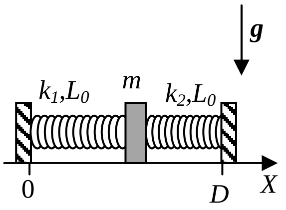
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 26/1/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un piccolo blocchettino (da considerare come un oggetto puntiforme) di massa m = 30 g può scorrere con **attrito trascurabile** su un piano orizzontale. Il blocchettino è agganciato a **due** molle di massa trascurabile disposte con il loro asse in direzione orizzontale: le molle hanno entrambe la stessa lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, ma le loro costanti elastiche sono diverse, e valgono k_1 = 2.0 N/m e k_2 = 1.0 N/m. Le estremità delle due molle (quelle non agganciate al blocchettino) sono vincolate a due muretti verticali, rigidi ed indeformabili, posti a distanza D = 1.2 m l'un l'altro: la figura riporta uno schema della situazione. Nelle risposte **dovete** usare il sistema di riferimento (asse X) indicato in figura, con origine nel "muretto di sinistra" e orientazione verso la destra di figura.



a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del blocchettino? [Non usate valori numerici nell'espressione dell'equazione del moto, ma indicate i parametri del problema e indicate con x il valore (generico) della coordinata del blocchetto rispetto al riferimento dato]

$a(x)$ = …………………………………… $(1/m)(-k_1(x-L_0)+k_2(D-x-L_0))=-((k_1+k_2)/m)x-((k_1-k_2)L_0-k_2D)$

[il moto può avvenire solo in direzione orizzontale, essendo la forza peso "bilanciata" dalla reazione vincolare del piano. Sul blocchettino agiscono le forze elastiche delle due molle, che sono ovviamente dirette lungo X e pertanto il problema è unidimensionale. L'equazione del moto si scrive $a(x) = (1/m)(F_1+F_2)$, dove F_1 ed F_2 sono le componenti orizzontali (con segno!) delle due forze elastiche. Per la scelta del sistema di riferimento, detta x la posizione (generica) del blocchettino è chiaro che $F_1 = -k_1(x-L_0)$. Per quanto riguarda la molla "2", il valore della compressione (o elongazione) è, in modulo, pari a $|D-x-L_0|$. In particolare, si ha compressione quando $(D-x) < L_0$, viceversa si ha elongazione. Notando che in caso di compressione la forza è diretta nel verso negativo delle X (viceversa nel caso di elongazione), si ha $F_2 = k_2(D-x-L_0)$, con segni coerenti con la scelta del sistema di riferimento. Sommando algebricamente le due forze si ottiene il risultato. Notate che quello che il risultato si può interpretare dicendo che le due molle si comportano come un'unica molla di costante elastica pari alla somma delle due, come si ha in una configurazione di due molle "in parallelo"]

b) Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ}?

x_{EQ} = …………………………………… = ……… m $((k_1-k_2)L_0+k_2D)/(k_1+k_2)$ = 0.57 m [si ottiene ponendo $a(x_{EQ})=0$ nell'equazione del moto scritta sopra]

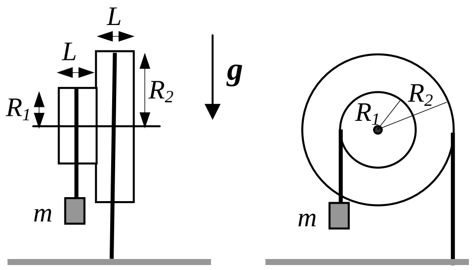
c) Supponete ora che il blocchettino venga spostato (verso la destra della figura) di un tratto Δ_0 = 10 cm **dalla posizione di equilibrio**, e di qui, all'istante t_0 = 0, venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. A quale istante t' passerà (per la prima volta) per la posizione di equilibrio?

t' = …………………………….. = ... s $T/4 = \pi/(2\omega) = \pi/(2((k_1+k_2)/m)^{1/2})$ = 0.16 s [l'equazione del moto è quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega$. Vista la condizione iniziale di velocità nulla, il tempo necessario a ripassare per la posizione di equilibrio è pari a $T/4$, da cui la soluzione]

d) Quanto vale la velocità v' del blocchettino nell'istante t' di cui al punto precedente (l'istante in cui ripassa per la posizione di equilibrio)? [Esprimete anche il segno!]

v' = …………………………….. = ... m/s $-\Delta_0\omega$ = - 1.0 m/s [la velocità nell'istante considerato è quella massima (in modulo) che il blocchettino può raggiungere nel suo movimento, come si può facilmente dimostrare considerando il moto armonico e le sue condizioni iniziali. Esprimendo la soluzione del moto armonico come $x(t) = A\cos(\omega t+\Phi) + x_{EQ}$, si ha, viste le condizioni iniziali, $A = \Delta_0$. La legge oraria della velocità recita $v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\Phi)$ e il suo valore all'istante t' , quando $x(t')=x_{EQ}$, è $v' = -\omega A$, dove il segno negativo indica che il blocchettino si sta muovendo verso la sinistra della figura. Da qui la soluzione, a cui si può anche arrivare usando la conservazione dell'energia meccanica]

2. Una puleggia "a doppio raggio" è costituita da due dischi pieni, di raggio R_1 = 10 cm ed R_2 = 20 cm, liberi di ruotare **senza attrito** attorno al loro asse (parallelo al suolo) rimanendo **solidali** fra loro. I due dischi hanno lo stesso spessore L = 5.0 cm, e sono fatti dello stesso materiale solido **omogeneo**, di densità di massa $\rho = 4.0\times10^3$ kg/m^3. Attorno ai due cilindri sono avvolte due funi inestensibili di massa trascurabile: quella avvolta attorno al cilindro 1 sostiene una massa (puntiforme) m = 10 kg, mentre quella avvolta attorno al cilindro 2 è inizialmente "inchiodata" al suolo. La figura rappresenta le viste "laterale" e "frontale" del sistema. [Nella soluzione supponete che le funi **non slittino** sulla superficie laterale dei dischi e usate g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



Vista "laterale" *Vista "frontale"*

a) Quanto vale in tali condizioni il modulo della tensione T_2 della corda avvolta sul cilindro 2?

T_2 = …………………………………… = ………… N mgR_1/R_2 =49 N [per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse deve essere: $mgR_1 = T_2R_2$. Infatti le uniche forze che producono momento sulla puleggia sono le tensioni delle fune, poiché forze peso e reazioni del perno hanno braccio nullo. Notate che i bracci da considerare per le due tensioni sono diversi tra loro, essendo pari ai raggi dei due cilindri]

b) A un certo istante la fune 2 viene tagliata e la massa m è libera di scendere verso il basso con velocità iniziale nulla, provocando la rotazione della puleggia. Quanto vale il modulo v della velocità della massa quando questa è scesa di un tratto Δh = 10 cm rispetto alla posizione di partenza?

v = …………………………………… ~ ……….. m/s $(2mg\Delta h/(m+I/R_1^2))^{1/2}$ ~ 1.3 m/s [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = -mg\Delta h + (m/2)v^2 + (I/2)\omega^2$; dove I è il momento di inerzia "totale" della puleggia. Esso è dato dalla somma dei momenti di inerzia dei due cilindri: $I = M_1R_1^2/2+M_2R_2^2/2$. Per il calcolo delle masse occorre usare la densità di massa e tenere conto che i cilindri sono **omogenei**: si ha $M_1 = \pi R_1^2L\rho$ e analogamente $M_2 = \pi R_2^2L\rho$, da cui $I = (\pi L\rho)(R_1^4+R_2^4)/2$. Inoltre, dato che la fune non slitta sulla superficie del cilindro, la velocità della massa è legata alla velocità angolare della puleggia dalla relazione geometrica $\omega = v/R_1$. Mettendo tutto insieme si trova la soluzione]

c) Quanto vale l'accelerazione angolare α della puleggia **subito dopo** il taglio della fune?

α = …………………………………… ~ ……….. rad/s^2 $mgR_1/(I+mR_1^2)$ = 16 rad/s^2 [subito dopo il taglio della fune l'unica forza che fa momento sulla puleggia è quella della tensione T_1. Le equazione del moto rotazionale (per la puleggia) e traslazionale (per la massa) si scrivono allora: $\alpha = T_1R_1/I$; $a = g-T_1/m$, dove abbiamo considerato un riferimento verticale diretto verso il basso. Poiché la fune non slitta, si ha poi $a = \alpha R_1$. Le tre equazioni appena scritte possono essere messe a sistema e risolte per l'"incognita" α ottenendo la soluzione, dove I indica il momento di inerzia totale calcolato prima]

3. Un oggetto di massa M = 1.0 kg si muove con attrito trascurabile su un piano orizzontale. A un dato istante esso possiede una velocità diretta lungo l'asse X di questo piano, di verso positivo e modulo V_0 = 0.50 m/s. A questo stesso istante l'oggetto viene colpito da un proiettile di massa $m = M/4$ che possiede una velocità diretta lungo l'asse Y, di verso negativo e modulo $v_0 = 5V_0$. L'urto può essere considerato **totalmente anelastico**.

   a) Come è diretta la velocità ***V'*** che il sistema oggetto+proiettile conficcato assume **subito dopo l'urto**? Esprimente tale direzione calcolando $tg\theta$**'**, cioè la tangente dell'angolo che la direzione di ***V'*** forma rispetto all'asse X del riferimento. [State attenti a indicare anche il segno!]

   $tg\theta'$ = …………………………………… = ……….. $-mv_0/(MV_0)$ = -5/4 = -1.25 [nel sistema considerato non si conserva l'energia cinetica, perché l'urto è anelastico, ma si conserva la quantità di moto totale, perché il sistema è isolato almeno nelle direzioni X e Y rilevanti per il moto, lungo le quali non agiscono forze esterne. Lungo l'asse X si ha quindi: $MV_0 = (M+m)V'_X$. Lungo l'asse Y si ha invece: $-mv_0 = (M+m)V'_Y$, dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione della velocità del proiettile. Essendo per ovvi motivi geometrici $tg\theta' = V'_Y/V'_X$ si ottiene la soluzione]

   b) Quanto vale la variazione ΔE_K dell'energia cinetica **totale** (dell'intero sistema) nel processo di urto?

   ΔE_K = …………………………………… = ……….. J $-mM(V_0^2+v_0^2)/(2(M+m)) = -13V_0^2/5$ = -0.65 J [l'energia cinetica iniziale è data dalla somma delle energie cinetiche dei due oggetti: $(m/2)v_0^2+(M/2)V_0^2$. Quella finale tiene conto del movimento del sistema proiettile+oggetto, e si scrive $((M+m)/2)V'^2$. D'altra parte, secondo quanto discusso nella risposta al punto precedente, $V'^2=V'^2_X+V'^2_Y= (M^2V_0^2+m^2v_0^2)/(M+m)^2$. Da qui, con opportuni rimaneggiamenti, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 26/1/2012 Firma: