4)mv'^2_{CM}$. La velocità del centro di massa all'istante considerato può quindi essere agevolmente determinata notando che, risolvendo le equazioni del moto di cui alla risposta precedente, si ha $a_{CM} = (F-F_A)/m=(F/m)(1-1/3)=2F/(3m)$. Il moto è dunque uniformemente accelerato e la velocità, partendo la ruota da ferma, si calcola come $v'_{CM}=a_{CM}t'$, da cui la soluzione. Alternativamente si può esprimere il lavoro, fatto dalla forza costante e uniforme ***F***, come prodotto di forza per spostamento (sono paralleli): $L' = F\,\Delta x$. Lo spostamento si può esprimere usando la legge oraria del moto uniformemente accelerato, riferita all'accelerazione del centrro di massa appena determinata: $\Delta x = (a_{CM}/2)t'^2$. La soluzione conduce ovviamente allo stesso risultato]

c) Cosa potete dire a proposito del momento angolare (assiale, cioè per rotazioni rispetto all'asse) del cilindro nel processo considerato? Esso si conserva o no? E perché? Discutete per benino in brutta.

Discussione: …………………. Il momento angolare assiale per il cilindro che ruota è proporzionale alla velocità angolare (vale $I\omega$). Dato che la velocità angolare cambia nel tempo (all'inizio è zero, poi il cilindro si mette a rotolare con accelerazione uniforme e costante), sicuramente il momento angolare non si conserva. Infatti, tra le forze che agiscono sul cilindro, una ha momento non nullo rispetto all'asse: si tratta della forza di attrito, come già considerato in precedenza. Dunque il cilindro non è isolato rispetto ai momenti delle forze, e quindi il momento angolare non si conserva.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 29/10//2009 Firma: