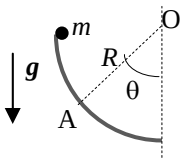
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 18/2/2011

Nome e cognome: …… Matricola: ……

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g si trova alla sommità di una guida semicircolare di raggio R = 5.0 m fissa, rigida e disposta su un piano verticale, come rappresentato in figura. A un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



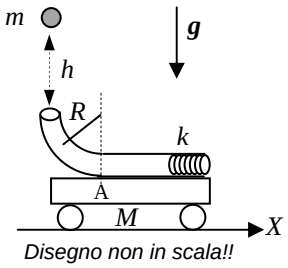
   a) Supponendo trascurabile ogni forma di attrito, quanto vale la velocità v_A con cui l'oggetto passa per la posizione indicata con A in figura, che si trova "a metà strada" dell'arco di circonferenza? [Per intendersi, la posizione è tale che il raggio che congiunge il punto A con il centro O dell'arco di circonferenza forma un angolo θ = π/4 sia rispetto alla verticale che all'orizzontale; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 2^{1/2}/2$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]

   v_A = …… ~ …… m/s $(2gR(1-cos\theta))^{1/2} \sim 5.4$ m/s [essendo trascurabili gli attriti, si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U = (m/2)v_A^2 - mgR(1-cos\theta)$, dove si è tenuto conto del fatto che inizialmente l'oggetto è fermo e che l'energia potenziale (gravitazionale) varia nel processo perché l'oggetto cambia la sua quota di un tratto $R(1-cos\theta)$. Da qui la soluzione]

   b) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A che la guida esercita sull'oggetto nell'istante in cui questo passa per il punto A di cui sopra?

   N_A = …… ~ …… N $mg(2-cos(\theta)) \sim 0.63$ N [l'oggetto sta compiendo un moto circolare, dunque su di esso deve agire l'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v_A^2/R$ diretta radialmente verso il centro di curvatura. Le forze che agiscono sull'oggetto, la forza peso e la reazione vincolare della guida, devono allora creare questa accelerazione. La forza peso ha componente radiale $mgcos(\theta)$ di verso centrifugo (l'angolo è quello rispetto alla verticale),. Deve quindi essere: $ma_C = N_A - mgcos(\theta)$. Da qui la soluzione, dove si è usato il valore di v_A determinato sopra]

2. Un carrello, che può muoversi con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (direzione orizzontale), è munito di un sottile tubo cavo il cui primo tratto è piegato a formare un arco di circonferenza di raggio R = 50 cm, mentre il secondo tratto è orizzontale e termina con una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 1.0x10^2 N/m. La massa complessiva del carrello e di tutti i suoi attributi (tubo incluso) è M = 1.0 kg. Inizialmente il carrello è fermo e una pallina (puntiforme!) di massa $m = M/5$ = 0.20 kg si trova ferma sopra all'imboccatura del tubo, a un'altezza h = 2.0 m da questa (vedi figura). A un certo istante la pallina viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla: essa cade, si infila nel tubo e lo percorre, muovendovisi con **attrito trascurabile**, fino a giungere alla molla, che viene dunque compressa. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!

   a) Quanto vale la velocità V' del carrello nell'istante in cui la pallina passa per il punto A del tubo (vedi figura), situato subito al termine dell'arco di circonferenza? [Considerate **trascurabile il diametro interno del tubo**; esprimete la velocità V' rispetto all'asse X di figura]

   V' = …… ~ ..... m/s $-(2mg(R+h)/(M+M^2/m))^{1/2} = -(2g(R+h)/30)^{1/2} \sim -1.3$ m/s

   [dal momento in cui la pallina entra nel tubo, pallina e carrello formano un sistema. In questo sistema si conserva l'energia meccanica, dato che non ci sono forze dissipative che compiono lavoro. Inoltre le forze esterne al sistema, forze peso e reazioni vincolari della strada sulle ruote del carrello, sono tutte verticali, per cui il sistema è isolato in direzione X e in tale direzione si conserva la quantità di moto totale del sistema. Si ha quindi: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2 - mg(h+R)$, dove v' è il modulo della velocità della pallina all'istante considerato, e $(h+R)$ è la variazione di quota della pallina, che dà luogo alla variazione di energia potenziale gravitazionale; inoltre per la conservazione della componente X della quantità di moto del sistema, che inizialmente è nulla (tutto è fermo!), si ha $0 = mv'_X + MV'$, dove non usiamo pedici in V' dato che il carrello può muoversi solo in direzione X. D'altra parte nell'istante considerato anche la pallina si muove solo in direzione X (la sua traiettoria è orizzontale), per cui $v'^2 = v'^2_X$. Si ha allora un sistema di due equazioni e due incognite che, risolto per V', fornisce la soluzione. Si noti la presenza del segno negativo a indicare che il carrello si muove in verso opposto rispetto alla pallina (cfr. la conservazione della quantità di moto): poiché questa si sposta nel verso positivo dell'asse X è necessario scegliere la soluzione negativa]

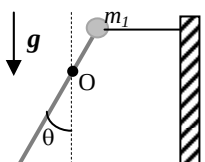
   b) Quanto vale la velocità V'' del carrello nell'istante in cui la molla assume la sua massima compressione? [Spiegate bene, in brutta, il ragionamento usato per giungere alla risposta]

   V'' = …… ~..... m/s 0 [la massima compressione della molla si verifica quando la pallina, che sta comprimendo la molla a un suo estremo, e il carrello, a cui è solidale l'altro estremo della molla, hanno la stessa velocità. Infatti se così non fosse vorrebbe dire che la molla si sta ancora comprimendo o che inizia ad estendersi. Pertanto deve essere $V'' = v''$. D'altra parte per conservazione della quantità di moto deve anche essere $0 = mv'' + MV''$, da cui si ottiene subito $V'' = v'' = 0$]

   c) Quanto vale la compressione massima della molla, Δ_{MAX}?

   Δ_{MAX} = …… ~..... m $(2mg(R+h)/k)^{1/2} = 0.70$ m [per la conservazione dell'energia meccanica, scegliendo come istante iniziale $t_0 = 0$ e come istante "finale" quello in cui la molla è compressa al massimo, si ha, essendo $\Delta E_k = 0$ (tutto è fermo sia all'inizio che alla "fine"): $0 = \Delta E_K + \Delta U = \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = -mg(R+h) + (k/2)\Delta_{MAX}^2$, dove abbiamo notato che la variazione di energia potenziale del sistema è dovuta al cambio di quota della pallina e alla compressione della molla. Da qui la soluzione]

3. Un sistema è formato da un'asta rigida di **massa trascurabile** di lunghezza L = 1.0 m alle cui estremità si trovano due masse puntiformi $m_1 = m_2 = m$ = 0.50 kg. Come mostrato in figura, questa sorta di manubrio è imperniato in un punto (indicato con O in figura) che dista $L_1 = L/4$ rispetto



all'estremo in cui si trova la massa m_1: esso può quindi ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio nella configurazione di figura (l'angolo vale $\theta = \theta_0 = \pi/6$) da una fune inestensibile attaccata per un capo alla massa m_1 e per l'altro capo ad una parete rigida verticale. . [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]

a) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune?

T = …… ~ …….. N $g(3m_2-m_1)sin\theta_0/cos\theta_0 = 2gmtg\theta_0 \sim 5.8$ N [il sistema è in equilibrio traslazionale e rotazionale (attorno al polo O). Per soddisfare quest'ultima condizione, occorre che sia nulla la somma vettoriale dei momenti delle forze esterne, che sono dovute alle sole forze peso che agiscono sulle masse. Tenendo conto in modo opportuno dei segni e dei bracci delle forze, deve essere $0=-TL_1cos\theta_0+m_2g(L-L_1)sin\theta_0 - m_1gL_1sin\theta_0$, da cui la soluzione. Notate che la stessa soluzione deve anche ottenersi considerando il sistema come un corpo rigido, individuandone il centro di massa (che è a metà della lunghezza dell'asta) e supponendo la forza peso complessiva applicata al centro di massa]

b) Ad un certo istante la fune viene improvvisamente tagliata e il sistema si mette a ruotare: quanto vale la sua velocità angolare ω' nell'istante in cui l'asta passa per la direzione verticale? [Considerate trascurabile ogni forma di attrito]

ω' = …… ~ …… rad/s $(8g(1-cos\theta_0)/(5L))^{1/2} \sim 1.4$ rad/s [poiché sul sistema non agiscono forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G$. Trattando il sistema delle due masse come un corpo rigido, si ha subito che il momento di inerzia (rispetto al polo considerato) vale $I = m_1L_1^2+m_2(L-L_1)^2=5mL^2/8$. Si ha quindi $\Delta E_K=I\omega'^2/2=5mL^2/16$. La variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta al fatto che la massa m_1 "si alza" di un tratto $|L_1(1-cos\theta_0)|$ mentre la massa m_2 "si abbassa" di un tratto $|(L-L_1)(1-cos\theta_0)|$. Tenendo conto dei segni in modo opportuno si ottiene $\Delta U_G=m_1gL_1(1-cos\theta_0)-m_2g(L-L_1)(1-cos\theta_0)=mg(1-cos\theta_0)(2L_1-L)$, da cui la soluzione. Anche in quiesto caso notate che lo stesso risultato si ottiene considerando la variazione di quota del centro di massa (e la massa complessiva del sistema)]

c) Immaginate ora che, grazie a un congegno magico, proprio nell'istante in cui l'asta passa per la direzione verticale la massa m_2 si stacchi dal manubrio cadendo verticalmente. Quanto vale, **immediatamente dopo** questo evento, la velocità angolare ω'' dell'asta, ovvero della massa m_1? [Tenete conto che il congegno sviluppa, per permettere il distacco della massa m_2, delle forze che sono "interne" al sistema]

ω'' = …… ~ …… rad/s $5\omega'/2 \sim 3.5$ rad/s [nel breve intervallo di tempo che intercorre tra quando il sistema (intero) passa per la verticale e quando la massa m_2 si è distaccata sul sistema non agiscono forze esterne in grado di provocare un momento rispetto al polo O. Infatti il congegno genera forze interne e il perno di rotazione può generare forze impulsive che però hanno braccio, e quindi momento, nullo. Inoltre la configurazione geometrica è tale che anche le forze non impulsive (il peso) hanno braccio nullo, essendo l'asta verticale (in realtà anche la forza interna ha braccio nullo per lo stesso motivo). In queste condizioni si conserva il momento angolare L, cioè $L'=L''$ Prima del distacco è $L'= I\omega'$, con $I=5mL^2/8$ (calcolaro sopra). Dopo il distacco, poiché la massa m_2 si muove verticalmente, il momento angolare è solo quello della massa m_1 che continua a fare la rotazione. Si ha quindi $L''=I''\omega''$, con $I''=m_1L_1^2=mL^2/16$. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/2/2011 Firma: