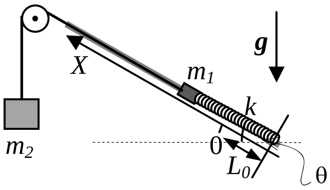
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 6/6/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m_1 = m = 0.10$ kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida fissa e rigida (un tondino) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il manicotto è solidale all'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 4.9$ N/m e lunghezza di riposo L_0 (incognita), il cui altro estremo è fissato a un muretto che sorge alla base del piano inclinato. Al manicotto è anche attaccato il capo di una fune inestensibile e di massa trascurabile il cui altro capo è vincolato a una massa $m_2 = 2m = 0.20$ kg libera di muoversi in direzione verticale.



Come si vede in figura, la fune passa per la gola di una puleggia **di massa trascurabile** che scorre con attrito trascurabile attorno al proprio asse. Per la soluzione del problema fate riferimento a un asse X parallelo al tondino, orientato verso l'alto e centrato in modo tale che, quando il manicotto si trova nella posizione $x = 0$, la molla assume la propria lunghezza di riposo. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ con $3^{1/2} \sim 1.73$]

a) Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ} del manicotto? [Esprimetela rispetto al sistema di riferimento dato]

x_{EQ} = …………………………………… = ……… m $(mg/k)(2\text{-}sin\theta) = 3mg/(2k) = 0.30$ m [detto T il modulo della tensione della fune, che, essendo la puleggia priva di massa e dunque di momento di inerzia è lo stesso ai due estremi della fune stessa, l'equazione del moto del manicotto rispetto all'asse X si scrive: $a_1 = -(k/m_1)x - gsin\theta + T/m_1$. Notate che in questa equazione abbiamo fatto uso della considerazione espressa nel testo a proposito dell'origine del riferimento, per la quale, in sostanza, è come se la lunghezza di riposo della molla fosse nulla (la distanza tra origine del'asse X ed estremo della molla vale L_0). L'equazione del moto della massa m_2, scegliendo un asse verticale orientato verso il basso, è invece: $a_2 = g - T/m_2$. A causa dell'inestensibilità della fune (e della scelta dei riferimenti, per quanto riguarda il segno), si ha $a_1 = a_2$. Risolvendo il sistema delle tre equazioni per a_1 si ha: $a_1 = (-kx - m_1gsin\theta + m_2g)/(m_1+m_2) = (-kx + mg(2\text{-}sin\theta))/(3m)$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse. La posizione di equilibrio si trova imponendo $a_1(x_{EQ}) = 0$]

b) Come si scrive la funzione $T(x)$ che esprime il modulo della tensione della fune in funzione della posizione (generica) x del manicotto? [Fate sempre uso del riferimento dato e **non** usate valori numerici]

$T(x)$ = …………………………………… $(km_2x + m_1m_2g(1+sin\theta))/(m_1+m_2) = (2k/3)x + mg$ [risolvendo il sistema di equazioni di cui sopra per l'incognita T si ha la soluzione, dove si è fatto anche uso della relazione tra le masse data nel testo]

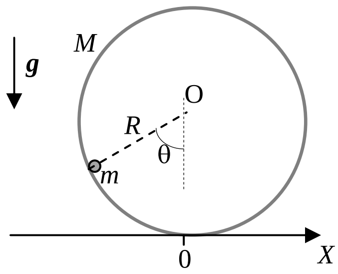
c) Supponete che il manicotto venga spostato dalla posizione di equilibrio x_{EQ} determinata prima alla posizione $x_0 = 0$ per qualche causa esterna (una manina) che, a $t_0 = 0$, viene rimossa istantaneamente lasciando il manicotto libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la coordinata massima x_{MAX} che il manicotto raggiunge nel corso del moto successivo all'istante $t_0 = 0$?

x_{MAX} = …………………………………… = …….. m $3mg/k = 0.60$ m [per la mancanza di attriti, nel sistema si conserva l'energia meccanica, cioè $\Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = 0$. Dato che il manicotto veine fatto partire da fermo e che la coordinata massima si raggiunge quando la velocità è istantaneamente nulla, si ha $\Delta E_K = 0$. La variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso è data dall'aumento di quota della massa m_1 e dalla diminuzione di quota della massa m_2. $\Delta U_G = m_1g\Delta h_1 - m_2g\Delta h_2$, con $\Delta h_1 = \Delta h_2 sin\theta$ per ovvie considerazioni geometriche (la massa m_1 si muove in direzione inclinata, la massa m_2 in direzione verticale e la fune è inestensibile). Si ha inoltre $\Delta h_2 = x_{MAX}$ (la coordinata di partenza è nulla…), per cui $\Delta U_G = m_1gx_{MAX}sin\theta - m_2gx_{MAX} = mg(sin\theta - 2)x_{MAX} = -3mgx_{MAX}/2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse e il valore di $sin\theta$. Ricordando che l'energia elastica della molla è, per la scelta del riferimento che è stata presa, $U_{ELA} = (k/2)x^2$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)x_{MAX}^2$. Di conseguenza si ottiene l'equazione: $0 = -3mgx_{MAX}/2 + (k/2)x_{MAX}^2$ di cui una soluzione è nulla (e rappresenta la posizione iniziale del problema, in cui la velocità è anche nulla) e l'altra è quella indicata. Notate che alla stessa soluzione si può giungere esaminando la dinamica del manicotto, come fatto nella risposta successiva]

d) In quale istante t' viene raggiunta (per la prima volta) la coordinata x_{MAX} di cui sopra?

t' = …………………………………… ~ …….. s $\pi(3m/k)^{1/2} \sim 0.78$ s [esaminando l'equazione del moto scritta alla risposta al punto a) si vede che essa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = (k/(m_1+m_2))^{1/2} = (k/(3m))^{1/2}$. L'oscillazione avviene attorno alla posizione di equilibrio x_{EQ} con un periodo $T = 2\pi/\omega$. Le condizioni iniziali sono tali che il moto ha inizio in uno dei due punti estremi dell'oscillazione. L'altro punto estremo si raggiunge dopo un tempo pari a metà periodo, da cui la soluzione. Notate che questo approccio permette di stabilire subito la coordinata x_{MAX} trovata sopra. Infatti tale posizione è "simmetrica" a quella di equilibrio rispetto a quella di partenza, cioè $x_{MAX} = |x_0 - x_{MAX}| + x_{EQ} = 2x_{EQ}$]

2. Un sistema è costituito da un "cerchione di bicicletta" (un guscio cilindrico **omogeneo** di spessore praticamente trascurabile), che ha raggio $R = 98$ cm e massa $M = 0.20$ kg, e da un corpo puntiforme di massa $m = M/5 = 4.0\text{x}10^{-2}$ kg. Il cerchione può ruotare senza strisciare (rotolamento puro) su una strada orizzontale, mentre il corpo puntiforme, che si trova appoggiato sulla superficie "interna" del cerchione (vedi figura), può scivolarvi sopra con **attrito trascurabile**. Inizialmente la configurazione è quella di figura: l'angolo indicato, misurato rispetto alla verticale, vale $\theta = \pi/3$ e tutto il sistema è fermo. Quindi esso viene lasciato libero di muoversi (con velocità iniziali nulle): si osserva che il corpo puntiforme scende lungo la circonferenza del cerchione e che il cerchione ruota senza strisciare. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ con $3^{1/2} \sim 1.73$; ai fini della soluzione supponete che la forza di attrito necessaria per il rotolamento puro del cerchione sia trascurabile]



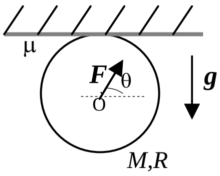
a) Quanto vale lo spostamento ΔX del centro di massa **del cerchione** quando il corpo puntiforme ha raggiunto il punto **più basso** della sua traiettoria? [Esprimete lo spostamento usando l'asse indicato in figura, orizzontale, orientato verso la destra e centrato sul punto di contatto "iniziale" del cerchione con la strada]

ΔX = …………………………….. ~ .... m $-mRsin\theta/(m+M) = Rsin\theta/6 \sim 0.28$ m [per quanto stabilito nel testo, il sistema può essere considerato isolato lungo l'asse X (direzione orizzontale), dato che in tale direzione non agiscono su di esso forze esterne (al forza di attrito statico è da considerarsi trascurabile!). Di conseguenza il centro di massa dell'**intero sistema** ha accelerazione nulla (lungo X) ed essendo fermo all'inizio rimane fermo. Allora lo spostamento orizzontale del centro di massa è $\Delta X_{CM} = 0$. Per definizione di posizione del centro di massa, si ha $\Delta X_{CM} = \Delta(mx+MX)/(m+M) = (m\Delta x+M\Delta X)/(m+M)$, dove Δx rappresenta lo spostamento orizzontale del corpo puntiforme **misurato rispetto alla strada**, e ΔX lo spostamento del centro di massa del cerchione (che ovviamente coincide con il suo centro geometrico, essendo il corpo omogeneo) misurato sempre rispetto alla strada. Si ha quindi: $0 = m\Delta x+M\Delta X$. Nel processo considerato, il corpo puntiforme scende lungo la circonferenza fino al suo punto più basso: dunque il suo spostamento **relativo al cerchione** è $\Delta x' = R\sin\theta$. Lo spostamento "assoluto", cioè rispetto alla strada, è dato dalla somma algebrica di tale spostamento relativo con lo spostamento **del cerchione**, cioè $\Delta x = \Delta x'+\Delta X = R\sin\theta+\Delta X$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, la velocità angolare ω del cerchione nell'istante in cui il corpo puntiforme raggiunge il punto più basso della sua traiettoria? [Spiegate bene, in brutta, il ragionamento usato per giungere alla risposta]

ω = …………………………….. ~........... rad/s $(g/(35R))^{1/2} \sim 0.53$ rad/s [nel sistema si conserva la quantità di moto totale lungo X, a causa dell'assenza di forze esterne in tale direzione, e l'energia meccanica, a causa dell'assenza di forze dissipative che facciano lavoro (il rotolamento puro del cerchione coinvolge solo attrito statico, che non compie lavoro). Per la conservazione della quantità di moto lungo X si ha, tenendo conto che all'inizio tutto è fermo e che il corpo puntiforme quando passa per il punto più basso della sua traiettoria ha velocità diretta solo orizzontalmente, $0 = mv+MV$, da cui $v = -(M/m)V = -5V$. Per la conservazione dell'energia meccanica, tenendo conto che il corpo puntiforme scende per un tratto pari a $R(1-\cos\theta)$, si ha $0 = (m/2)v^2+(M/2)V^2+(I/2)\omega^2- mgR(1-\cos\theta)=(m/2)v^2+(M/2)V^2+(MR^2/2)\omega^2- mgR(1-\cos\theta)$, dove abbiamo usato il valore $I = MR^2$ per il momento di inerzia del cerchione (guscio cilindrico molto sottile). Usando la relazione tra le masse ed esplicitando il valore di $\cos\theta$, e quindi usando la conservazione della quantità di moto e notando che il rotolamento puro implica $\omega = V/R$, si ottiene l'equazione: $(M/5)(25V^2)+ MV^2 + MV^2 -(M/5)gR=0$, da cui $V^2= gR/35$ e quindi la soluzione]

3. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse. La forza, che ha modulo $F = 2.0\times10^2$ N e direzione tale da formare un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'**orizzontale**, come indicato in figura, è intesa mantenere il cilindro a contatto con un **soffitto** orizzontale (occhio: è un soffitto, non un pavimento!) la cui superficie è **scabra** (coefficiente di attrito statico $\mu = 0.80$), e a farlo muovere verso la destra della figura. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $\sin(\pi/6) = ½$ e $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ con $3^{1/2} \sim 1.73$]



M,R

a) Verificate, discutendo per benino in brutta, che nelle condizioni proposte il moto del cilindro è di **rotolamento puro**. Inoltre calcolate il modulo della forza di attrito F_A che il soffitto esercita al contatto con il cilindro in queste condizioni.

Verifica e discussione: ……………………. Le equazioni del moto traslazionale (del centro di massa, nella direzione del moto, che è orizzontale) e rotazionale (attorno al centro di massa) del cilindro si scrivono: $a_{CM} = F\cos\theta/m - F_A/m$; $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(MR)$, dove abbiamo notato che l'unica forza che ha momento non nullo rispetto al centro del cilindro è la forza di attrito (con braccio pari a R) e abbiamo usato il momento di inerxzia per un cilindro pieno e omogeneo, $I = MR^2/2$. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, si ha per la condizione di non strisciamento anche $a_{CM} = R\alpha$ Le tre equazioni formano un sistema la cui soluzione rispetto all'incognita F_A è $F_A = F\cos\theta/3$. Il valore indicato da tale espressione deve essere confrontato con la forza di attrito massima generata dal contatto, $F_{A,MAX} = \mu N = \mu(F\sin\theta-Mg)$, dove abbiamo notato che la reazione vincolare esercitata dal soffitto sul cilindro, che serve a evitare che il cilindro penetri nel soffitto stesso, deve tenere conto della componente verticale della forza $\boldsymbol{F}$ (orientata verso l'alto) e della forza peso $\boldsymbol{Mg}$ orientata verso il basso. Numericamente si vede che $F_A \sim 58$ N è minore di $F_{A,MAX} \sim 71$ N. Dunque il moto è di rotolamento puro.

F_A = …………………………………… ~ ……… N $F\cos\theta/3 \sim 72$ N [vedi sopra]

b) Supponete ora che il cilindro, partendo da fermo, compia N = 3 giri completi muovendosi di rotolamento puro sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F}$. Quanto vale la velocità angolare ω che esso raggiunge avendo compiuto i tre giri completi? [Supponete trascurabile ogni forma di attrito diversa da quella necessaria per il rotolamento puro]

ω = …………………………………… ~ …….. rad/s $((8N\pi F\cos\theta)/(3MR))^{1/2} = ((8\pi F\cos\theta)/(MR))^{1/2} \sim 74$ rad/s [in condizioni di rotolamento puro, non essendo presente alcuna forma di attrito se non quello statico del rotolamento puro, che non compie lavoro, si può utilizzare il bilancio energetico nella forma: $L = \Delta E_{MECC}$. Il lavoro L è quello compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$. Tenendo conto che tale forza è costante e che la sua proiezione nella direzione orizzontale (quella del moto del centro di massa) è $F\cos\theta$, e notando che lo spostamento del centro di massa corrispondente a N giri è semplicemente $N2\pi R$ (il rotolamento puro implica che non ci sia slittamento!), si ha $L = 2N\pi RF\cos\theta$. Per quanto riguarda la variazione di energia meccanica, essa è dovuta solo alla variazione di energia cinetica (e allora è evidente che il bilancio energetico scritto corrisponde di fatto al teorema delle forze vive…): $\Delta E_{MECC} = \Delta E_K = (M/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2 = (3/4)MR^2\omega^2$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia (vedi sopra) e tenuto conto che, in condizioni di rotolamento puro,si ha $v_{CM} = \omega R$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione Si lascia per esercizio di dimostrare che tale soluzione può essere ottenuta anche ragionando in termini di cinematica rotazionale, cioè usando le leggi orarie per lo spostamento angolare del cilindro e in particolare la sua accelerazione angolare, come dedotta dalla scrittura delle equazioni del moto riportate sopra]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 6/6/2012 Firma: