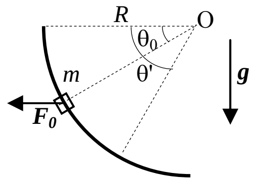
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE - 12/7/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.***
Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

-- **PARTE 1**

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 2.0 m ed è disposto su un piano verticale. Inizialmente il manicotto si trova fermo **in equilibrio** alla posizione $\theta_0 = \pi/6$ (l'angolo è quello tra "raggio vettore" e orizzontale, vedi figura) sotto l'azione di una forza **orizzontale,** con il verso indicato in figura, di modulo F_0 (incognito) costante. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ e $sin(\pi/6) = 1/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Quanto vale il modulo N_0 della reazione vincolare esercitata dalla guida sul manicotto in queste condizioni di equilibrio?

N_0 = ……………………. = ……… N $\quad mgsin\theta_0 + mgcos\theta_0/tg\theta_0 = mg(sin^2\theta_0+cos^2\theta_0)/sin\theta_0 = mg/sin\theta_0$ = 0.98 N [sul manicotto agiscono la reazione vincolare, di direzione radiale essendo prodotta da una guida semicircolare, la forza peso, verticale, e la forza $\mathbf{F_0}$, orizzontale. In direzione tangenziale la condizione di equilibrio implica: $mgcos\theta_0 = F_0 sin\theta_0$; in direzione radiale, dove anche c'è equilibrio (essendo il manicotto fermo) si ha: $mgsin\theta_0 + F_0 cos\theta_0 = N$. Sostituendo il valore del modulo di $F_0 = mg/tg\theta_0$ trovato per l'equilibrio in direzione tangenziale si ottiene il risultato]

b) Immaginate ora che, a un certo istante, la forza applicata orizzontalmente al manicotto venga istantaneamente annullata. In queste condizioni il manicotto si mette in movimento: quanto vale, in modulo, la sua velocità v' quando esso passa per la posizione $\theta' = \pi/3$? [Può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$. Trascurate ogni forma di attrito!]

v' = ……………………. ~ ………. m/s $\quad (gR(3^{1/2}-1))^{1/2}$ ~ 3.8 m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale, che è solo di tipo gravitazionale (dovuta al lavoro della forza peso), è legata alla variazione di quota Δh del manicotto: con un po' di trigonometria si vede che $\Delta h = R(sin\theta'-sin\theta_0)$, per cui $\Delta U = \Delta U_G = mgR(sin\theta'-sin\theta_0)$. Si ha allora: $(m/2)v'^2 = mgR(sin\theta'-sin\theta_0) = mgR((3^{1/2}-1)/2$, dove abbiamo usato i valori delle varie funzioni trigonometriche, da cui la soluzione]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N' che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per $\theta' = \pi/3$? [Attenti: il manicotto "passa" per quella posizione, dunque **non è fermo**…]

N' = ……………………. ~ ………. N $\quad mg(3x3^{1/2}/2-1)$ ~ 0.78 N [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio R con una data velocità v'. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto. Esse sono la componente radiale della forza peso, che punta verso l'esterno della circonferenza e vale $mgsin\theta'=3^{1/2}\ mg/2$, e la reazione vincolare N' incognita, che invece punta verso il centro di curvatura della circonferenza. Dunque deve essere $mv'^2/R = mg(3^{1/2}-1) = N'-3^{1/2}mg/2$. Da qui la soluzione]

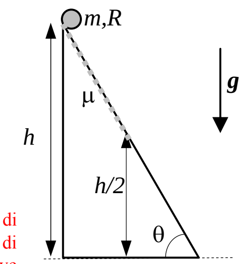
d) Quanto varrebbe la velocità v' di cui al punto b) nel caso ci fosse un attrito dinamico tra guida e manicotto con coefficiente di attrito μ = 0.50? Discutete per benino in brutta come cambierebbe in queste condizioni l'impostazione del problema e cercate di dare una risposta. [Attenzione: potrebbe essere non facilissimo arrivare alla risposta; provate almeno a impostarla…]

Discussione: ………………………… La soluzione si imposta in modo molto semplice inserendo il lavoro della forza di attrito, negativo, nell'equazione del bilancio energetico. Notate che il lavoro della forza di attrito L_A è negativo, per cui il valore della velocità è minore che nel caso precedente, e potrebbe anche verificarsi, in linea di principio, che l'argomento della radice quadrata che si trova nell'espressione di v' diventi negativa (cosa che implicherebbe l'impossibilità per il manicotto di giungere alla posizione θ'). La difficoltà principale è nell'esprimere il lavoro $L_A = \int \mu N \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{dl} = -\mu|\int N\, dl|$ (nell'ultimo passaggio abbiamo prima indicato con il versore $\boldsymbol{\theta}$ la direzione – tangenziale – della forza di attrito e quindi notato che la forza di attrito è sempre opposta allo spostamento, anch'esso tangenziale, per cui il prodotto scalare dà un segno negativo, e abbiamo messo un modulo per non avere problemi di segno). Infatti la reazione vincolare è chiaramente non costante né uniforme. La sua espressione dipendente da θ è, sulla base di quanto scritto prima, $N(\theta) = mgsin\theta + mv^2/R$. Purtroppo, anche la velocità v è funzione di θ, e la dipendenza implica di sapere il valore della reazione vincolare (si tratta di esprimere la velocità in ogni istante usando proprio il risultato richiesto). Il problema, quindi, è tutt'altro che banale da risolvere… Possiamo fare un'approssimazione, abbastanza sensata, supponendo che la velocità del manicotto non cambi "troppo" rispetto al caso senza attrito e servendoci di questa affermazione per esplicitare $N(\theta)$. In buona sostanza, poniamo $N(\theta) = mv^2/R+mgsin\theta \sim 2mg(sin\theta-sin\theta_0)+mgsin\theta = 3mgsin\theta-2mgsin\theta_0$. A questo punto, notando che lo spostamento dl avviene sulla circonferenza e pertanto vale $dl = Rd\theta$, il calcolo del lavoro della forza di attrito richiede di valutare questo integrale: $L_A = -\mu mgR|\int_{\theta 0}^{\theta'}(3sin\theta - sin\theta_0)\, d\theta| = -\mu mgR|-3cos\theta'+3cos\theta_0-sin\theta_0(\pi/3-\pi/6)| = -\mu gR|-3/2+3x3^{1/2}/2-\pi/6|$. Questo valore va considerato nel computo del bilancio energetico, cioè il bilancio energetico diventa: $(m/2)v'_{ATT}{}^2 = mgR((sin\theta'-sin\theta_0)-\mu|3/2-3x3^{1/2}/2-\pi/12|)$

v'_{ATT} = ……………………. ~ ………. m/s $\quad \sim (gR(3^{1/2}-1-0.57))^{1/2}$ ~ 3.2 m/s [vedi sopra: ricordate che si tratta di un risultato approssimativo, che probabilmente sottostima la velocità avendo sovrastimato la reazione vincolare e dunque la forza di attrito!]

-- **PARTE 2**

2. Un piano inclinato, che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale ed è alto h = 7.5 m, ha la sua superficie per la prima metà (quella "più in alto") scabra, con coefficiente di attrito μ = 0.80, e per la seconda metà liscia, cioè con attrito trascurabile. In cima al piano inclinato si trova, fermo, un cilindro pieno e omogeneo di raggio R = 70 cm e massa m = 2.0 kg che a un certo istante viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro nella sua fase di discesa per la prima metà del piano inclinato (dove è presente attrito) e stabilite la velocità del centro di massa, v_{CM}', e la velocità angolare, ω', del cilindro al termine della zona scabra.

Discussione : ……………………….. Essendo il cilindro un corpo rigido esteso occorre verificare se il moto può essere di rotolamento puro. Le equazioni del moto rotazionale (rispetto al centro di massa, cioè al centro del cilindro)e quella del moto traslazionale del centro di massa, scritta rispetto alla direzione del piano inclinato, scegliendo il verso positivo orientato verso il basso, si scrivono : $\alpha = F_A R/I = 2F_A/m$, dove abbiamo notato che l'unica forza che fa momento è la forza di attrito, di modulo F_A , e che il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo vale $I = mR^2/2$, e $a_{CM} = gsin\theta - F_A/m$. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, si ha la relazione geometrica $\alpha = a_{CM}R$. Risolvendo il sistema di tre equazioni così ottenuto per l'incognita F_A si ottiene : $F_A = mgsin\theta/3$. Ora il valore massimo della forza di attrito (statica) è $F_{A,MAX} = \mu N = \mu mgcos\theta$; calcolando, si ottiene per la validità del moto di rotolamento puro $tg\theta \leq 3\mu$, che è verificata con i dati del problema, per cui la forza di attrito necessaria per il moto di rotolamento puro può effettivamente essere fornita dal contatto scabro considerato. Quindi, essendo le equazioni scritte indipendenti dal tempo, il moto inizia con le caratteristiche del rotolamento puro e le mantiene **per tutta la prima metà** del piano inclinato.

v_{CM}' = ……………………….. = ……….. m/s $\quad (2gh/3)^{1/2}$ = 7.0 m/s [essendo il moto di rotolamento puro si ha conservazione dell'energia meccanica (la forza di attrito statica che vi è coinvolta non compie lavoro !), cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 - mgh/2 = 3mv_{CM}'^2/2 - mgh/2$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo e notato che, in condizioni di rotolamento puro, si ha $\omega = v_{CM}/R$ e che la variazione di quota del centro di massa del cilindro è pari a metà delli'altezza del piano inclinato. Da qui la soluzione]

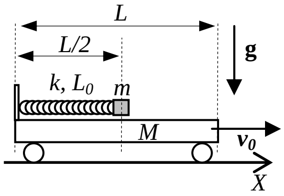
ω'= ……………………….. = ……….. rad/s $\quad v_{CM}'/R$ = 10 rad/s [vedi sopra]

b) E quanto valgono la velocità del centro di massa, v_{CM}'', e la velocità angolare, ω'', del cilindro al termine **dell'intero piano inclinato**? [Attenti alle trappole! Spiegate bene in brutta cosa fate e perché…]

v_{CM}'' = ……………………….. ~ ……….. m/s $\quad (v_{CM}'^2+ gh)^{1/2} = (gh(2/3+1))^{1/2} = (5gh/3)^{1/2}$~ 11 m/s [nella seconda metà del piano inclinato viene a mancare la forza di attrito, dunque il moto non può più essere di rotolamento puro ! Tuttavia, proprio perché non ci sono forze di attrito, le uniche che potrebbero avere momento non nullo, l'accelerazione angolare è nulla e la velocità angolare **resta quella determinata al punto precedente**, cioè ω'' = ω'. Ovviamente continua a conservarsi l'energia meccanica, per cui : $0 = (m/2)v_{CM}''^2 + (I/2)\omega''^2 - (m/2)v_{CM}'^2 - (I/2)\omega'^2 - mgh/2 = (m/2)(v_{CM}''^2 - v_{CM}'^2) - mgh/2$, da cui la soluzione]

ω''= ……………………….. = ……….. rad/s $\quad$ ω'= 10 rad/s [vedi sopra ; notate che, non essendo il moto di rotolamento puro, **non vale** la relazione geometrica tra le velocità angolare e di traslazione del centro di massa]

3. Un carrellino di massa M = 4.0 kg può muoversi con **attrito trascurabile** lungo un binario **orizzontale**. Sul carrellino si trova un oggetto **puntiforme**, di massa $m = M/4$ = 1.0 kg, che può muoversi con **attrito trascurabile** sul pianale del carrellino, che ha lunghezza L = 20 cm. L'oggetto puntiforme è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 5.0 \times 10^2$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = L$ = 20 cm, il cui altro estremo è vincolato a una sottile sponda che si trova al bordo del carrellino (vedi figura!). Inizialmente l'oggetto puntiforme si trova fermo **rispetto al carrellino**, grazie a un qualche gancetto, trovandosi a metà della lunghezza del pianale, come mostrato in figura; tutto il sistema si muove con velocità v_0 = 1.0 m/s nel verso indicato in figura. All'istante t_0 = 0 il gancetto viene rimosso e la molla comincia a estendersi, finché a un certo istante t' l'oggetto puntiforme giunge al bordo del carrello.



a) Quanto vale la velocità V' del carrello nell'istante t'? [Notate che in questo istante la molla si trova alla propria lunghezza di riposo…]

V' = …………………………………… = ... m/s $v_0-(k/(5m))^{1/2}L/4 = 0.50$ m/s [il sistema costituito da carrello e oggetto è isolato in direzione orizzontale, per cui in questa direzione si conserva la quantità di moto. Quindi in ogni istante deve essere $(m+M)v_0 = mv+MV$, ovvero, tenendo conto della relazione fra le masse, $5v_0 = v+4V$. Inoltre si conserva l'energia meccanica, cioè: $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA}$. All'istante considerato la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, mentre inizialmente era compressa per un tratto $L-L/2 = L/2$, per cui $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(L/2)^2$. Si ha quindi $(m/2)v'^2+(M/2)V'^2-((m+M)/2)v_0^2 = (m/2)(v'^2+4V'^2-5v_0^2) = (k/2)(L/2)^2$, dove abbiamo usato la relazione fra le masse. Usando la conservazione della quantità di moto si ha: $(5v_0-4V')^2+4V'^2-5v_0^2 = 20V'^2-40v_0V'+20v_0^2 = 20(V'^2-2v_0V'+v_0^2) = 20(V'-v_0)^2 = (k/m)(L/2)^2$, da cui $V' = v_0 \pm (k/(20m))^{1/2}L/2$; delle due soluzioni va scelta ragionevolmente quella con il segno negativo, dato che, per la geometria del sistema, ci si attende che la velocità del carrello diminuisca rispetto al valore iniziale, da cui la risposta]

b) Quanto vale lo **spostamento** $\Delta x_{CM}'$ che il **centro di massa del sistema** compie nell'intervallo di tempo 0, t'? [Tenete conto che carrello e oggetto puntiforme formano un sistema e che tutto, all'inizio, è in movimento…]

$\Delta x_{CM}'$ = …………………………………… ~ .... m $v_0T/4 = v_0\pi/(2\omega) = 6.3 \times 10^{-2}$ m [il moto relativo del sistema è governato dalla presenza della molla; è facile dimostrare che esso è di tipo armonico, con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, dove la massa ridotta vale $1/\mu = 1/m + 1/M = 5/(4m)$, per cui $\omega = (5k/(4m))^{1/2}$. Quindi l'oscillazione dell'oggetto **rispetto al carrello** avviene con un periodo $T = 2\pi/\omega$: in tale periodo l'oggetto compie un'oscillazione completa, che lo riporta alla posizione (relativa) di partenza. La posizione di equilibrio dell'oscillazione si ha quando la lunghezza della molla è pari alla lunghezza di riposo, cioè quando l'oggetto si trova al bordo del carrello, come nella situazione considerata. Il tempo necessario è allora $t' = T/4$. Il centro di massa del sistema, che è isolato, si muove sempre con la stessa velocità, che è pari a quella iniziale, cioè pari a v_0. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/7/2011 Firma: