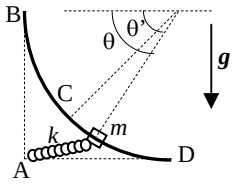
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I con lab. - 21/6/2011

Nome e cognome: …… Matricola: ……

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

PARTE 1

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 50 cm ed è disposto su un piano verticale. Al manicotto è agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 0.10 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** (L_0 = 0, in pratica!). L'altra estremità della molla è vincolata a un punto fisso, indicato con A in figura, che corrisponde all'intercetta tra la verticale e l'orizzontale dei punti di inizio e fine della guida: dato che questa descrizione risulterà incomprensibile ai più, vi invito a osservare la figura, che si riferisce a una posizione "generica" del tondino, quella in cui l'angolo tra orizzontale e raggio "vettore" vale θ (generico). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 1/2^{1/2}$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Esprimete la funzione $L(\theta)$ che fornisce la lunghezza della molla per un valore generico dell'angolo θ (che, come già affermato, è quello tra orizzontale e raggio "vettore", vedi figura). [Dovete scrivere una funzione dell'angolo θ (quello indicato in figura) e quindi non utilizzate valori numerici! Notate che si tratta di un semplice problema di geometria…]

$L(\theta)$ = ……. $R(3-2(sin\theta+cos\theta))^{1/2}$ [immaginate di porre un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto A, chiamando asse X e Y gli assi orizzontale e verticale. Se indicate con x,y la posizione del manicotto in questo riferimento, è chiaro che la lunghezza della molla è $L = (x^2+y^2)^{1/2}$. Ricordando un po' di trigonometria e osservando la figura, dovrebbe esservi evidente che si ha $x=R-Rcos\theta$ e $y=R-Rsin\theta$. Dunque, riorganizzando appena le espressioni, $L=R((1-cos\theta)^2+(1-sin\theta)^2)^{1/2}$, da cui, svolgendo i binomi e ricordando che $sin^2\theta+cos^2\theta = 1$, il risultato]

b) Immaginate che il manicotto si trovi inizialmente **fermo** sulla sommità della guida, cioè nel punto indicato come B in figura, e che da qui venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v' con cui passa, se ci passa, per il "punto di mezzo" della guida (punto C in figura, quando il manicotto passa per questo punto l'angolo θ vale θ' = π/4)? [Trascurate ogni forma di attrito]

v' = ……. ~ ……. m/s $(gR2^{1/2}+(k/m)R^2(2^{1/2}-1))^{1/2} \sim 2.7$ m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. Alla variazione di energia potenziale contribuiscono l'energia potenziale della forza peso (gravitazionale) e quella elastica della molla, cioè $\Delta U= \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$. La variazione dell'energia potenziale gravitazionale è dovuta alla discesa del manicotto per un tratto che vale, in modulo, $Rsin\theta'$, per cui $\Delta U_G= -mgRsin\theta'=-mgR/2^{1/2}$. La variazione di energia elastica della molla è dovuta al fatto che essa cambia la sua lunghezza dal valore iniziale $L(0)=R$ al valore "finale" $L(\theta')=R(3-2(sin\theta'+cos\theta'))^{1/2} = R(3-4/2^{1/2})^{1/2}$. Ricordando che l'energia elastica è, nel caso di molla lunga L e con lunghezza di riposo nulla, $U_{ELA}=(k/2)L^2$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)R^2(3-4/2^{1/2})-(k/2)R^2=(k/2)R^2(2-4/2^{1/2})=kR^2(1-2^{1/2})$.. Unendo il tutto e rimaneggiando si trova la soluzione: si noti che la soluzione esiste, dunque il manicotto passa effettivamente per la posizione richiesta, dato che il suo movimento comporta una diminuzione dell'energia potenziale]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che il tondino esercita sul manicotto nell'istante in cui esso passa per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per il punto di mezzo della guida (punto C di figura, angolo θ' = π/4)? [Attenti: il manicotto "passa" per quella posizione, dunque non è fermo…]

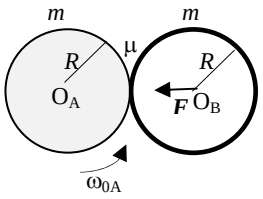
N = ……. ~ ……. N $mv'^2/R+mg/2^{1/2} +kR(3-2x2^{1/2})^{1/2} \sim 0.63$ N [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio R con una data velocità. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto, le quali sono la componente radiale della forza peso, che punta verso l'esterno della circonferenza e vale $mgsin\theta'=mg/2^{1/2}$, la forza elastica, che è radiale e punta anch'essa verso l'esterno della circonferenza (la molla è estesa, avendo lunghezza di riposo nulla!) e la reazione vincolare, che invece punterà verso il centro di curvatura della circonferenza. Da qui la soluzione]

d) E quanto vale la velocità v'' con cui il manicotto arriva alla fine della guida (punto D di figura), se ci arriva?

v'' = ……. ~ ……. m/s $(2gR)^{1/2} \sim 3.1$ m/s [anche qui adottiamo la conservazione dell'energia meccanica, che stavolta si scrive in modo semplicissimo. Infatti la molla non cambia la sua lunghezza tra inizio e "fine" (essa è sempre lunga R!) e dunque non c'è variazione dell'energia elastica. Resta la variazione dell'energia potenziale gravitazionale, che è pari a $-mgR$, da cui la soluzione che, anche in questo caso, esiste!]

PARTE 2

2. All'interno di un macchinario si trovano due "ruote", denominate A e B, entrambi di raggio R = 30 cm, che possono ruotare con **attrito trascurabile** attorno a dei perni passanti per i propri assi geometrici, O_A e O_B. Le due ruote hanno anche identica massa m = 1.0 kg, però la ruota A è piena e omogenea, mentre la ruota B assomiglia a un "cerchione di bicicletta", cioè tutta la sua massa è praticamente distribuita in modo omogeneo sulla circonferenza. Le superfici laterali delle due ruote sono scabre e hanno un coefficiente di attrito μ = 0.50: notate che tale coefficiente di attrito vale sia nel caso di attrito dinamico che di attrito statico. Inizialmente le due ruote non sono a contatto tra di loro, la A ruota con velocità angolare ω_{0A} = 50 rad/s (è stata messa in rotazione in precedenza da una qualche causa esterna!) e la ruota B è ferma. Quindi le due ruote vengono poste a contatto l'una con l'altra nella situazione rappresentata in figura, dalla quale si vede che il contatto avviene sulla superficie laterale. A questo scopo, una forza di modulo F = 20 N è applicata al perno O_B, il quale è mobile nella direzione della congiungente fra i due perni (il perno O_A è invece fisso e rigido). Si osserva che, trascorso un certo intervallo di tempo Δt, le due ruote si muovono con velocità angolare dello stesso modulo ω. [Le ruote ruotano su un piano orizzontale e la forza peso non c'entra nulla!]



a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto hanno le due ruote quando vengono messe a contatto e determinate l'intervallo di tempo Δt di cui sopra e il modulo della velocità angolare comune ω che viene raggiunta dalle due ruote.

Discussione : …….. Come anche suggerito dal testo, la ruota B si metterà in moto rotatorio. Essa potrà ruotare, partendo da ferma, perché sottoposta a un momento di forze, secondo l'equazione del moto rotatorio $\alpha_B = \Sigma\tau/I_B$. L'unica forza applicata a B che può provocare un momento è la forza di attrito F_A esercitata al punto di contatto tra le due ruote. Infatti le altre forze, in particolare quella applicata sul perno O_B e la reazione alla forza $\boldsymbol{F}$, hanno evidentemente braccio nullo. Nella fase transiente del moto, quando le velocità angolari delle due ruote sono diverse (in modulo) e quindi c'è strisciamento nel punto di contatto (anzi, nella generatrice delle ruote che è a contatto reciproco), la forza di attrito è dinamica, per cui $F_A=\mu N$, La reazione vincolare che compare in questa espressione deve essere normale alla superficie di contatto, per cui deve essere radiale rispetto alle ruote. Dato che le ruote sono poste a contatto tra di loro a causa della forza $\boldsymbol{F}$, la reazione deve bilanciare tale forza, cioè $N = F$. (ovviamente una forza analoga insisterà sul perno O_A, necessaria a tenere in equilibrio lungo la direzione orizzontale le due ruote, ma di questa forza non ci interessa). La forza di attrito, inoltre, dovendosi opporre allo strisciamento, ha direzione tangenziale rispetto alle ruote, per cui il suo braccio è pari al raggio delle ruote stesse. Rispetto al sistema delle due ruote, la forza di attrito è una forza interna : dunque c'è una forza dovuta all'attrito di B che agisce su A e una forza uguale e opposta che agisce su B. In particolare la ruota B accelera e si mette a ruotare in senso orario ; la ruota B, invece, che inizialmente ruota in senso antiorario, continuerà a ruotare nello stesso verso ma la sua velocità angolare diminuirà in modulo, cioè il suo moto sarà decelerato. L'accelerazione angolare della ruota B vale $\alpha_B=-F_AR/I_B=F_A/(mR)=\mu F/(mR)$, avendo notato che, per un « cerchione » di bicicletta, si ha $I = mR^2$ e avendo posto un segno positivo per significare quello che abbiamo già chiarito a parole. L'accelerazione angolare sulla ruota A la scriveremo invece come $\alpha_A = -F_AR/I_A =-2\mu F/(mR)$, avendo notato che $I_A = mR^2/2$ (ruota piena e omogenea). Notate che la convenzione dei segni che abbiamo usato è un po' sui generis, e funziona soltanto se si lavora con i moduli delle velocità angolari : ricordatevelo, oppure provate a scrivere le equazioni con lo stesso segno convenzionale per le due ruote. Parlando di moduli, la ruota A dimnuirà la propria velocità angolare mentre la ruota B si metterà in movimento. Come suggerito dal testo, a un certo istante le due velocità angolari coincideranno in modulo (occhio : sono opposte, in realtà…). Di conseguenza anche le velocità tangenziali dei punti di contatto delle due ruote saranno, in modulo, le stesse e non ci sarà più strisciamento. Da questo istante in poi non ci si saranno più perdite di energia (cinetica) per attrito e le velocità resteranno costanti al valore ω.

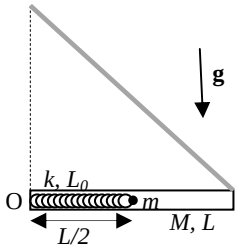
Δt = …….. = …….. s $\omega_{0A}mR/(3\mu F) = 0.50$ s [osservando che le accelerazioni determinate sopra sono uniformi e costanti, si avrà che le leggi orarie dei moduli delle velocità angolari assumeranno la forma : $\omega_B = \alpha_B(t-t_0)$ e $\omega_A = \omega_{0A}+\alpha_A(t-t_0)$, con t_0 istante in cui avviene il contatto . L'intervallo di tempo richiesto è quello per cui le due velocità risultano uguali, cioè $\Delta t = \omega_{0A}/(\alpha_B-\alpha_A)$, da cui, sostituendo le espressioni trovate prima, la soluzione]

ω = …….. = …….. rad/s $\alpha_B\Delta t = (\mu F/(mR))(\omega_{0A}mR/(3\mu F)) = \omega_{0A}/3 = 17$ rad/s [vedi sopra]

b) Quanto vale il lavoro L_{ATT} fatto dalla forza di attrito che si esercita al contatto tra le due ruote durante il processo di cui sopra? [Il "processo" comincia nel momento in cui le due ruote entrano in contatto! Trascurate quello che avviene prima, cioè l'avvicinamento dei due perni]

L_{ATT} = ……~ …… J $-\omega_{0A}^2/(6mR^2) = -37.5$ J [per motivi di bilancio energetico, il lavoro della forza di attrito deve uguagliare la variazione di energia cinetica (infatti nel processo non ci sono variazioni di energia potenziale…), cioè $L_{ATT} = \Delta E_K = ((I_A+I_B)/2)\omega^2-(I_A/2)\omega_{0A}^2$, da cui, sostituendo e rimaneggiando, la soluzione]

3. Un sottile pezzo di tubo, di massa M = 1.0 kg e lunghezza L = 50 cm, è imperniato a un suo estremo (O in figura) in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. All'interno del tubo, che è cavo, si trova un oggetto puntiforme, di massa $m = M/2$ = 0.50 kg, che può muoversi con attrito trascurabile all'interno del tubo. L'oggetto è agganciato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 2.0x10^5 N/m e lunghezza di riposo $L_0 = L/2$: questa molla è quindi tenuta in posizione **compressa** da un qualche gancetto solidale al tubo. All'estremità del tubo, ovviamente quella opposta rispetto al perno, è attaccata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro capo è attaccato a un chiodo posto sulla verticale di O, a una distanza $d = L$ = 50 cm da questo. Inizialmente il sistema è in **equilibrio** nella configurazione rappresentata in figura: il tubo ha il suo asse in direzione orizzontale e l'oggetto puntiforme si trova a metà lunghezza del tubo. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F_O che il perno esercita sull'asta in queste condizioni di equilibrio?

T = …… ~ ..... N $(M+m)g2^{1/2} = 3mg/(2\sin\theta) = 3mg/2^{1/2} \sim 10$ N [il sistema deve essere in equilibrio rotazionale e traslazionale. Per l'equilibrio rotazionale rispetto al polo O si ha che le forze che hanno momento sono le forze peso di tubo e oggetto, entrambe applicate a metà lunghezza del tubo e entrambe di braccio $L/2$, e la tensione della fune, che ha invece braccio pari a $L\sin(\pi/4)=L/2^{1/2}$ (si noti che il triangolo rettangolo formato da fune, tubo e pezzo di parete è isoscele, per cui l'angolo compreso tra tubo e fune vale $\pi/4$). I momenti delle forze peso tendono a far ruotare il sistema in senso orario, la tensione della fune in senso antiorario: uguagliando i momenti si ottiene la soluzione]

F_O = …… ~ ..... N $mg\,(9/2)^{1/2} = 3mg/2^{1/2} \sim 10$ N [la forza del perno garantisce l'equilibrio traslazionale bilanciando le forze peso e la tensione della fune. Poiché viene richiesto il modulo di tale forza, occorre valutarne separatamente le componenti orizzontale e verticale. In direzione orizzontale, detto θ l'angolo tra tubo e fune e scegliend come positivo un asse che punta verso la destra della figura, si ha $F_{OX} = T\cos\theta$. In direzione verticale, scegliendo un asse che punta verso l'alto, si ha $F_{OY} = (M+m)g-T\cos\theta$. Ricordando che l'angolo vale $\theta = \pi/4$ e che il modulo si ottiene con una somma in quadratura delle componenti, si ottiene la soluzione

b) A un dato istante la fune viene tagliata e il tubo con l'oggetto e la molla al suo interno risulta libero di ruotare con velocità angolare iniziale nulla. Nell'istante in cui l'asse del tubo si trova in direzione **verticale**, il gancetto che teneva compressa la molla viene rimosso e l'oggetto viene "sparato via" violentemente fuori dal tubo (la molla istantaneamente si allunga fino alla propria lunghezza di riposo). Discutete per benino, in brutta, quali grandezze dinamiche (energia, quantità di moto, momento angolare) si conservano nel processo di sparo, cioè tra subito prima e subito dopo lo sparo stesso, e spiegate perché. Nella discussione cercate di determinare la velocità angolare ω' del tubo **subito dopo** lo sparo? [Assumete per il tubo il momento di inerzia di una sottile asta omogenea della stessa massa e lunghezza]

Discussione : …….. Il processo di sparo avviene « istantaneamente » e somiglia molto a una frammentazione. In questo processo, vista l'assenza di attriti, si può supporre ragionevolmente che l'energia meccanica si conservi. **Subito prima** dello sparo, l'energia cinetica è data dalla rotazione dell'asta e dal moto (tangenziale) dell'oggetto che a essa è, praticamentem solidale. Dunque, detta ω_0 la velocità angolare del tubo **subito prima** dello sparo e v_0 la velcoità (tangenziale) dell'oggetto, si ha $E_{K0} = (I/2)\omega_0^2 + (m/2)v_0^2 = (mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2$, dove abbiamo usato $I = ML^2/3 = 2mL^2/3$ per il momento di inerzia del tubo e abbiamo notato che la velocità (tangenziale) dell'oggetto è $v_0 = \omega_0 L/2$ (l'oggetto è ancora a metà della lunghezza del tubo). **Subito dopo** lo sparo si ha $E_K' = (I/2)\omega'^2 + (m/2)v'^2 = (mL^2/3)\omega'^2+(m/2)v'^2$, dove v' è il modulo della velocità dell'oggetto dopo lo sparo, che non conosciamo. La variazione di energia potenziale dipende dalla variazione di quota dell'oggetto, $\Delta U_G = -mgL/2$, e dalla variazione di energia elastica della molla, $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(L/2)^2$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che inizialmente la molla è compressa per un tratto $L_0 - L/2 = L-L/2 = L/2$ e « finalmente » è alla lunghezza di riposo. Notate che, numericamente, il contributo di ΔU_{ELA} è molto maggiore di quello di ΔU_G, per cui quest'ultimo termine si può trascurare. La quantità di moto totale del sistema palesemente non si conserva : infatti il carattere impulsivo del processo permette di trascurare gli effetti della forza peso, ma non quelli delle forze del perno, per cui il sistema non è isolato. Tuttavia il momento di queste forze esterne impulsive è nullo, essendo nullo il braccio (rispetto al polo O), per cui si conserva il momento angolare. Prima dello sparo esso vale (all solito consideriamo la componente assiale) $l_0 = I\omega_0 + mv_0L/2 = (2mL^2/3+mL^2/4)\omega_0 = 11mL^2\omega_0/12$. Dupo l'urto esso si esprime come $l' = I\omega' + |\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v'}|$. Il momento angolare dell'oggetto subito dopo lo sparo richiede di conoscere la direzione della velocità $\boldsymbol{v'}$, che è un problema abbastanza complicato da risolvere analiticamente. Tuttavia, tenendo conto del fatto che la molla è molto rigida e che il processo di sparo è istantaneo, possiamo approssimare dicendo che l'oggetto viene sparato **lungo la verticale**. In questo modo il braccio della quantità di moto è nullo e nullo è il momento angolare portato dall'oggetto. In definitiva, allora, con le approssimazioni citate possiamo affermare che : $0 = (mL^2/3)\omega'^2+(m/2)v'^2 -(mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2 -(k/2)(L/2)^2$ e $11mL^2\omega_0/12 = (2mL^2/3)\omega'$. Queste sono due equazioni che contengono le incognite ω', v', ω_0. Quest'ultima può essere determinata usando la conservazione dell'energia meccanica nella fase di « discesa » del tubo : $0 = \Delta E_K+\Delta U = (mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2 - mgL/2-MgL/2 = (mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2 - 3mgL/2$, dove abbiamo notato che il centro di massa del tubo scende di un tratto $L/2$ e di altrettanto scende l'oggetto. In questo modo si ha un sistema di tre eqauzioni e tre incognite che puàò essere risolto (in realtà l'incognita v' non serve alla soluzione del problema), portando alla seguente determinazione **approssimata** (in cui cioè si considera solo il moto radiale dell'oggetto puntiforme dopo lo sparo) :$\omega' \sim (8/11)\omega_0 \sim 6$ rad/s.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/6/2011 Firma: