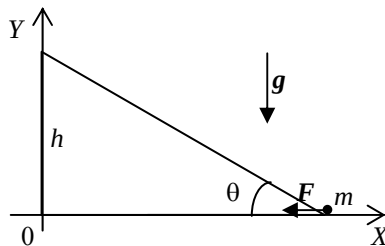


Nome e cognome: Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un oggetto puntiforme di massa $m = 0.10$ kg si muove sotto l'effetto di una forza **disomogenea** F , creata chissà come. Questa forza è diretta orizzontalmente e la sua componente X dipende dalla posizione secondo la legge: $F_X = -F_0 x/h$, con $F_0 = 2.0$ N (valore costante e uniforme), x coordinata orizzontale dell'oggetto puntiforme rispetto al sistema di riferimento che sarà specificato fra breve e $h = 2.0$ m. Per effetto di questa forza l'oggetto sale lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.0$ m (è lo stesso h di prima!) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. La figura chiarisce la geometria del problema e mostra il sistema di riferimento che **dovete** usare: in particolare l'asse X è orizzontale, l'asse Y è verticale e l'origine si trova sullo "spigolo" in basso del piano inclinato (vedi figura!). [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]



- a) Esiste una posizione di equilibrio per l'oggetto puntiforme sul piano inclinato? Se sì, quanto vale la quota y_{EQ} della posizione di equilibrio? [Usate, ovviamente, il sistema di riferimento indicato in figura]

$y_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $h - h(mg/F_0)tg^2\theta = 0.67$ m [poiché l'intensità della forza diminuisce quando l'oggetto si muove verso l'alto del piano inclinato (la coordinata x diventa più piccola per come è stato scelto il sistema di riferimento), è a prima vista possibile che esista una posizione di equilibrio. All'equilibrio la somma delle forze sull'oggetto deve annullarsi, e questo deve verificarsi componente per componente. Le forze sull'oggetto sono il peso, verticale la forza F , orizzontale, e la reazione vincolare, diretta per definizione in direzione ortogonale al piano. Le componenti della reazione verticale (di modulo N) in direzione X e Y (rispetto al riferimento indicato) sono $N_X = N\sin\theta$ e $N_Y = N\cos\theta$. L'equilibrio lungo l'asse X richiede: $0 = F_X + N_X = -F_0 x_{EQ}/h + N\sin\theta$; quello lungo l'asse Y : $0 = -mg + N\cos\theta$. Risolvendo si ottiene $x_{EQ} = hN\sin\theta/F_0 = hmg tg\theta/F_0$. A questo punto occorre determinare un legame, di tipo geometrico, tra la coordinata x e quella y per un punto che si trovi sul piano inclinato. Se consideriamo il triangolo rettangolo determinato dalla sezione del piano inclinato rappresentata in figura, possiamo notare che il "cateto orizzontale" ha lunghezza $b = h/tg\theta$ (per la trigonometria). Dunque la posizione di equilibrio trovata è tale che la sua distanza, misurata lungo X , rispetto al vertice "di destra" del triangolo è $b - x_{EQ} = h/tg\theta - hmg tg\theta/F_0$. La coordinata y_{EQ} si trova moltiplicando questo valore per $tg\theta$, da cui la soluzione. Si noti che la posizione di equilibrio determinata si trova a una quota minore dell'altezza h del piano, dunque l'equilibrio si può effettivamente avere quando l'oggetto si trova sul piano, come da testo]

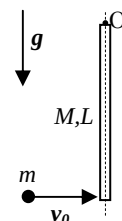
- b) Quanto vale il modulo della reazione vincolare N che la superficie del piano esercita sull'oggetto in condizioni di equilibrio?

$N = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ N $mg/\cos\theta \sim 1.1$ N [vedi sopra: si noti che il valore è costante e uniforme per ogni posizione sul piano inclinato]

- c) Supponete ora che inizialmente l'oggetto si trovi fermo alla base del piano inclinato (a quota $y_0 = 0$, per intenderci) con la forza F "spenta" e che a un certo istante la forza venga "accesa". Quanto vale il modulo della velocità v' con cui l'oggetto raggiunge la sommità del piano inclinato (a quota $y' = h$, per intenderci), se la raggiunge? [Ovviamente la forza F è sempre quella delle domande precedenti, cioè è disomogenea e ha quella specifica dipendenza dalla posizione espressa sopra]

$v' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ m/s $(F_0 h/(m g^2 \theta) - 2gh)^{1/2} \sim 9.0$ m/s [essendo la forza disomogenea, occorre servirsi del bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U_G$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K = (m/2)v'^2$, quella di energia potenziale (gravitazionale) è $\Delta U_G = mgh$. Il lavoro della forza si calcola ricordando la definizione, che prevede la presenza di un prodotto scalare e di un integrale! Il prodotto scalare, dato che la forza ha componente solo orizzontale, seleziona la direzione X , quindi si ha $L_F = \int_{x_0}^x F dx$. La posizione "iniziale" lungo l'asse x corrisponde con la base del piano inclinato, cioè è $x_0 = h/tg\theta$; la posizione "finale" corrisponde all'oggetto che si trova in cima al piano inclinato, ed è quindi $x' = 0$ (per la scelta del riferimento!). Quindi, tenendo conto anche dell'espressione della forza in funzione della posizione, l'integrale diventa $L_F = -(F_0/h) \int_{h/tg\theta}^0 x dx = (F_0/h)(h/tg^2\theta)^2/2$. Da qui, mettendo tutto assieme, risolvendo e scegliendo la soluzione con il segno positivo per la velocità (se ne chiede il modulo!), si ottiene la soluzione. Notate che la soluzione presuppone di estrarre la radice quadrata di una grandezza che, per i dati del problema, è positiva: dunque la soluzione esiste e quindi l'oggetto raggiunge la sommità del piano inclinato]

2. Un "pendolo balistico" è realizzato con una sottile asta omogenea di lunghezza $L = 1.0$ m e massa $M = 30$ kg che è libera di ruotare con attrito trascurabile attorno a un asse O passante per un suo estremo (il piano di rotazione è verticale, come indicato in figura). Un proiettile puntiforme di massa $m = 0.10$ kg $= M/300$ viene sparato con velocità **orizzontale** di modulo $v_0 = 2.0$ m/s in modo da colpire l'estremità "libera" (non imperniata) dell'asta. In seguito all'urto, il proiettile resta **conficcato** nell'asta e si osserva che il sistema asta+proiettile si mette a ruotare attorno all'asse fino a fermarsi (istantaneamente) quando l'angolo tra verticale e asse dell'asta raggiunge un certo valore massimo θ_{MAX} . [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



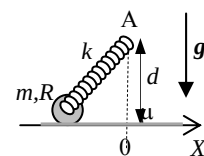
- a) Quanto vale θ_{MAX} ? In brutta dovete spiegare in modo chiaro quale procedimento usate e se ci sono grandezze meccaniche del sistema che si conservano nel processo di urto e nel processo di rotazione dell'asta. Può essere conveniente usare delle approssimazioni che tengono conto dei valori numerici dei parametri del problema.

$\theta_{MAX} \sim \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ rad $\arccos(1 - 3mv_0^2/(MgL)) \sim 0.090$ rad [il processo può essere suddiviso in due fasi: l'urto, che si può supporre istantaneo ed evidentemente anelastico, e la rotazione, che si può supporre avvenga con attrito trascurabile. A causa della presenza del perno (asse di rotazione) che permette la rotazione del sistema e può fornire forze impulsive, l'unica grandezza che si conserva nell'urto è il momento angolare totale. Subito prima dell'urto esso è associato al solo moto del proiettile e si esprime come $mv_0 L$ (la lunghezza dell'asta è il "braccio" della quantità di moto); subito dopo l'urto il sistema si mette in rotazione con velocità angolare ω e conviene esprimere il momento angolare come $I_{TOT}\omega$, dove I_{TOT} è il momento di inerzia complessivo del sistema dato dalla somma del momento di inerzia per rotazione dell'asta omogenea di massa M e lunghezza L attorno a un asse passante per un suo estremo, $ML^2/3$, e del momento di inerzia per la rotazione (moto tangenziale o circolare) del proiettile di massa m lungo una circonferenza di raggio pari alla lunghezza dell'asta L , mL^2 . Si ha quindi $I_{TOT} = (M/3 + m)L^2 \sim ML^2/3$, dove l'approssimazione è consentita dal rapporto tra le masse dato dal testo. Dalla conservazione del momento angolare si trova quindi la velocità angolare che il sistema acquista subito dopo l'urto: $\omega \sim 3mv_0/(ML)$. Tale velocità angolare può essere considerata come la velocità iniziale (di rotazione) del sistema nella seconda fase del processo. In questa fase, vista l'assenza di attriti, si conserva l'energia meccanica del sistema, per cui $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. La variazione di energia cinetica, dato che alla fine del processo il sistema si trova (istantaneamente) fermo, è $\Delta E_K = -(I_{TOT}/2)\omega^2 \sim -(ML^2/6)(3mv_0/(ML))^2 = (3/2)mv_0^2$. La variazione di energia potenziale è invece dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta e del proiettile. Lavorando di trigonometria, è facile rendersi conto che $\Delta U_G = Mg(L/2)(1 - \cos\theta_{MAX}) + mgL(1 - \cos\theta_{MAX}) = g(L/2)(1 - \cos\theta_{MAX})(M/2 + m) \sim Mg(L/2)(1 - \cos\theta_{MAX})$, dove abbiamo fatto la solita approssimazione sulle masse del sistema. Risolvendo si ottiene: $\cos\theta_{MAX} \sim 1 - 3mv_0^2/(MgL)$, da cui la soluzione. Notate che lo spostamento angolare che risulta dal calcolo numerico è piccolo, meno di 5 gradi]

- b) Chiamato $t_0 = 0$ l'istante dell'urto, quanto vale l'istante t_{MAX} a cui il sistema raggiunge l'angolo θ_{MAX} di cui sopra? [Attenzione: la soluzione richiede di capire che tipo di movimento compie il sistema e di fare ragionevoli assunzioni basate sul fatto che il valore di θ_{MAX} è "piccolo" ...]

$t_{MAX} \sim \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ s $\pi/(2(3g/(2L))^{1/2}) \sim 0.41$ s [il sistema asta+proiettile si comporta come un cosiddetto "pendolo fisico". Il sistema ammette quindi delle soluzioni di tipo moto armonico, in cui la coordinata (angolare) θ varia nel tempo secondo una legge armonica, del tipo $\theta(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$, con ω **pulsazione** (attenzione! Non è la velocità angolare dell'asta!) e A e Φ da determinare secondo le condizioni iniziali del problema. Come si può dimostrare facilmente, il moto è armonico solo nel caso delle "piccole oscillazioni", cioè quando il valore dell'angolo rimane sempre sufficientemente "piccolo". Queste sono effettivamente le condizioni del problema: infatti l'angolo θ_{MAX} , che è il valore **massimo** dello spostamento angolare, è, come più volte affermato, sufficientemente minore di un radiante da poter ritenere ragionevole l'approssimazione di piccole oscillazioni. In queste condizioni è facile rendersi conto che il tempo necessario perché il sistema passi dalla sua posizione di equilibrio all'ampiezza angolare massima vale un quarto del periodo di oscillazione armonica, cioè $t_{MAX} = T/4 = \pi/(2\omega)$. Il problema si riduce allora a calcolare la pulsazione ω . Questo può essere fatto scrivendo l'equazione del moto angolare per il sistema: $\alpha = \tau_{TOT}/I_{TOT} \sim -(MgL/2)\sin\theta/I_{TOT} \sim -(MgL/2)\sin\theta/(ML^2/3)$, dove abbiamo usato la solita approssimazione dovuta al rapporto tra le masse. Per piccole oscillazioni $\sin\theta \sim \theta$, da cui si vede che si ottiene proprio l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = (3g/(2L))^{1/2}$. Da qui la soluzione (ovviamente approssimata, viste le varie assunzioni che abbiamo fatto)]

3. Un cilindro pieno e omogeneo, di massa $m = 6.0$ kg e raggio $R = 20$ cm, si trova su un piano **orizzontale scabro**, che presenta un coefficiente di attrito $\mu = 0.80$. Il cilindro può ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse dove, grazie a un opportuno giogo di massa trascurabile, si trova agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 40$ N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica, $L_0 = 0$). L'altra estremità della molla è vincolata a un punto (punto A di figura) che si trova sulla verticale dell'origine del sistema di riferimento (asse X) che **dovete** usare, a una distanza $d = 1.2$ m dal piano orizzontale (vedi figura). Inizialmente il cilindro si trova **fermo**, a causa di una qualche forza esterna, nella configurazione rappresentata in figura: in queste condizioni, la lunghezza della molla è $L = d$ e il centro di massa del cilindro si trova in $x < 0$. Quindi, all'istante $t_0 = 0$, la forza esterna viene rimossa e il cilindro si trova libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



- a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro, valutando tutti gli aspetti coinvolti, in particolare se: (i) il cilindro resta sempre a contatto con il piano orizzontale; (ii) il moto iniziale è di rotolamento puro; (iii) il moto rimane di rotolamento puro durante l'intera sua evoluzione, e valutate la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro nell'istante in cui esso passa per la posizione $x = 0$.

Discussione : $\dots \dots \dots$ In primo luogo occorre valutare se il cilindro si mantiene a contatto con il piano orizzontale. Infatti esso è soggetto alla forza elastica che ha una componente verticale la quale potrebbe essere maggiore della forza peso, provocando il distacco del cilindro. La forza elastica vale in modulo kL , e la sua componente verticale F_{elY} si trova moltiplicando per $(d-R)/L$, come si ottiene con semplici ragionamenti di trigonometria. Usando i valori numerici delle varie grandezze, si trova: $F_{elY} = kL(d-R)/L = k(d-R) = 40$ N < $mg = 59$ N. Quindi inizialmente il cilindro non si distacca dal piano. Nell'evoluzione del moto, la molla continua sempre a esercitare la stessa forza in direzione verticale. Dunque il cilindro non si distaccherà mai dal piano. Essendo il cilindro un corpo rigido esteso occorre verificare se il moto può essere di rotolamento puro. Le equazioni del moto rotazionale (rispetto al centro di massa, cioè al centro del cilindro) e quella del moto traslazionale del centro di massa, scritta rispetto all'asse X di figura, si scrivono: $\alpha = F_A R / I = 2F_A / (mR)$, dove abbiamo posto positivo il verso di rotazione orario, abbiamo notato che l'unica forza che fa momento è la forza di attrito, di modulo F_A , e che il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo vale $I = mR^2/2$, e $a_{CM} = (F_{elX} - F_A)/m$, dove abbiamo notato che la forza di attrito, opponendosi allo scivolamento della generatrice del cilindro a contatto con il piano, che tende a muoversi verso la sinistra di figura, ha segno negativo. La componente orizzontale della forza elastica, invece, ha valore positivo e si esprime, usando ancora un po' di trigonometria, $F_{elX} = -kLx/L = -kx$ (notate che il segno meno è necessario se con x si esprime la coordinata del centro di massa, con segno e tutto!). Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, si ha la relazione geometrica (per i moduli) $\alpha = a_{CM}/R$. Risolvendo il sistema di tre equazioni così ottenuto per l'incognita F_A , considerata in modulo per non fare confusione, si ottiene: $F_A = k|x|/3$, dove il segno di modulo ci rende sempre positiva l'espressione qualsiasi sia il segno di x . Tale forza ha il suo valore massimo nella posizione iniziale, dove il suo **modulo** vale $k|x_0|/3$, con $|x_0| = (L^2 - (d-R)^2)^{1/2} = (d^2 - d^2 + 2dR)^{1/2} = R^{1/2}(2dR)^{1/2}$, da cui si vede che il modulo della forza di attrito necessaria per il rotolamento puro vale, al suo valore massimo (per le condizioni di figura), $F_A = kR^{1/2}(2dR)^{1/2}/3 \sim 8.8$ N. La forza di attrito determinata dal contatto tra generatrice e piano vale **al massimo** $F_{A,MAX} = \mu N = \mu(mg - F_{elY}) = \mu(mg - k(d-R)) = 15$ N. Dunque la forza di attrito garantita dalla superficie scabra permette, inizialmente e sempre, il moto di rotolamento puro. Si noti infatti che, per banali considerazioni di bilancio energetico, la molla non si allungherà mai più del valore iniziale, cioè non succederà mai che $|x| > |x_0|$, per cui il valore della forza di attrito necessaria per il rotolamento puro tenderà eventualmente a diminuire durante il moto verso $x = 0$.

$v_{CM}' = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ m/s $((k/(3m))(2dR - R^2))^{1/2} \sim 1.0$ m/s [essendo il moto di

rotolamento puro si ha conservazione dell'energia meccanica (la forza di attrito statica che vi è coinvolta non compie lavoro!), cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} = (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 + (k/2)((d-R)^2 - d^2) = 3mv_{CM}^2/2 + (k/2)(R^2 - 2dR)$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo e notato che la variazione di energia elastica è dovuta alla differenza di estensione, cioè di lunghezza (la lunghezza di riposo è nulla!), della molla, la cui energia elastica per una lunghezza generica L si scrive $U_{ELA} = (k/2)L^2$. Da qui la soluzione]

- b) A quale istante t' il centro di massa del cilindro passa (per la prima volta) per la posizione $x = 0$? [Considerate per bene che tipo di moto compie il centro di massa del cilindro]

$t' = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ s $\pi/(2(2k/3m)^{1/2}) \sim 0.74$ s [il moto di rotazione del cilindro segue l'equazione, che vale per i moduli, $\alpha = 2F_A/(mR)$, come visto sopra. Altrettanto già dimostrato è che la forza di attrito vale, in modulo e nelle condizioni di rotolamento puro, che abbiamo verificato valide, $F_A = k|x|/3$. Da qui si ricava $\alpha = 2k|x|/(3mR)$ e $a_{CM} = \alpha R = 2k|x|/(3m)$. Ora, per decidere il segno da porre in questa espressione in modo che esso sia correttamente contenuto nell'equazione del moto, osserviamo che, quando x diventa meno negativo (il centro di massa del cilindro si muove verso l'origine del riferimento), cioè più piccolo in modulo, l'accelerazione diminuisce. Di conseguenza occorre mettere un segno meno davanti all'espressione, cioè $a_{CM} = -(2k/(3m))x$ (mi scuso per l'apparente ingarbugliamento con cui ho provato a spiegare la questione dei segni: spero si capisca!). Questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\Omega = (2k/(3m))^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\Omega$. Il tempo necessario a spostarsi dalla posizione iniziale alla posizione di equilibrio vale, in un moto armonico, $t' = T/4$, da cui la soluzione]