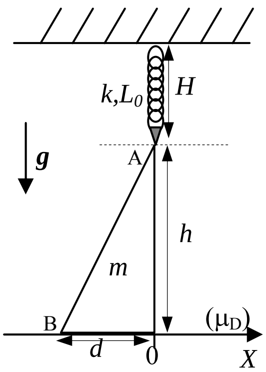
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I – 12/7/2010

Nome e cognome: ……………………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- *PARTE 1 (MECCANICA PUNTO)*



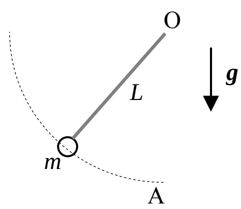
1. Un blocco di massa m = 5.0 kg ha sezione con forma di triangolo rettangolo e cateti di lunghezza h = 40 cm (posto in direzione verticale) e d = 20 cm (posto in direzione orizzontale). Il blocco **è libero di scorrere** su un piano **orizzontale** (ogni altro movimento diverso dalla traslazione, per esempio rotazioni o ribaltamenti, è impossibile)**.** Come mostrato in figura, su una delle superfici del blocco, quella che appare inclinata in sezione, spinge un puntale (**puntiforme**!) montato all'estremità di una molla con costante elastica k = 5.0×10^2 N/m. L'altro estremo della molla è fissato a un solaio rigido e indeformabile. La molla e il puntale hanno entrambi massa trascurabile; inoltre l'asse della molla si mantiene sempre in direzione verticale e **non c'è attrito tra puntale e superficie del blocco**. La molla ha lunghezza di riposo $L_0 = h+H$, dove H = 20 cm è la distanza tra il punto più "in alto" del blocco e il solaio (vedi figura). Inizialmente il blocco è mantenuto fermo da qualche forza esterna nella configurazione di figura, in cui la molla è alla sua massima compressione e il puntale preme sul punto più "in alto" del blocco (marcato con A in figura). Quindi la forza esterna viene rimossa (senza fornire alcuna velocità iniziale) e il blocco comincia a muoversi in direzione orizzontale (verso la destra della figura).

   a) Supponendo per questa domanda che l'attrito tra blocco e piano orizzontale sia **trascurabile**, quanto vale la velocità V del blocco nell'istante in cui il suo estremo più "in basso" (marcato con B in figura) passa sotto il puntale?
   V = …………………………………… = ……… m/s $(k/m)^{1/2}h$= 4.0 m/s   [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)V^2$ (inizialmente il blocco è fermo) e la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza elastica: $\Delta U = (k/2)\Delta_{fin}^2$ - $/k/2)\Delta_{in}^2$. Poiché la lunghezza di riposo della molla coincide esattamente con la lunghezza che essa assume nell'istante "finale" del processo considerato, è Δ_{fin}= 0. Invece, per ovvi motivi geometrici, si ha Δ_{in}=h , da cui la soluzione]

   b) Come si scrive, in funzione della coordinata x, il **modulo** della forza $F(x)$ che il puntale esercita sulla superficie del blocco con cui si trova a contatto? [Usate il sistema di riferimento X di figura, orizzontale e centrato sulla verticale della molla. Dovete scrivere una funzione matematica di x: **non usate valori numerici** nella sua espressione e usate bene la geometria]
   $F(x)$ = …………………………………… $|k(H+xh/d-L_0)|=kh(1-x/d)$ [è evidente che la compressione della molla, e dunque la forza elastica da essa generata attraverso il puntale, dipende dalla posizione del blocco, e quindi dalla coordinata x. Sulla base di semplici considerazioni geometriche, si vede che la lunghezza della molla è $L(x)=H+xtg\theta$, essendo θ l'angolo formato dal "piano inclinato" con l'orizzontale. La goniometria stablisce poi $tg\theta = h/d$, da cui la risposta, dove si è anche tenuto conto di $L_0 = H+h$ e si sono considerati i segni in modo da ottenere una grandezza sempre positiva, come deve essere il modulo]

   c) Come si scrive, in funzione della coordinata x, il **modulo** della forza di reazione $N(x)$ che il piano orizzontale esercita sulla superficie del blocco che vi scorre sopra? [Usate il sistema di riferimento X di figura, orizzontale e centrato sulla verticale della molla. Dovete scrivere una funzione matematica di x: **non usate valori numerici** nella sua espressione]
   $N(x)$ = ………………………………… $mg+F(x)= mg+kh(1-x/d)$ [per l'equilibrio del blocco in direzione verticale è evidente che su di esso deve agire una reazione vincolare che bilancia il suo peso e la forza generata dalla molla (e trasferita dal puntale sul blocco). Si noti che entrambe le forze considerate sono verticali e dirette verso il basso, per cui il modulo di N è dato dalla somma dei moduli delle due forze]

   d) Immaginate ora che, a differenza di quanto considerato nel quesito a), il piano su cui scorre il blocco presenti un **attrito dinamico** con coefficiente μ_D = 0.50. Quanto vale, in presenza di questo attrito, la velocità del blocco V' che si calcola nelle condizioni di cui alla domanda a)? [In pratica vi si chiede di ripetere la soluzione del punto a), considerando però la presenza dell'attrito; usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $\int xdx=x^2/2$]
   V' = …………………………………… ~ ……… m/s $((k/m)h^2-2\mu_D(d/m)(mg+kh/2))^{1/2}$ ~ 3.2 m/s   [stavolta l'energia meccanica non si conserva e l'espressione di bilancio energetico stabilisce: $L_A=\Delta E_K+\Delta U$. Le grandezze al secondo membro hanno la stessa espressione di prima, cioè della soluzione in assenza di attrito. Il lavoro della forza di attrito, L_A, si calcola tenendo conto che la forza di attrito dinamico ha modulo $F_A = \mu_D N(x)$. Il lavoro si calcola allora nel seguente modo: $L_A = \int_0^d \mathbf{F_A}\cdot \mathbf{ds} = -\int_0^d F_A dx = -\mu_D \int_0^d (mg+F)dx=-\mu_D \int_0^d (mg+kh(1-x/d))dx$, dove abbiamo assunto come estremi di integrazione, riferiti all'asse x, le posizioni iniziale e finale dello spigolo "destro" del blocco, abbiamo posto un segno negativo per tenere conto che la forza di attrito si oppone allo spostamento e abbiamo inserito l'espressione della forza $F(x)$ determinata al punto precedente. Il calcolo dell'integrale, che è ben banale, fornisce:$L_A = -\mu_D((mg+kh)d-kh(d^2/(2d))) = -\mu_D(mg+khd/2)$. Da qui, sfruttando il bilancio energetico, si ottiene la soluzione. Si noti che la soluzione prevede di estrarre la radice quadrata di una grandezza costruita mediante sottrazione. Dunque il radicale potrebbe, in certe condizioni (nel caso di forte contributo dell'attrito), essere negativo. L'eventuale significato fisico di tale condizione sarebbe che, in pratica, il blocco non percorrerebbe per intero lo spostamento considerato nel testo]



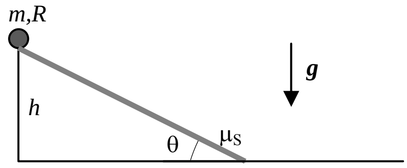
2. Un piccolo sasso di massa m = 200 g è attaccato all'estremità di una fune inestensibile e di massa trascurabile, la cui lunghezza è L = 1.00 m. L'altro estremo della fune è vincolato ad un perno (indicato con O in figura) conficcato in una parete rigida verticale: in questo modo il sasso può compiere un movimento, con **attrito trascurabile**, su un piano verticale, come rappresentato in figura. Si osserva che, quando il sasso passa per la posizione A indicata in figura (il punto "più basso" della traiettoria) con una velocità angolare $\omega_A \geq \omega_{MIN}$, esso percorre una traiettoria circolare completa (cioè fa un "giro della morte"). [Usate il valore g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità che è, ovviamente, diretta verticalmente verso il basso]

   a) Quanto vale ω_{MIN}?
   ω_{MIN} = …………………………………… = ... rad/s $(5g/L)^{1/2}$ = 7.00 rad/s   [affinché il sasso, supposto puntiforme, possa percorrere il giro della morte occorre che esso abbia una velocità angolare ω', misurata nel punto **"più alto"** della traiettoria, almeno tale che $m\omega'^2L = mg$. In queste condizioni, infatti, l'accelerazione centripeta necessaria per percorrere l'orbita circolare viene fornita dalla sola forza peso, mentre la tensione della fune aggiusta il suo valore in modo da annullarsi. Per considerazioni di bilancio energetico, cioè di conservazione dell'energia meccanica, si vede subito che $(m/2)(\omega'^2-\omega_{MIN}^2)L^2+mg2L=0$, da cui $\omega'^2= \omega_{MIN}^2-4g/L$. Inserendo questa espressione nella condizione sopra stabilita si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che il sasso passi per la posizione A con una velocità angolare $\omega = \omega_{MIN}$ (determinata in precedenza), quanto vale, in **modulo**, la tensione della fune T? [Calcolate la tensione proprio nell'istante in cui il sasso passa per la posizione A, tenendo in debito conto che il sasso si sta muovendo su un'orbita circolare…]
T = …………………………………… = ... N $m(a_C+g)=m(\omega_{MIN}^2L+g)=6mg$ = 11.8 N [il sasso percorre un'orbita circolare e, nell'isatnte considerato, si muove a velocità angolare $\omega = \omega_{MIN}$. Esso è dunque sottoposto all'azione di un'accelerazione centripeta che, in modulo, deve valere $a_C = \omega_{MIN}^2L = 5g$. Questa accelerazione centripeta deve essere fornita dalle forze che agiscono sul sasso. Tali forze sono la tensione della fune, diretta verso il centro della traiettoria (e quindi di direzione e verso "giusto" per fornire accelerazione centripeta) e la forza peso, che ha la stessa direzione, ma verso opposto. Tenendo conto dei segni (il segno positivo è "centripeto"), deve essere:$ma_C=T-mg$, da cui la soluzione]

-- *PARTE 2 (MECCANICA SISTEMI E CORPO RIGIDO)*

3. Un cilindro **omogeneo** di massa m = 2.0 kg e raggio R = 20 cm si trova fermo sulla sommità di un piano inclinato, di altezza h = 3.0 m, che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è **scabro** e si sa che il coefficiente di attrito statico vale μ_S=0.50 ed è seguito da un tratto piano **orizzontale** che invece è **liscio** (cioè il tratto orizzontale presenta attrito trascurabile). A un dato istante il cilindro, precedentemente tenuto in posizione da una qualche forza esterna (una manina), viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate il valore g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Dimostrate per benino, in brutta, che il moto del cilindro lungo il piano inclinato, nelle condizioni del problema, è di rotolamento puro (cioè non c'è strisciamento).
Discussione: ………………………………………… Il moto di rotolamento puro, senza strisciamento, implica delle precise relazioni geometriche tra grandezze traslazionali e angolari (di rotazione attorno all'asse del cilindro). In particolare è $v_{CM}=\omega R$ e $a_{CM}=\alpha R$. Le equazioni del moto trsalazionale e rotazionale (prima e seconda equazione del moto) recitano: $a_{CM}=gsin\theta-F_A/m$ e $\alpha=F_AR/I$, dove si è scelto un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso, si è indicato con F_A il modulo della forza di attrito statico, che, come si vede facilmente, è l'unica forza agente sul cilindro che abbia un momento diverso da zero rispetto all'asse del cilindro stesso. Il momento di inerzia del cilindro omogeneo è $I = mR^2/2$. Usando le due equazioni del moto e la relazione geometrica fra le accelerazioni si ottiene un sistema di tre equazioni algebriche con tre incognite. Risolvendo questo sistema per **l'incognita** F_A si ottiene che, in condizioni di rotolamento puro, deve essere $F_A = mgsin\theta/3$. Per definizione di coefficiente di attrito statico, si sa che $F_A \le \mu_S N$, con $N=mgcos\theta$ modulo della reazione vincolare esercitata dal piano inclinato sul cilindro. Allora affinché possa esserci rotolamento puro deve verificarsi: $mgsin\theta/3 \le \mu_S mgcos\theta$, ovvero $tg\theta \le 3\mu_S$. Con i dati del problema la disuguaglianza è effettivamente verificata e dunque il moto lungo il piano inclinato è di rotolamento puro.

b) Quanto valgono la velocità del centro di massa del cilindro, v_{CM}, e la velocità angolare del cilindro, ω, nell'istante in cui esso raggiunge il tratto orizzontale alla base del piano inclinato? [Supponete che, come dovreste aver dimostrato alla risposta del quesito precedente, il moto lungo il piano inclinato sia di rotolamento puro]
v_{CM} = …………………………………… ~ .... m/s $(4gh/3)^{1/2}\sim$ 6.3 m/s [nel moto di rotolamento puro interviene la forza di attrito statico, che quindi non compie lavoro. Allora è possibile usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U = (m/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2-mgh$, da cui, usando la relazione tra le velocità già scritta alla soluzione del quesito precedente e impiegando il momento di inerzia per il cilindro omogeneo, si ottiene la soluzione[l sasso percorre un'orbita circolare e, nell'isatnte considerato, si muove a velocità angolare $\omega = \omega_{MIN}$. Esso è dunque sottoposto all'azione di un'accelerazione centripeta che, in modulo, deve valere $a_C = \omega_{MIN}^2L = 5g$. Questa accelerazione centripeta deve essere fornita dalle forze che agiscono sul sasso. Tali forze sono la tensione della fune, diretta verso il centro della traiettoria (e quindi di direzione e verso "giusto" per fornire accelerazione centripeta) e la forza peso, che ha la stessa direzione, ma verso opposto. Tenendo conto dei segni (il segno positivo è "centripeto"), deve essere:$ma_C=T-mg$, da cui la soluzione]
ω = …………………………………… ~ .... rad/s $v_{CM}/R\sim$ 31 rad/s [a causa della relazione geometrica fra grandezze traslazionali e angolari tipica del moto di rotolamento puro]

c) Che tipo di movimento fa il cilindro sul piano orizzontale **liscio** (con attriti trascurabili)? Discutete per bene in brutta quello che vi aspettate che si verifichi, tenendo d'occhio le conservazioni delle grandezze dinamiche nel processo.
Discussione*:* …………………………………… Energia meccanica, cinetica, quantità di moto e momento angolare si conservano. Infatti non ci sono attriti e quindi si conserva l'energia meccanica. D'altra parte non ci sono variazioni di energia potenziale, e quindi si conserva anche l'energia cinetica da sola. Poi il cilindro è isolato in direzione orizzontale, che è quella di interesse per il moto, dato che su di esso non agiscono forze in questa direzione. Di conseguenza si conserva la quantità di moto (in direzione orizzontale e anche in quella verticale, che rimane costantemente nulla essendo il movimento solo orizzontale). Infine, anche il momento angolare si conserva non essendoci momenti di forza rispetto all'asse del cilindro. In definitiva, il cilindro prosegue il suo moto in direzione orizzontale mantenendo la velocità del centro di massa e la velocità angolare acquistate durante la discesa lungo il piano inclinato.

4. Un blocchettino di massa M = 1.0 kg è attaccato a una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 1.0x10^2 N/m il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida verticale. Il blocchettino, che si può muovere con **attrito trascurabile** in direzione **orizzontale**, è inizialmente fermo nella propria posizione di equilibrio. A un dato istante su di esso incide un proiettile (puntiforme) di massa $m = M/4$ che vi arriva contro con una velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta orizzontalmente contro il blocchettino. In seguito all'urto tra i due corpi, da ritenere perfettamente **elastico**, il blocchettino inizia a muoversi comprimendo la molla. [Occhio! C'è l'urto e "**poi**" la compressione della molla!]

a) Quanto vale, **subito** dopo l'urto, la velocità v del proiettile?
v = …………………………………… = ……… m/s $-(3/5)v_0$ = -6.0 m/s [il processo può essere diviso in due fasi. Nella prima si ha l'urto, elastico, tra proiettile e blocchettino; nella seconda si assiste allo spostamento del blocchettino e alla compressione della molla. Nella prima fase si conservano quantità di moto e energia cinetica del sistema. Infatti, nel breve periodo dell'urto, il sistema può essere considerato isolato (la reazione vincolare esercitata dal muretto, che in modulo è pari alla forza elastica ed è l'unica forza esterna diretta orizzontalmente, cioè nella direzione di interesse, non ha carattere impulsivo, ovvero la molla non fa in tempo a comprimersi nella durata dell'urto; inoltre l'urto è dichiaratamente elastico), per cui si ha: $mv_0 = mv+MV$ e $(m/2)v_0^2 = (M/2)V^2+(m/2)v^2$. Usando la relazione fra le masse e semplificando opportunamente, queste espressioni diventano: $v_0 = v+4V$ e $v_0^2=v^2+4V^2$. Questo è un sistema di due equazioni algebriche che, risolto per l'incognita v (la velocità del blocchettino subito dopo l'urto), dà il risultato, dove il segno negativo indica che il proiettile "rimbalza", cioè inverte il verso del suo moto, in seguito all'urto. Notate che il sistema ammette anche la soluzione $v = v_0$, che però non ha significato fisico, dato che in pratica indica una situazione in cui non c'è urto]

b) Quanto vale la compressione massima Δ_{MAX} raggiunta dalla molla? [A scanso di equivoci, si ricorda che la compressione è la differenza tra lunghezza di riposo e lunghezza "attuale" della molla]
Δ_{MAX} = …………………………………… = ……… m $(M/k)^{1/2}(2/5)v_0$ = 0.40 m [qui occorre considerare la seconda fase del processo, che di fatto riguarda il movimento del solo blocchettino (il proiettile se ne va per conto suo…). Risolvendo il sistema di equazioni scritto prima per V si trova la velocità "iniziale" con cui il blocchettino si mette in movimento. Si ha in particolare $V = (2/5)v_0$. Non essendoci forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, per cui, tenendo conto che nell'istante di massima compressione il blocchettino è fermo e che inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. $0 = -(M/2)V^2+(k/2)\Delta_{MAX}^2$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra l'istante dell'urto e quello di massima compressione della molla? [Occhio! Pensate bene a che tipo di moto compie il blocchettino…]

Δt =…………………………………… = ………. s $(\pi/2)(M/k)^{1/2} = 0.16$ s [dopo l'urto, il blocchettino prende a muoversi di moto armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Ci si può rendere conto facilmente (e si può anche dimostrare matematicamente) che l'intervallo di tempo richiesto è pari a un quarto dell'intero periodo di oscillazione, da cui, ricordando che $T = 2\pi/\omega$, la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/7/2010 Firma: