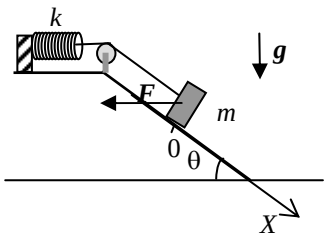
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 12/1/2012

Nome e cognome: …… Matricola: ……

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un blocchetto **puntiforme** di massa m = 5.0 kg può scorrere su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il blocchetto è attaccato, tramite una corda inestensibile di massa trascurabile, a una molla di costante elastica k = 49 N/m il cui altro estremo è vincolato ad muretto fisso, rigido e indeformabile. La figura rappresenta schematicamente il sistema considerato (la piccola puleggia attorno a cui passa la corda ha massa trascurabile e **non** partecipa alla dinamica del sistema). Supponete trascurabile ogni forma di attrito. Per la soluzione del problema dovete usare il riferimento (asse X) indicato in figura: esso è diretto come il piano inclinato e orientato verso il basso. Inoltre, esso è centrato nella posizione che sarà identificata nel seguito dell'esercizio. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



   a) Inizialmente una forza esterna ***F*** di direzione orizzontale, verso come in figura e modulo incognito, è applicata al blocchetto. In queste condizioni il sistema è in **equilibrio** e la molla è alla propria **lunghezza di riposo.** Quanto vale il modulo F della forza esterna? [Notate che la lunghezza di riposo L_0 della molla non si conosce, ma è comunque diversa da zero]

   F = …… ~ …… N $mgtg\theta \sim 28$ N [per l'equilibrio lungo il piano inclinato deve essere $mgsin\theta = Fcos\theta$, da cui la soluzione; notate che, nelle condizioni specificate (molla a lunghezza di riposo), non ci sono altre forze attive lungo la direzione considerata]

   b) Supponete ora che la forza esterna ***F*** venga rimossa in modo istantaneo: come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del blocchettino in queste condizioni? **Dovete** usare il riferimento stabilito prima, centrandolo, cioè ponendo la sua origine, nella posizione di cui al punto precedente, quella in cui **la molla si trova alla propria lunghezza di riposo**. [Non usate valori numerici per questa risposta, ma limitatevi a scrivere una **funzione** della posizione generica x del blocchetto, nella quale compaiano i simboli letterali con cui si identificano le grandezze note del problema]

   $a(x)$ = …… $gsin\theta - (k/m)x$ [sul blocchettino agiscono la componente "attiva" della forza peso, che fornisce un'accelerazione $gsin\theta$ positiva, cioè diretta verso il basso, e la tensione della corda, che comparirà con un segno negativo essendo diretta verso l'alto (per $x > 0$, la molla si allunga rispetto alla lunghezza di riposo e quindi la tensione della corda tende a far "risalire" il blocchetto sul piano inclinato). La forza elastica è proporzionale alla elongazione (o compressione) della molla. Per la scelta dello zero dell'asse di riferimento, è evidente che l'elongazione (o compressione) è pari a x. Poiché la corda "trasferisce" la forza della molla sul blocchetto, si ha la soluzione]

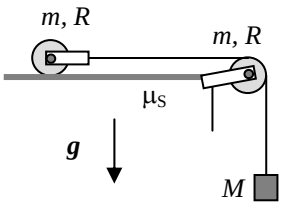
   c) In seguito alla rimozione della forza esterna ***F***, si osserva che il blocchettino prende a scendere lungo il piano inclinato (immaginate che la sua lunghezza sia tale che il blocchettino non raggiunge la base del piano inclinato), finché a un certo istante si ferma. Quanto vale la distanza d che esso percorre sul piano inclinato prima di fermarsi?

   d = …… = …… m $2mgsin\theta/k = 1.0$ m [viene dal bilancio energetico o conservazione dell'energia meccanica, che si ha per l'assenza di attriti: $0=\Delta U_{ELA} + \Delta U_G = (k/2)d^2 - mgdsin\theta$, dove abbiamo notato che $\Delta E_K = 0$ perché è fermo all'inizio e all'istante considerato. Lo stesso risultato si può ottenere in modo più complicato e "contoso" risolvendo l'equazione del moto. Infatti il moto del blocchettino è armonico e dà luogo a oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio $x_{EQ} = mgsin\theta/k$ (si ottiene ponendo pari a zero l'accelerazione). La semiampiezza A delle oscillazioni, determinata dalle condizioni iniziali, vale in modulo $A = x_{EQ} - x_0 = x_{EQ}$, dove abbiamo notato che inizialmente il blocchettino si trova nella posizione $x_0 = 0$ (per come abbiamo costruito il riferimento!). L'arresto avverrà dunque nella posizione $x_{EQ} + A = 2x_{EQ}$, che conduce allo stesso risultato trovato con il bilancio energetico]

   d) Quanto vale l'accelerazione a del blocchetto quando questo si ferma (avendo percorso la distanza d)? [Indicate anche il segno rispetto al riferimento usato]

   a = …… = …… m/s^2 $gsin\theta - (k/m)\, d = - gsin\theta = - 4.9$ m/s^2 [notate che il blocco **non** si ferma nella sua posizione di equilibrio, ma subito dopo essersi fermato risale verso l'alto, dato che il moto è armonico. Notate anche che questa accelerazione è opposta rispetto a quella che si ha all'inizio. Infatti posizione iniziale e finale corrispondono ai due estremi dell'oscillazione]

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa m = 5.0x10^{-1} kg e raggio R = 10 cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro dotato di coefficiente di attrito μ_S = 0.50. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione (attorno al proprio asse) con attrito trascurabile; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare senza attrito attorno al proprio asse, la fune termina con una massa M = 1.0 kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune **non slitta** sulla gola della puleggia. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Inizialmente il rullo è tenuto fermo da una causa esterna che poi viene rimossa ed il rullo si mette quindi in movimento. Quanto vale la velocità v_{CM} che possiede il suo centro di massa dopo uno spostamento Δs = 5.0 m? [Osservate che il rullo si muove di rotolamento puro e che la fune non slitta sulla puleggia!]

   v_{CM} = …… = …… m/s $(Mg\Delta s/(m+M/2))^{1/2} = (g\Delta s)^{1/2} = 7.0$ m/s [per il bilancio energetico, che, tenendo conto dell'inestensibilità della fune, del moto di rotolamento puro e del non slittamento fra fune e puleggia, si scrive: $Mg\Delta s = (m/2)v_{CM}^2 + (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 + (I/2)\omega^2 = v^2_{CM}(m/2+M/2+I) = v^2_{CM}(m/2+M/2+I/R^2) = v^2_{CM}(m/2+M/2+m/2)$, dove si è anche sfruttato che, per un cilindro omogeneo in rotazione attorno al suo asse, si ha $I = (m/2)R^2$]

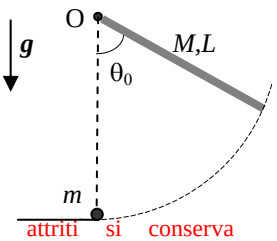
   b) Quanto vale la forza di attrito F_A che si esercita tra piano orizzontale e rullo in condirzioni di rotolamento puro? Commentate in brutta sulla possibilità che le condizioni del problema conducano davvero al rotolamento puro.

   F_A = …… = …… N $(mg/2)(M/(M+2m)) = mg/4 = 1.2$ N [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa M, nelle condizioni del problema si hanno le seguenti equazioni del moto:

$ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_A R$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2 R - T_1 R$; $Ma = Mg - T_2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha = a/R = \alpha_{PULEGGIA}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

Commento: …… La forza di attrito massima che può essere esercitata al contatto tra rullo e piano scabro vale $F_{A,MAX} = \mu_s N = \mu_S mg$ = 2.45 N. Poiché questo valore è maggiore della forza di attrito trovata alla risposta precedente, il rotolamento puro è possibile nelle condizioni del problema

3. Un'asta sottile e omogenea di massa M = 0.10 kg e lunghezza L = 30 cm è imperniata a un suo estremo (O in figura) in modo da poter ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente l'asta viene mantenuta ferma nella posizione di figura (l'angolo rispetto alla verticale vale $\theta_0=\pi/3$) da una qualche causa esterna che a un dato istante viene improvvisamente rimossa: l'asta si mette dunque in movimento con velocità angolare iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3)=1/2$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



a) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta quando essa passa per verticale (θ=0)?

ω = …… = …… rad/s $(3g/(2L))^{1/2}$= 7.0 rad/s [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U_G$, con $\Delta E_K = (I/2)\omega^2$ (inizialmente l'asta è ferma) e $\Delta U_G = -Mg(L/2)(1-cos\theta_0)=-MgL/4$, dato che la variazione è dovuta al cambio di quota del centro di massa dell'asta, che, essendo essa omogenea, si trova a metà della sua lunghezza. Essendo per un'asta omogenea sottile che ruota attorno a un perno passante per un suo estremo $I = (M/3)L^2$, si ottiene la soluzione

b) Supponete ora che, esattamente quando l'asta passa per la posizione di equilibrio, il suo estremo "in basso" (quello non imperniato) urti **elasticamente** un oggetto puntiforme di massa $m = M/6$ il quale, essendo inizialmente fermo, è libero di muoversi su un piano orizzontale in seguito all'urto**.** Discutete per bene, in brutta, quali grandezze si conservano nell'urto e calcolate la velocità angolare ω' dell'asta **subito dopo** l'urto.

Discussione: …… l'urto è elastico e dunque si conserva per defizione l'energia cinetica del sistema. Inoltre esso non è isolato, a causa della presenza del perno in O che può trasferire forze impulsive sull'asta, per cui non si conserva la quantità di moto totale. Tuttavia, scegliendo come polo proprio il punto O, si vede che le forze esterne (impulsive, la forza peso fa comunque effetto trascurabile nella breve durata dell'urto) non producono momento, per cui si conserva il momento angolare (assiale) rispetto a tale polo.

ω'= …… = …… rad/s -ω/5=- 1.4 rad/s [la conservazione dell'energia cinetica totale del sistema implica: $(I/2)\omega^2 = (I/2)\omega'^2 + (m/2)v'^2$, con v' velocità dell'oggetto puntiforme subito dopo l'urto. La conservazione del momento angolare implica: $I\omega = I\omega' + mv'L$, dove abbiamo notato che, essendo la direzione di moto dell'oggetto orizzontale, esso dopo l'urto contribuisce con un termine $mv'L$ al momento angolare totale. Esplicitando il momento di inerzia dell'asta e usando la relazione data nel testo tra le masse con le dovute semplificazioni, le due equazioni si riscrivono come: $\omega^2 = \omega'^2+v'^2/(6L^2)$ e $2\omega = 2\omega' + v'/L$. Da quest'ultima si ottiene $v' = 2L(\omega-\omega')$ che, introdotta nell'altra equazione (quella che viene dalla conservazione dell'energia), porta alla seguente equazione algebrica di secondo grado: $5\omega'^2-4\omega'\omega-\omega^2 = 0$. Questa equazione ha due soluzioni, una delle quali, da scartare perché non significativa (significherebbe che non c'è stato urto!) è $\omega'=\omega$, mentre l'altra è quella riportata nella risposta. Notate che il segno negativo indica che l'asta prende a ruotare in verso opposto rispetto alla discesa, cioè "rimbalza" e risale]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/1/2012 Firma: