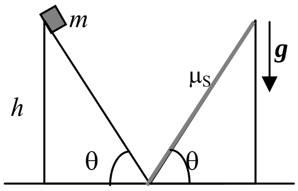
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 20/4/2011

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

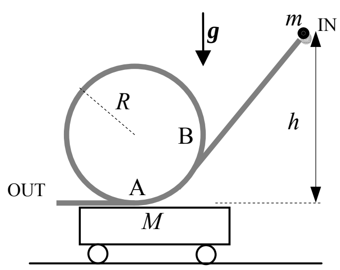
1. Una piccola cassa (da considerare **puntiforme**!) di massa m = 2.0 kg si trova ferma all'inizio di un "percorso" costituito dalla successione di due piani inclinati fissi e rigidi che formano entrambi un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale e che hanno entrambi un'altezza h = 4.0 m. Il primo piano è perfettamente lucidato e presenta un attrito trascurabile; il secondo ha una superficie scabra e presenta coefficienti di attrito statico μ_S = 0.80 e dinamico μ_D = 0.50. [Usare il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) A un dato istante, la cassa viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla, scende lungo il primo piano inclinato (quello liscio) e risale per il secondo (quello scabro). Fino a quale altezza h' arriverà? [Misurate tale altezza dal piano orizzontale di appoggio dei piani inclinati lungo la direzione verticale: è un'**altezza**!]
   h' = …………………………………… ~ .... m $2ghsin\theta/(2g(sin\theta+\mu_D cos\theta))=hsin\theta/(sin\theta+\mu_D cos\theta)=h/(1+\mu_D tg\theta) \sim 2.1$ m [come si può facilmente dimostrare, la cassa arriva al fondo del primo piano inclinato dotata di una velocità di modulo $v' = (2gh)^{1/2}$ Sul piano scabro la cassa subisce l'attrito dinamico, di modulo $F_{AD} = \mu_D N = \mu_D mgcos\theta$. Dunque la sua equazione del moto, scritta rispetto a un riferimento X orientato verso la sommità del piano inclinato e parallelo a questo, è $a = -g(sin\theta+\mu_D cos\theta)$ e la legge oraria del moto è $x(t) = v't+at^2/2$, mentre la legge oraria della velocità recita $v(t)=v'+at$ (abbiamo posto t_0=0 all'istante in cui la cassa inizia il suo moto di risalita sul secondo piano). L'istante di arresto vale $t_{STOP}=-v'/a$ e lo spazio percorso sul secondo piano vale $x_{STOP} = v't_{STOP}+at_{STOP}^2/2= -v'^2/a+v'^2/(2a)=-v'^2/(2a)$. L'altezza massima si ottiene da considerazioni trigonometriche: $h'=x_{STOP}sin\theta$ e da qui, facendo le debite sostituzioni, si trova la soluzione]

   b) Discutete per benino, in brutta, cosa succede alla cassa dopo che ha raggiunto l'altezza h' di cui sopra, in particolare se essa ridiscende o rimane ferma nella posizione raggiunta.
   Discussione: …………………………………… nell'istante in cui la cassa si ferma, l'attrito statico diventa il meccanismo rilevante (il nostro modello prevede infatti di distinguere fra attrito statico e dinamico, e quest'ultimo agisce solo finché c'è movimento). La forza di attrito statico vale, al massimo, $F_{AS,MAX}=\mu_S N=\mu_S mgcos\theta$. Affinché la cassa resti ferma, cioè rimanga in equilibrio all'altezza h' dove si è arrestata, occorre che sulla cassa agisca una forza di attrito che si oppone alla componente attiva della forza peso, cioè, in modulo, $F_{AS} = mgsin\theta$. Nelle condizioni del problema, si vede che $F_{AS}/F_{AS,MAX} = tg\theta/\mu_s > 1$, dunque l'attrito statico **non** è sufficiente a mantenere in equilibrio la cassa e questa subito dopo essersi fermata comincia a ridiscendere lungo il piano inclinato scabro.

2. Un giochino per bambini è fatto in questo modo: un sottile tubo (cavo) è modellato in modo da formare un percorso a "giro della morte" su un piano verticale, con una rampa iniziale alta h = 1.0 m raccordata con una circonferenza di raggio $R = h/10$ = 10 cm che quindi termina con un tratto orizzontale di uscita. Il tubo è saldato su un carrellino: il tutto ha massa M = 1.0 kg e può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale, come rappresentato in figura. Una pallina (**puntiforme!**) di massa $m = M/4$ = 0.25 kg può scorrere con **attrito trascurabile** all'interno del tubo, lungo il percorso stabilito dalla sua forma. All'inizio tutto è fermo: il bambino infila la pallina nel tubo, al punto "IN" di figura, e la lascia andare con **velocità iniziale nulla**. La pallina compie il giro della morte e fuoriesce dal punto "OUT". Il bambino è molto contento ma, mosso da curiosità infantile, vi fa alcune domande: [Supponete trascurabile il diametro interno del tubo e usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

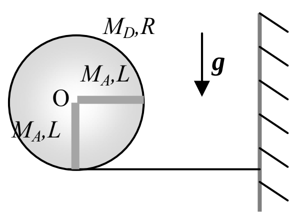


Disegno non in scala!!!!

   a) Quanto vale in modulo la velocità V_A del **carrellino** nell'istante in cui la pallina passa per il punto più basso del giro della morte (marcato con A in figura)? [Per il segno, usate il riferimento indicato in figura; inoltre spiegate **per bene** in brutta ogni passaggio della soluzione!]
   V_A = …………………………………… ~ ……… m/s $(gR)^{1/2} \sim 1.0$ m/s [il sistema pallina + carrellino (con tubo e quant'altro) è isolato in direzione orizzontale, per cui in questa direzione si conserva la quantità di moto totale, che è inizialmente nulla perché tutto è fermo. Deve quindi essere in ogni istante $0 =mv_x+MV = m(v_x+4V)$, da cui $v_x= -4V$. Nell'istante considerato, la velocità della pallina ha solo componente orizzontale, per cui $v_x = v$. Inoltre, non essendoci forze dissipative, si ha anche conservazione dell'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v^2 + (M/2)V^2 +\Delta U_G$. Nell'istante considerato $\Delta U_G =-mg\Delta h = -mgh=-10mgR$ (il proiettile è sceso per l'intera rampa), da cui, inserendo la conservazione della quantità di moto nella conservazione dell'energia meccanica, $0 = (m/2)(-4V)^2+(4m/2)V^2-10mgR$, che, risolta, dà la soluzione, in cui il segno negativo indica che il carrellino si muove verso la sinistra della figura]

   b) Quanto vale, **in modulo**, la velocità v_B della **pallina** nell'istante in cui esso raggiunge il punto B di figura, cioè passa (per la seconda volta quando percorre il giro della morte) per "metà altezza" della circonferenza? [Anche qui spiegate **per bene**!]
   v_B = …………………………………… ~ ……… m/s $(18gR)^{1/2} \sim 4.2$ m/s [si fanno le stesse considerazioni di prima, ma in questo caso si nota che all'istante considerato il proiettile si sta muovendo in direzione verticale **rispetto alla circonferenza** , cioè rispetto al carrellino. Pertanto la componente orizzontale della sua velocità deve essere uguale a quella del carrellino e la conservazione della quantità di moto lungo x diventa $0 = mV+MV$, cioè $V = 0$. Allora la conservazione dell'energia meccanica si scrive: $0 = (m/2)v^2-9mgR$ (la variazione di quota stavolta è $\Delta h=h-R=9R$), da cui la soluzione]

3. Un certo corpo rigido può essere schematizzato come costituito da due sottili aste **omogenee** di lunghezza L = 50 cm e massa $M_A = m$ = 2.0 kg, saldate su una faccia di un disco **disomogeneo** (ma comunque **a simmetria cilindrica**), di raggio $R = L$ = 50 cm e massa $M_D = 2m$ = 4.0 kg, così da ottenere la forma rappresentata in figura: in sostanza, le aste sono saldate lungo due raggi della stessa faccia del disco, in modo da formare tra loro un angolo retto. Il corpo è imperniato con attrito trascurabile sull'asse del disco (O nella sezione di figura) e può ruotare su un piano **verticale**: una fune **orizzontale** vincolata da un lato all'estremità di una delle due aste e dall'altro a una parete fissa e rigida verticale, mantiene il corpo **in equilibrio** nella configurazione di figura, in cui un'asta è



lungo la verticale (quella a cui è attaccata la fune) e l'altra lungo l'orizzontale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto valgono il modulo T della tensione della fune e il **modulo** F_O della forza esercitata dal perno sul corpo rigido in queste condizioni di equilibrio?

T = …………………………………… = ……… N $mg/2 \sim 10$ N [per l'equilibrio rotazionale occorre che la somma dei momenti delle forze sia nulla. Prendendo il punto O come polo, le forze che fanno momento sono la forza peso dell'asta "orizzontale", $M_A g$, applicata al suo centro di massa, che dista $R/2$ da O (essendo l'asta omogenea il centro di massa è a metà della lunghezza) e la tensione della fune. Infatti la forza peso del disco è a braccio nullo e lo stesso vale per quella dell'asta "verticale", come potete facilmente verificare. La forza peso tende a far ruotare il corpo in senso antiorario (in figura) e ha braccio $R/2$, la tensione della fune tende a far ruotare in senso orario e ha braccio R. Uguagliando i moduli dei momenti delle forze si ottiene il risultato]

F_O = …………………………………… = ……… N $mg(16+1/4)^{1/2}$ = 78 N [per l'equilibrio traslazionale la somma vettoriale delle forze agenti sull'intero corpo deve essere nulla, cioè deve essere: $0 = \boldsymbol{F_O} + 2M_A\boldsymbol{g} + M_C\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}$. La forza $\boldsymbol{F_O}$ ha componente verticale pari (e opposta) al peso di tutto il corpo e componente orizzontale pari (e opposta) alla tensione della fune. Poiché si tratta di un vettore e le componenti trovate sono ortogonali tra loro, usando l'espressione di T appena trovata e notando che $tg^2\theta = 3$, si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che la densità di massa del disco vari con la distanza r dall'asse secondo la legge $\rho_m = \rho_0 r^2/R^2$, con ρ_0 costante (incognita da determinare!), quanto vale il momento di inerzia I per rotazioni dell'**intero** corpo rigido attorno all'asse passante per O? [Ricordate che, per una variabile generica ξ, è $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, per $n \neq -1$; siete pregati di svolgere quanto più possibile i calcoli e di spiegarli in brutta, senza affidarvi troppo alla memoria (almeno per il cilindro disomogeneo)!]

I = …………………………………… = ……… kg m^2 $mL^2(2/3+4/3)=2mL^2$ = 1.0 kg m^2 [essendo un sistema composto, occorre sommare il momento di inerzia del disco I_D con quelli delle aste I_A. Ovviamente tutti i momenti vanno calcolati rispetto al polo O. Ricordando che per un'asta sottile omogenea imperniata a un suo estremo è $I_A=M_A L^2/3$ e notando che le due aste contribuiscono con lo stesso momento di inerzia, si ha che le due aste posseggono un momento di inerzia complessivo $2mL^2/3$. Per il disco, usando il corretto elemento di volume (guscio cilindrico di spessore dr), $dV=2\pi rhdr$, con h spessore (ovvero altezza) del disco, occorre risolvere l'integrale: $I_D = \int_0^R \rho_0 (r^2/R^2) r^2 2\pi hrdr = (\rho_0 2\pi h/R^2)\int_0^R r^5 dr = (\rho_0 2\pi h/R^2)(R^6/6)$. Il termine costante incognito ρ_0 si può determinare esprimendo la massa M_D in funzione della densità di massa, cioè risolvendo l'integrale $M_D = \int_0^R \rho_0 (r^2/R^2) 2\pi hrdr = (\rho_0 2\pi h/R^2)\int_0^R r^3 dr = (\rho_0 2\pi h/R^2)(R^4/4)$. Estraendo da quest'ultima equazione l'espressione di ρ_0 e sostituendola nell'altra si trova $I_D = 2M_D R^2/3 = 4mL^2/3$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/4/2011 Firma: