

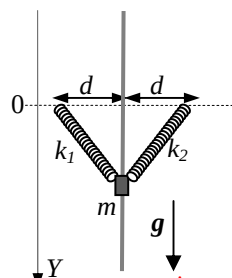
# Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 3/7/2012

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m = 2.0$  kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y, orientato verso il basso come in figura). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno entrambe lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica,  $L_0=0$ !) e costanti elastiche  $k_1 = 28$  N/m e  $k_2 = 70$  N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a delle pareti rigide e indeformabili, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza  $d = 1.0$  m da esso: il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento (vedi figura). [Usate  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità]



- a) Quanto vale la posizione di equilibrio  $y_{EQ}$  del manicotto? [Dovete esprimere la posizione di equilibrio rispetto all'asse Y di figura]

$$y_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m} \quad mg/(k_1+k_2) = 0.20 \text{ m} \quad [\text{il manicotto è vincolato a muoversi}]$$

(eventualmente!) lungo l'asse Y. Pertanto si deve cercare la condizione di equilibrio lungo questa direzione, cioè imporre che le **componenti** delle forze lungo tale direzione si bilancino. Le forze in questa direzione sono il peso, che punta verso il basso, e le **componenti verticali** delle forze elastiche che puntano verso l'alto (altrimenti l'equilibrio non ci sarebbe!) e che si ottengono moltiplicando il modulo delle forze elastiche per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse delle molle e l'asse Y. Notiamo che tale angolo è lo stesso per le due molle e che il suo valore, per la trigonometria, è dato da  $y/L$ , dove  $y$  è la posizione (generica) del manicotto e  $L$  è la lunghezza delle molle che, per Pitagora, vale  $L = (y^2 + d^2)^{1/2}$ . D'altra parte il modulo della forza elastica si esprime come  $F_i = k_i(L - L_0)$ , con  $i=1,2$  e  $L_0=0$ . Allora all'equilibrio deve verificarsi che  $mg = (k_1+k_2)L_{EQ}y_{EQ}/L_{EQ} = (k_1+k_2)y_{EQ}$ , da cui la soluzione]

- b) Supponete ora che il manicotto si trovi inizialmente fermo nella posizione di equilibrio e che a un certo istante ( $t_0 = 0$ ) esso riceva un “colpettino” che gli fornisce una velocità iniziale  $v_0$  diretta **verso l'alto** (dunque di segno negativo rispetto al riferimento dato). Si osserva che il manicotto, messo così in moto, si arresta (istantaneamente!) quando raggiunge la posizione  $y = 0$ . Quanto vale  $v_0$ ? [Usate il riferimento dato e ricordate che gli attriti sono trascurabili!]

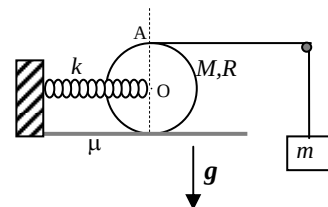
$$v_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m/s} \quad -(mg^2/(k_1+k_2))^{1/2} = -1.4 \text{ m/s} \quad [\text{non essendoci forze}]$$

dissipative, conviene usare la conservazione dell'energia meccanica:  $0 = \Delta E_K + \Delta U$ , dove  $\Delta E_K = -(m/2)v_0^2$  (il manicotto parte con velocità  $v_0$  e, quando raggiunge la quota massima, si arresta istantaneamente). La variazione di energia potenziale è dovuta sia alla variazione di quota del manicotto che alla variazione dell'energia elastica. Tenendo conto dei dati del testo, si ha  $\Delta U_G = mg(-y_{EQ})$ , dove abbiamo notato che la variazione di quota (in modulo) è pari a  $|y_{EQ}| = y_{EQ}$  e che l'energia aumenta (il manicotto sale verso l'alto). Inoltre è  $\Delta U_{ELA} = U_{ELA,FIN} - U_{ELA,IN}$ , con  $U_{ELA} = ((k_1+k_2)/2)L^2$ , dove abbiamo sfruttato le circostanze che le lunghezze delle due molle sono sempre uguali fra loro e che la lunghezza di riposo delle molle è trascurabile. Per la geometria si ha che  $L_{FIN}^2 = d^2$ , mentre  $L_{IN}^2 = d^2 + y_{EQ}^2$ , da cui  $\Delta U_{ELA} = -((k_1+k_2)/2)y_{EQ}^2$ . Mettendo tutto assieme, usando l'espressione di  $y_{EQ}$  determinata sopra e rimaneggiando si ottiene:  $v_0^2 = 2mg^2/(k_1+k_2) - ((k_1+k_2)/m)(m^2g^2/(k_1+k_2)^2) = mg^2/(k_1+k_2)$ , da cui la soluzione (dove si prende quella con il segno negativo vista l'orientazione dell'asse di riferimento)]

- c) Come si scrive la legge oraria del moto  $y(t)$  che descrive la posizione del manicotto rispetto al sistema di riferimento dato in funzione del tempo? [La vostra soluzione deve ovviamente tenere conto delle **condizioni iniziali** stabilite nel testo al quesito precedente! Scrivete una **funzione** del tempo, senza usare valori numerici ma servendovi dei dati noti del problema in forma “letterale”. Discutete **per bene** in brutta tutti i passaggi necessari per la soluzione]

$y(t) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$   $-(v_0/\omega)\cos(\omega t + \pi/2) + y_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$   
 $(mg^2/(k_1+k_2))^{1/2}/((k_1+k_2)/m)^{1/2}\sin(\omega t) + mg/(k_1+k_2) = (mg/(k_1+k_2))(1 - \sin(\omega t))$ , con  $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$  [il moto del manicotto è armonico, con pulsazione  $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ . Questo può essere facilmente dedotto scrivendo l'equazione del moto del manicotto. Sulla base di quanto discusso in precedenza, si ha infatti  $a(y) = -((k_1+k_2)/m)y + g$ , che è proprio l'equazione di un moto armonico con la pulsazione  $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ . La soluzione generica dell'equazione del moto armonico è  $y(t) = A\cos(\omega t + \phi) + y_{EQ}$ , con  $y_{EQ}$  determinato sopra e  $A$  e  $\phi$  costanti da determinare sulla base delle condizioni iniziali. La legge oraria della velocità, utile per il prosieguo del problema, si scrive  $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ . Le condizioni iniziali del moto da considerare prevedono che la posizione iniziale sia quella di equilibrio; cioè  $y(t=0) = y_{EQ}$ , e che la velocità iniziale sia  $v(t=0) = v_0$ , con  $v_0$  determinato sopra. Per soddisfare le condizioni iniziali deve dunque essere  $\phi = \pi/2$  e  $A = -v_0/\omega$ . La soluzione si trova allora notando che  $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$ , esplicitando i valori così trovati dei parametri  $A$  e  $\phi$  e sostituendo i risultati determinati sopra per  $y_{EQ}$  e  $\omega$ ]

2. Un cilindro omogeneo di massa  $M = 4.0$  kg e raggio  $R = 80$  cm è appoggiato su una superficie piana **scabra** orizzontale, che presenta un coefficiente di attrito statico  $\mu = 0.80$ . Al cilindro, nel punto A di figura (che rappresenta l'intersezione tra la superficie laterale e la verticale tracciata dal punto di contatto), è attaccata una fune inestensibile e di massa trascurabile che, dopo essere passata per un perno fisso (che non produce attrito!), termina con una massa  $m = M/4 = 1.0$  kg libera di muoversi in direzione verticale. Inoltre sull'asse del cilindro (punto O di figura) è attaccato l'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k = 98$  N/m, il cui altro estremo è fissato a un muretto.



Le condizioni di figura sono **di equilibrio**, cioè tutto è fermo. Inoltre l'asse della molla è orizzontale. [Usate  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità]

- a) Quanto vale il modulo della forza di attrito  $F_A$  che si determina al contatto tra cilindro e piano? Quanto vale l'allungamento  $\Delta L$  della molla? [Si ricorda che l'allungamento della molla rappresenta la differenza tra lunghezza attuale della molla e lunghezza di riposo della molla, che non è un dato noto del problema, perché inutile]

$$F_A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ N} \quad mg = 9.8 \text{ N} \quad [\text{la situazione considerata prevede che ci sia equilibrio}]$$

rotazionale per il cilindro ed equilibrio traslazionale per il centro di massa del cilindro e per la massa  $m$  a penzolari. L'equilibrio di questa massa permette subito di concludere che la tensione della fune è  $T = mg$  (se così non fosse la massa si muoverebbe). Per l'equilibrio rotazionale del cilindro deve essere nulla la sommatoria dei momenti delle forze. Se usiamo il polo O (scelta non intelligentissima, ma tradizionale...), notiamo che le forze che hanno braccio, quindi momento, non nullo sono la tensione  $T$  e la forza di attrito  $F_A$ , che entrambi hanno braccio  $R$ .

Affinché l'equilibrio sia possibile occorre che la forza di attrito sia diretta verso la destra della figura, nota importante per quanto seguirà. Infatti se così non fosse i momenti delle due forze tenderebbero entrambi a far ruotare il cilindro nello stesso verso, per cui l'equilibrio non sarebbe possibile. Inoltre, visto che in tutti e due i casi il braccio vale  $R$ , occorre che  $F_A$  sia in modulo pari a  $T$ , cioè  $F_A = T = mg$ , da cui la soluzione. Per concludere, è **necessario** verificare che la forza di attrito trovata abbia un valore "compatibile" con la forza di attrito che può essere generata al contatto tra cilindro e piano. Infatti si ha  $F_{A,MAX} = \mu N = \mu Mg = \mu 4mg > F_A$ , per cui l'equilibrio è possibile]

$\Delta L = \dots\dots\dots = \dots\dots m$   $2mg/k = 0.20 m$  [l'equilibrio traslazionale del centro di massa del cilindro richiede:  $|F_{ELA}| = T + F_A = 2F_A = 2mg$ . D'altra parte è  $|F_{ELA}| = k\Delta L$ , dove  $\Delta L = L - L_0$  rappresenta l'allungamento della molla rispetto alla lunghezza di riposo. Da qui la soluzione]

- b) Supponete ora che a un dato istante la fune venga improvvisamente tagliata (senza fornire velocità iniziale ad alcun elemento): ovviamente in queste nuove condizioni il sistema non è più in equilibrio. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione  $a_{CM}$  con cui il centro di massa del cilindro comincia a muoversi verso la sinistra della figura? [Dovete spiegare **bene**, in brutta, quale procedimento adottate e giustificare le varie affermazioni!]

$a_{CM} = \dots\dots\dots = \dots\dots m/s^2$   $(2/3)k\Delta L/M = (2/3)2(m/M)g = g/6 = 1.6 m/s^2$  [nelle condizioni di questa domanda la tensione della fune non c'è più e sul cilindro agiscono solo la forza elastica, diretta verso la sinistra della figura, e la forza di attrito, la quale assumerà presumibilmente un valore diverso rispetto a prima ma sarà sempre diretta verso la destra della figura, dato che si opporrà al moto del punto (generatrice) di contatto del cilindro con il piano. Scegliendo un asse orizzontale orientato verso la sinistra della figura, l'equazione del moto del centro di massa del cilindro si scrive  $a_{CM} = (k\Delta L - F_A)/M$ . L'equazione del moto di rotazione (attorno al centro del cilindro) è  $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(MR)$ , dove abbiamo notato che l'unica forza che ha braccio non nullo è l'attrito, il cui braccio è pari a  $R$ , e abbiamo usato l'espressione  $I = MR^2/2$  per il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo. Per la presenza dell'attrito il moto potrebbe essere di rotolamento puro. In queste condizioni si avrebbe  $a_{CM} = \alpha R$ . Si ottiene allora un sistema di tre equazioni con tre incognite che, risolto per  $F_A$ , fornisce  $F_A = k\Delta L/3$ , che è il valore della forza di attrito necessaria per avere rotolamento puro. Questa forza di attrito deve essere generata dal contatto tra cilindro e piano, dove si sviluppa una forza di attrito massima  $F_{A,MAX} = \mu N = \mu Mg = \mu 4mg$ . Numericamente si vede che  $F_A = k\Delta L/3 = (2/3)mg < F_{A,MAX}$ , per cui il moto è di rotolamento puro. Risolvendo di nuovo il sistema di cui sopra per l'incognita  $a_{CM}$  si ottiene la soluzione, dove abbiamo usato il valore di  $\Delta L$  determinato nella soluzione al punto precedente. Notate che nell'evoluzione successiva del moto, che è di tipo armonico, l'allungamento della molla tende a diminuire, per cui la condizione sulla forza di attrito viene ulteriormente verificata e il moto si mantiene di rotolamento puro (ma tutto ciò non era richiesto nel testo!)]

3. Due ioni con carica unitaria positiva  $q = e$  e massa rispettivamente  $m_1$  e  $m_2 = m_1/2$  si muovono **l'uno contro l'altro** lungo l'asse  $X$  di un sistema di riferimento. Inizialmente i due ioni si trovano a grandissima distanza (praticamente "infinita") tra di loro e le loro velocità sono  $v_{01} = |v_0|$  e  $v_{02} = -|v_0|$  (le due velocità sono uguali in modulo ed opposte in segno, in accordo con il fatto che i due ioni si muovono uno contro l'altro!), con  $|v_0| = 3.0 \times 10^3$  m/s. Si osserva che i due ioni si avvicinano l'un l'altro fino a raggiungere una distanza minima  $d_{MIN}$ . [Trascurate ogni effetto della forza peso, che equivale a supporre che gli ioni siano vincolati a muoversi in direzione orizzontale, e trascurate ogni eventuale forza di attrito, che equivale a supporre che l'esperimento sia condotto in condizioni di ultra-alto vuoto. Notate che i due ioni formano un **sistema** la cui forza di interazione è la repulsione elettrostatica]

- a) Quanto valgono le velocità  $v_1$  e  $v_2$  dei due ioni nell'istante in cui essi si trovano alla minima distanza relativa?  
 $v_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots m/s$   $v_0(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) = v_0/3 = 1.0 \times 10^3$  m/s [non agendo altre forze se non quelle (interne) di interazione elettrica fra le due cariche, il sistema dei due ioni è isolato. Dunque si conserva la quantità di moto, cioè, ad ogni istante del processo, deve essere  $(m_1 - m_2)|v_0| = m_1 v_1 + m_2 v_2$ , dove si è scritta correttamente (in termini di segni!) la quantità di moto iniziale del sistema. D'altra parte nell'istante di massimo avvicinamento la velocità **relativa** dei due ioni deve essere nulla, altrimenti essi continuerebbero ad avvicinarsi o si starebbero allontanando. Dunque  $v_1 = v_2$ , da cui la soluzione]

$v_2 = \dots\dots\dots = \dots\dots m/s$   $v_1 = v_0/3 = 1.0 \times 10^3$  m/s [vedi sopra]

- b) Sapendo che  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C e che la somma delle masse degli ioni vale  $(m_1 + m_2) = 3.2 \times 10^{-26}$  kg, qual è il valore della distanza minima  $d_{MIN}$ ? [Può farvi comodo ricordare che la forza di interazione elettrica tra due cariche puntiformi  $q$  si esprime, in modulo, come  $|F| = \kappa_E q^2/x^2$ , essendo  $\kappa_E = 9.0 \times 10^9$  N m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup> e  $x$  la distanza relativa (generica) tra le particelle; può anche farvi comodo ricordare che, per una variabile generica  $\xi$ , si ha  $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$ , valida per  $n \neq -1$ ]

$d_{MIN} = \dots\dots\dots = \dots\dots m$   $2\kappa_E q^2/((v_0^2 - v_1^2)(m_1 + m_2)) = 9\kappa_E q^2/(4v_0^2(m_1 + m_2)) = 1.8 \times 10^{-9}$  m [per il bilancio energetico (nella forma del cosiddetto teorema delle forze vive, visto che sul sistema non agiscono altre forze all'infuori di quella elettrica di interazione (repulsione!), si può scrivere  $L_E = \Delta E_K = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 - ((m_1 + m_2)/2)v_0^2 = ((m_1 + m_2)/2)(v_1^2 - v_0^2)$ , dove si è sfruttata la condizione sulle velocità che si verifica nell'istante di massimo avvicinamento secondo quanto stabilito nella risposta al quesito precedente. Il lavoro  $L_E$  è quello esercitato dalla forza elettrica nel processo che vede inizialmente i due ioni a distanza "infinita" fra loro, e "finalmente" alla distanza  $d_{MIN}$ . Ricordando la definizione di lavoro (e tenendo conto in modo opportuno del fatto che la forza di interazione è repulsiva), si ha  $L_E = \int_{\infty}^{d_{MIN}} (-\kappa_E q^2/x^2) dx = -\kappa_E q^2/d_{MIN}$ . Mettendo tutto insieme ed usando anche il risultato trovato alla soluzione del quesito precedente si ottiene la risposta]

**Nota:** acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 3/7/2012

Firma: