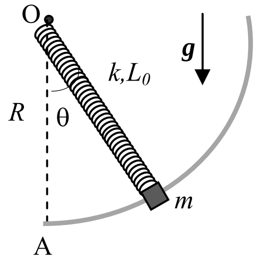
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I – 8/9/2010

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- *PARTE 1 (MECCANICA PUNTO)*

1. Un anellino (da considerare puntiforme) di massa m = 0.10 kg è vincolato a muoversi lungo una guida che ha la forma di un arco di circonferenza di raggio R = 20 cm, rigido e fisso su un piano verticale. Come rappresentato in figura, una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 4.0 N/m e lunghezza di risposo $L_0 = 2R$ = 40 cm, è collegata a un suo estremo all'anellino e all'altro estremo a un chiodo conficcato in una parete verticale nel punto O, che rappresenta il centro di curvatura della guida. Nella situazione da considerare per rispondere alla prima domanda, si sa che la guida è **scabra** e presenta **attrito statico** con coefficiente μ (incognito). In queste condizioni l'anellino si trova in **equilibrio** nella posizione indicata in figura (l'angolo θ vale $\pi/6$). [Usate g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)=1/2$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che la guida esercita sull'anellino?

N = …………………………….. ~ .... N $mgcos\theta\text{-}k(R\text{-}L_0)=mgcos\theta+kR$ ~ 1.6 N [sull'anellino agiscono la forza peso $\boldsymbol{mg}$, in direzione verticale, la reazione vincolare della guida e la forza della molla, entrambe in direzione radiale, l'attrito, in direzione tangenziale. Per l'equilibrio in direzione radiale occorre che la reazione vincolare bilanci la forza della molla (diretta "verso l'esterno", essendo la molla compressa rispetto alla lunghezza di riposo) e la componente della forza peso in direzione radiale. Notate che entrambe le componenti hanno lo stesso verso e che queste sono le uniche componenti di forza nella direzione radiale (l'attrito, opponendosi al moto, ha direzione tangenziale)]

b) Quanto deve valere, **al minimo**, il coefficiente di attrito μ affinché ci sia equilibrio? [per chiarire: "al minimo" vuol dire che per qualsiasi valore uguale o superiore a quello che determinerete si hanno condizioni di equilibrio]

μ = …………………………….. ~.......... $mgsin\theta/N$ ~ 0.30 [occorre studiare l'equilibrio in direzione tangenziale, nella quale agiscono la componente tangenziale della forza peso, che in modulo è $mgsin\theta$, e la forza di attrito statico F_A. Le due componenti hanno ovviamente verso opposto (l'attrito si oppone allo spostamento incipiente), per cui è sufficiente uguagliare i moduli. Ricordando che, per definizione di coefficiente di attrito, si ha $F_A \leq \mu N$ e usando l'espressione della reazione vincolare trovata al punto precedente, si ottiene la soluzione]

c) Per questa domanda supponete che **non ci sia alcuna forma di attrito** (la guida è perfettamente levigata!) e che l'anellino venga fatto partire, con velocità iniziale nulla, dalla posizione $\theta = \pi/6$. Quanto vale, in modulo, la velocità v con cui l'anellino giunge "al termine" della guida (il punto marcato con A in figura)?

v = …………………………….. ~.......... m/s $(2gR(1\text{-}cos\theta))^{1/2}$ ~ 0.73 m/s [il problema si risolve con la conservazione dell'energia meccanica, per cui $0=(m/2)v^2 + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è solo gravitazionale: infatti, per la geometria del sistema, si ha che la molla non compie lavoro (la sua lunghezza rimane sempre pari a R!), per cui $\Delta U = mg(\Delta h)$. La variazione di quota può comodamente essere espressa in funzione della posizione angolare di partenza, dato che si ha $\Delta h = \text{-}R(1\text{-}\cos\theta)$, dove abbiamo tenuto in debito conto i segni!]

2. Un semplicissimo (ed irrealistico) modello "planetario" di atomo di idrogeno prevede che un protone di carica Q = 1.6x10^{-19} C sia **fisso** nello spazio e che attorno ad esso possa ruotare, su un'orbita **circolare**, un elettrone di carica $q = – Q$ e massa m = 9.0x10^{-31} kg. [Usate il valore κ = 9.0x10^9 Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica; trascurate ogni effetto di massa (forza peso) e attrito]

a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale R = 5.0x10^{-11} m, e supponendo che il moto sia circolare **uniforme**, quanto vale la velocità angolare ω con cui ruota l'elettrone?

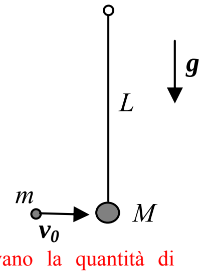
ω = ……………………………………~ ……… rad/s $(\kappa Q^2/(mR^3))^{1/2}$ ~ 4.5x10^{16} rad/s [poiché l'elettrone compie un'orbita circolare, su di esso deve agire un'accelerazione centripeta che in modulo si esprime $a_C = \omega^2 R$. L'unica forza che agisce sull'elettrone è la forza elettrica generata dalla carica puntiforme Q, che ha carattere attrattivo e dunque è « centripeta » e si esprime, in modulo : $F_{ELE} = \kappa Q^2/R^2$. La soluzione si trova imponendo $F_{ELE}=ma_c$]

b) Se il raggio dell'orbita raddoppia per effetto di una qualche perturbazione "esterna", cioè diventa $R' = 2R$ = 1.0x10^{-10} m, quanto vale la variazione di energia potenziale elettrostatica, ΔU_E? [Fate attenzione al fatto che la forza elettrica **non** è uniforme, ma dipende dal raggio r, che varia tra R e R'; ricordate che la forza elettrica ha direzione radiale; vi farà inoltre comodo rammentare la seguente regola di integrazione indefinita per una variabile generica ξ: $\int 1/\xi^2\, d\xi = - 1/\xi$]

ΔU_E = ……………………………………....~ .... J $\kappa Q^2(1/R' – 1/R) = - \kappa Q^2/(2R)$ ~ -2.3x10^{-18} J [la forza elettrica è conservativa e dunque $\Delta U_E = \text{-}L_E = \text{-} \int_R^{R'} \boldsymbol{F_E} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_R^{R'} F_E\, dr$, dove abbiamo « risolto » il prodotto scalare notando che forza elettrica e spostamento sono **antiparalleli** (occhio : abbiamo anche cambiato segno all'espressione proprio per tenere conto di questo fatto e, per evitare confuzioni, scriveremo la forza come positiva, secondo quanto abbiamo fatto anche in precedenza) : infatti la forza è attrattiva mentre lo spostamento dr è diretto in modo da rappresentare un allontanamento tra le due cariche. Risolvendo l'integrale e tenendo in debito conto degli estremi di integrazione si ottiene la soluzione, il cui segno è giustamente negativo, visto che all'aumentare della distanza tra le due cariche (che si attraggono tra loro) l'energia diminuisce]

-- *PARTE 2 (MECCANICA SISTEMI E CORPO RIGIDO)*

3. Un pendolo semplice, costituito da una lunga fune inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L = 2.0 m a cui è attaccata una piccola sfera di massa M = 0.20 kg, può oscillare su un piano verticale ed inizialmente si trova nella sua posizione di equilibrio stabile. Un piccolo proiettile di massa $m = M/4$ colpisce la sfera avendo una velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s diretta **orizzontalmente**, come rappresentato in figura. L'urto tra proiettile e sfera può essere considerato perfettamente **elastico** e si sa che le velocità di sfera e proiettile subito dopo l'urto hanno solo componenti orizzontali. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e trascurate ogni forma di attrito]



a) Quanto valgono le velocità V e v rispettivamente della sfera e del proiettile **subito dopo** l'urto? [Esprimetene le componenti orizzontali usando un asse orientato verso la destra della figura]

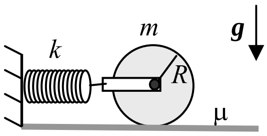
V = …………………………………… = ... m/s $(2/5)v_0$ = 2.0 m/s [nell'urto (elastico) si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema. Tenendo conto che tutte le velocità rilevanti sono dirette in senso orizzontale e usando il riferimento specificato nel testo, deve essere: $mv_0 = mv+MV$, ovvero, usando la relazione tra le masse: $v_0 = v+4V$. Per la conservazione dell'energia cinetica (subito prima e subito dopo l'urto!) si ha: $(m/2)v_0^2=(m/2)v^2+(M/2)V^2$, ovvero, sfruttando la relazione tra le masse: $v_0^2=v^2+4V^2$. Combinando le due equazioni e risolvendo per V si ottengono due soluzioni: V = 0 e $V = (2/5)v_0$. La prima è fisicamente non rilevante, in quanto indica che la sfera non si muove (l'urto non avviene), mentre la seconda fornisce la risposta al quesito]

v= …………………………………… = ... m/s $v_0\text{-}4V = \text{-}(3/5)v_0$ = -3.0 m/s [si ottiene sulla base di quanto determinato alla risposta precedente. Il segno negativo indica che il proiettile "rimbalza" e torna indietro]

b) In seguito all'urto il pendolo si mette in movimento: quanto vale la variazione di quota massima, Δh, della sfera (misurata rispetto alla posizione di equilibrio)? [Quando raggiunge la quota massima, la sfera si arresta istantaneamente]

Δh = …………………………………… = ... m $V^2/(2g) = (2v_0/5)^2/(2g) = 0.20$ m [nel movimento della sfera si conserva l'energia **meccanica**, dato che non ci sono attriti. Dunque deve essere $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = -(M/2)V^2 + Mg\Delta h$, da cui la soluzione]

4. Un cilindro pieno e omogeneo di raggio R = 50 cm e massa m = 5.0 kg è libero di ruotare **senza attrito** attorno al suo asse, che è collegato come in figura (attraverso un giogo di massa trascurabile) ad una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 30 N/m il cui altro estremo è vincolato ad una parete rigida. Il cilindro è poggiato su un piano orizzontale dotato di un coefficiente di attrito tale che il cilindro stesso **rotola senza strisciare** (moto di rotolamento puro). [Trascurate ogni altra forma di attrito!]



a) Inizialmente la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 40 cm a causa di una forza esterna, che all'istante t_0 = 0 viene rimossa permettendo al cilindro di mettersi in movimento. Quanto vale in modulo la velocità del centro di massa del cilindro, v_{CM}, nell'istante in cui esso si trova a passare per la posizione di equilibrio, cioè quella in cui la molla non è né compressa né estesa?

v_{CM} = …………………………………… = ………… m/s $\Delta_0 (2k/(3m))^{1/2} = 0.80$ m/s [non essendoci attriti che compiono lavoro (l'attritostatico responsabile per il rotolamento puro non compie lavoro!), si conserva l'energia meccanica, cioè: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA}$. Essendo inizialmente fermo e tenendo conto dei contributi rotazionale e traslazionale, la variazione di energia cinetica del cilindro si scrive: $\Delta E_K = (I/2)\omega^2 + (m/2)v_{CM}^2 = (m/2)((R^2 v_{CM}^2/(2R^2)) + v_{CM}^2) = 3mv_{CM}^2/4$, dove abbiamo usato il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo, $I = mR^2/2$, e il legame tra le velocità dato dalla condizione di puro rotolamento, $\omega = v/R$, con ω velocità angolare del cilindro. Inoltre la variazione di energia elastica si scrive semplicemente $\Delta U_{ELA} = -(k/2)\Delta_0^2$, dato che l'energia elastica "finale" è nulla essendo nulla la compressione o elongazione della molla. Da qui la soluzione]

b) Quanto vale il valore **minimo** μ del coefficiente di attrito **statico** che garantisce moto di rotolamento puro? [Discutete per bene, in brutta, il ragionamento necessario per rispondere alla domanda]

μ = ……………………………………………… $F_{ELA,0}/(3mg) = k\Delta_0/(3mg) = 0.082$ [le equazioni del moto rotazionale e traslazionale rilevanti per il problema si scrivono rispettivamente: $a_{CM} = F_{ELA}/m - F_A/m$ e $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(mR)$, dove abbiamo tenuto conto che le uniche forze che agiscono in direzione orizzontale, quella del moto, sono la forza elastica F_{ELA} e la forza di attrito statico F_A. Questa forza ha verso opposto rispetto allo spostamento "incipiente", e dunque rispetto alla forza elastica. Supponendo $F_{ELA}>0$, che corrisponde alla situazione iniziale considerata nel testo (la molla è inizialmente compressa e dunque la forza elastica è diretta nel verso positivo del riferimento marcato in figura), e indicando con F_A il **modulo** della forza di attrito, occorre mettere un segno negativo davanti all'espressione di F_a Tenendo conto della relazione tra le accelerazioni, $\alpha = a_{CM}/R$, che nasce dalla condizione di rotolamento puro, si ottiene un bel sistema di tre equazioni con tre incognite. Risolvendo per F_A si trova: $F_A = F_{ELA}/3$. Ora la forza elastica nel problema considerato assume al massimo il valore iniziale, $F_{ELA,0} = k\Delta_0$ (si noti che la compressione è espressa con una grandezza positiva). La forza di attrito statico, invece, è $F_A \le \mu N = \mu mg$. Il valore richiesto si ottiene allora considerando il massimo valore della forza elastica e il massimo valore della forza di attrito, da cui la soluzione]

c) Quanto vale il periodo di oscillazione T del movimento (armonico) del centro di massa del cilindro?

T = …………………………………… = ………… s $2\pi(3m/(2k))^{1/2} = 3.1$ s [l'equazione del moto di traslazione, tenendo conto che, in condizioni di rotolamento puro, si ha $F_A = F_{ELA}/3$ (vedi sopra), può essere scritta come $a_{CM} = (F_{ELA} - F_A)/m = 2F_{ELA}/m$. Detta x la coordinata del centro di massa del cilindro misurata a partire dalla posizione di riposo, si ha $F_{ELA} = -kx$. Il moto è dunque armonico, con pulsazione $\Omega = (2k/(3m))^{1/2}$. Essendo il periodo $T = 2\pi/\Omega$ si ottiene la risposta]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 8/9/2010 Firma: