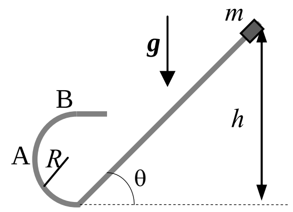
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 10/9/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto **puntiforme** di massa m = 0.10 kg può scorrere **senza attrito** su una guida fissa e rigida, realizzata con un sottile tondino foggiato come in figura. In sostanza, il manicotto **parte con velocità iniziale nulla** dalla sommità di un tratto inclinato, che forma un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale e ha un'altezza $h = 4R$ = 2.0 m. Il tratto inclinato è raccordato con una semicirconferenza di raggio R = 0.50 m seguita da un breve tratto orizzontale (è più facile da capire se guardate la figura!). L'intero percorso avviene su un piano verticale. I punti A e B a cui si fa riferimento nel seguito corrispondono, come indicato in figura, a "metà altezza" e al "punto più alto" della semicirconferenza. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

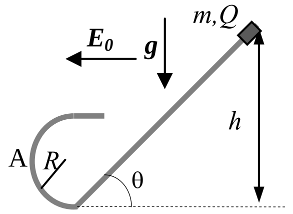


a) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A e N_B che la guida esercita sul manicotto quando questo **passa** per i punti A e B definiti sopra?

N_A = …………………………………… = ……… N *6mg = 5.9 N* [poiché gli attriti sono trascurabili, si conserva l'energia meccanica. Il punto A si trova a una quota $\Delta h = 4R\text{-}R = 3R$ inferiore rispetto al punto di partenza. Dunque, detta v_A la velocità del manicotto in questo punto, si ha $0=(m/2)v_A^2-3mgR$, ovvero $mv_A^2=6mgR$. Il manicotto sta compiendo una traiettoria circolare, dunque esso subisce un accelerazione centripeta (verso il centro di curvatura della semicirconferenza) pari a $a_C=v_A^2/R$. Poiché in questo punto la forza peso, verticale, è ortogonale alla direzione centripeta, si ha $ma_C=N_A$, da cui la soluzione]

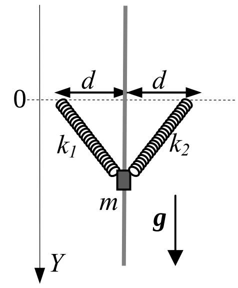
N_B = …………………………………… = ……… N *3mg = 2.9 N* [stavolta la differenza di quota è $4R\text{-}2R = 2R$ e la conservazione dell'energia meccanica porta a $mv_B^2=4mgR$. Inoltre la forza peso, che in questo punto ha direzione centripeta, contribuisce a fornire accelerazione centripeta, cioè si ha $ma_C = N_B+mg$. Da qui, ragionando come sopra, si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che il manicotto rechi una carica elettrica Q = 1.0x10^{-4} C e che **in tutta** la regione di interesse sia presente un campo elettrico (esterno) costante e uniforme diretto orizzontalmente verso la sinistra di figura e di modulo E_0 = 2.0x10^3 V/m. Ripetendo l'esperimento in queste nuove condizioni, quanto vale in modulo la reazione vincolare N'_A esercitata dalla guida sul manicotto quando questo **passa** per il punto A definito sopra? [Si ricorda che una carica elettrica Q in presenza di un campo elettrico $\mathbf{E_0}$ risente di una forza $\mathbf{F_E} = Q\mathbf{E_0}$]



N'_A = …………………………………… = ……… N *3mg +6QE₀ = 4.1 N* [si ragiona come sopra, ma stavolta occorre considerare la presenza della forza elettrica sul manicotto, uniforme e costante, che produce due effetti. Il primo è che, essendo tale forza diretta in direzione "centrifuga" (opposta a quella centripeta) essa sarà da tenere in conto nel computo dell'accelerazione centripeta, cioè si avrà: $ma'_c = N'_A - QE_0$ (il segno meno è dovuto al verso). Inoltre la forza elettrica produce un lavoro (o, se si preferisce, una variazione di energia potenziale) che influisce sul bilancio energetico, cioè sulla velocità del manicotto. Si ha infatti $L_E = (m/2)v'^2_A-3mgR$. Dato che la forza elettrica è costante e uniforme, il lavoro può essere calcolato come prodotto della forza per la **componente** dello spostamento Δx nella direzione della forza stessa (occhio: nella definizione di lavoro c'è un prodotto scalare!), cioè $L_E = QE_0\Delta x$. Semplicissimi ragionamenti geometrici, basati sul fatto che $\theta = \pi/4$, portano a $\Delta x = 4R+R = 5R$. Da qui la soluzione]

2. Un manicotto **puntiforme** di massa m = 2.0 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y, orientato verso il basso come in figura). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno entrambe **lunghezza di riposo trascurabile** (in pratica, L_0=0!) e costanti elastiche k_1 = 28 N/m e k_2 = 70 N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a delle pareti rigide e indeformabili, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza d = 1.0 m da esso: il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento (vedi figura). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale la posizione di equilibrio y_{EQ} del manicotto? [Dovete esprimere la posizione di equilibrio rispetto all'asse Y di figura]

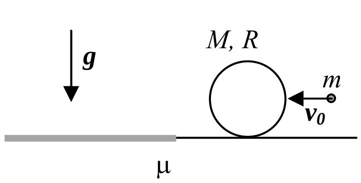
y_{EQ} = …………………………………… = ……… m *mg/(k₁+k₂) = 0.20 m* [il manicotto è vincolato a muoversi (eventualmente!) lungo l'asse Y. Pertanto si deve cercare la condizione di equilibrio lungo questa direzione, cioè imporre che le **componenti** delle forze lungo tale direzione si bilancino. Le forze in questa direzione sono il peso, che punta verso il basso, e le **componenti verticali** delle forze elastiche che puntano verso l'alto (altrimenti l'equilibrio non ci sarebbe!) e che si ottengono moltiplicando il modulo delle forze elastiche per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse delle molle e l'asse Y. Notiamo che tale angolo è lo stesso per le due molle e che il suo valore, per la trigonometria, è dato da y/L, dove y è la posizione (generica) del manicotto e L è la lunghezza delle molle che, per Pitagora, vale $L = (y^2+d^2)$. D'altra parte il modulo della forza elastica si esprime come $F_i = k_i(L\text{-}L_0)$, con $i=1,2$ e L_0=0. Allora all'equilibrio deve verificarsi che $mg = (k_1+k_2)L_{EQ}y_{EQ}/L_{EQ} = (k_1+k_2)y_{EQ}$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che il manicotto venga spostato, da una qualche causa esterna, fino alla posizione y_0 = 0 e da qui a un certo istante venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Come si scrive l'equazione del moto $a(y)$ del manicotto? Che tipo di moto compie il manicotto e perché? [Dovete scrivere un'equazione che leghi l'accelerazione con la posizione y generica del manicotto. Notate che dovete fare in modo che l'unica variabile "indipendente" dell'equazione sia la y (rispetto al riferimento dato)! Non usate valori numerici per questa risposta, ma servitevi delle "espressioni letterali" dei vari parametri del problema]

$a(y)$ = …………………………………… *g-((k₁+k₂)/m)y* [riprendiamo le osservazioni svolte in precedenza. Per scrivere l'equazione del moto occorre esprimere le forze che agiscono, in direzione verticale, sul manicotto. Tali forze sono il peso, mg (con segno positivo essendo diretto verso il basso) e le componenti verticali delle due forze elastiche. Secondo quanto già stabilito, esse si scrivono come $-k_1Ly/L = -k_1y$ e $-k_2Ly/L=-k_2y$, da cui la soluzione]

Moto del manicotto e spiegazione: …………………………………… L'equazione del moto appena determinata è quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ = 7.0 rad/s e posizione di equilibrio y_{EQ} determinata sopra. Il manicotto, dunque, oscilla attornoo a questa posizione di equilibrio e la sua legge oraria del moto è del tipo $y(t)=A\cos(\omega t+\phi)+y_{EQ}$, mentre la legge oraria della velocità è $v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$. Le condizioni iniziali permettono di determinare i valori delle costanti A e ϕ. In particolare, la velocità iniziale nulla impone $0 = -A\omega\sin(\phi)$, cioè ϕ = 0, e la posizione iniziale nulla conduce a $0 = A+y_{EQ}$, cioè $A=-y_{EQ}$.

3. Una ruota, costituita da un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 0.40 kg e raggio R = 20 cm, si trova, inizialmente **ferma**, su un piano orizzontale. Questo piano è **privo di attrito** nella zona di appoggio della ruota; quindi, dopo un breve tratto (di lunghezza incognita e irrilevante), il piano **diventa scabro** e presenta un coefficiente di attrito μ = 0.20 (questo coefficiente vale sia per l'attrito statico che per quello dinamico). A un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m = M/4$ = 0.10 kg colpisce il cerchione avendo una velocità di modulo v_0 = 1.0 m/s diretta orizzontalmente e orientata come in figura. La collisione avviene nel "punto di mezzo" del cerchione (vedi figura) e può essere considerata completamente **elastica**; dopo l'urto, si osserva che il proiettile conserva una velocità (incognita) di direzione **orizzontale**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale la velocità V_{CM} del centro di massa della ruota subito dopo l'urto? Quanto vale la sua velocità angolare ω?

V_{CM} = …………………………….. = ... m/s $(2/5)v_0$ = 0.40 m/s [nell'urto elastico si conservano quantità di moto ed energia cinetica totali del sistema. Non essendoci attrito da parte del piano di appoggio (non ci sono forze che fanno momento rispetto al centro della ruota), sicuramente la ruota non si mette a ruotare, e il moto immediatamente successivo all'urto è unicamente di traslazione. Le conservazioni impongono: $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2+(M/2)V_{CM}^2$ e $mv_0 = mv+MV_{CM}$, dove v indica la componente (orizzontale) della velocità del proiettile subito dopo l'urto. Usando la relazione tra le masse data nel testo e semplificando opportunamente,queste espressioni possono essere riscritte come: $v_0^2=v^2+4V_{CM}^2$ e $v_0 = v+4V_{CM}$. Ricavando v dalla seconda e mettendolo nella prima si ottiene questa equazione algebrica di secondo grado: $v_0^2=v_0^2-8v_0V_{CM}+16V_{CM}^2+4V_{CM}^2$, ovvero, semplificando opportunamente: $0 = -2v_0V_{CM}+5V_{CM}^2$. Tale equazione ha due soluzioni distinte, una delle quali, quella che conduce a $V_{CM} = 0$, non è fisicamente rilevante (indicherebbe che l'urto non è avvenuto…). L'altra è quella riportata in risposta]

ω = …………………………….. = ... rad/s 0 [vedi sopra!]

b) Discutete **per bene**, in brutta, che tipo di moto la ruota compie nel tratto privo di attrito e **subito dopo** essere entrata in quello scabro. Chiarite in particolare se si verificano o meno le condizioni di rotolamento puro, spiegando bene il perché della vostra risposta. [Pensate attentamente a cosa implica il rotolamento puro!!]

Discussione: …………………………….. il rotolamento puro implica una precisa reazione, di origine geometrica, fra velocità di traslazione e velocità angolare: $V_{CM} = \omega R$. Questa relazione è evidentemente **non** verificata nel tratto privo di attrito, dove la velocità angolare è nulla e quella traslazionale è ben diversa da zero. Poiché, come vedremo meglio nel seguito, occorre del tempo affinché la ruota raggiunga una velocità angolare sufficientemente alta da permettere moto di rotolamento puro (e intanto la velocità del centro di massa diminuisce), non ci sarà rotolamento puro neanche subito dopo l'ingresso nella zona scabra.

c) Come si scrivono le equazioni del moto di traslazione del centro di massa a_{CM} e di rotazione α che si applicano alla ruota quando questa si trova nel tratto scabro? [Dovete scrivere delle equazioni del moto, dunque non usate valori numerici]

a_{CM} = …………………………….. $-F_A/m$ [ovviamente l'equazione va scritta per le componenti orizzontali, dato che in direzione verticale è presente il vincolo rappresentato dalla strada. L'unica forza esterna che agisce sulla ruota è l'attrito F_A, opposto al moto e dunque con segno negativo, che potrà essere dinamico o statico a seconda che le condizioni siano di rotolamento non puro o puro]

α = …………………………….. $2F_A/(mR)$ [ovviamente si prende come polo il centro di massa, cioè il centro geometrico della ruota. Rispetto a tale polo l'unica forza che fa momento, avendo braccio pari a R , è la forza di attrito. Nella soluzione si è anche esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo, $I = mR^2/2$. Inoltre il segno è preso convenzionalmente positivo dato che tale accelerazione provoca una rotazione di segno positivo, coerentemente con il segno positivo della traslazione]

d) Quanto vale la velocità V'_{CM} del centro di massa della ruota quando questa, ovvero il suo centro di massa, ha percorso un tratto D = 2.0 m della zona scabra? [Attenzione: per rispondere dovete capire per bene la dinamica della ruota e tenere conto in modo chiaro di tutti gli aspetti coinvolti!]

V'_{CM} = …………………………….. = ……. m/s $2V_{CM}/3$ = 0.27 m/s [il moto è uniformemente accelerato sia in senso tralsazionale che rotazionale, dato che le accelerazioni sono costanti. Nella fase iniziale non c'è rotolamento puro e la generatrice della ruota a contatto con la strada slitta. L'attrito è dunque dinamico, tale che $F_A = \mu N = \mu mg$. Di conseguenza in questa fase si ha: $a_{CM} = -\mu g$ e $\alpha = \mu g/R$. Tenendo conto delle condizioni iniziali e ponendo $t = 0$ l'istante in cui la ruota arriva sul tratto scabro, le leggi orarie delle velocità si scrivono: $V_{CM}(t) = V_{CM} -\mu gt$ e $\omega(t) = 2\mu gt/R$. La velocità de centro di massa decresce linearmente mentre quella angolare aumenta linearmente. Esiste allora un'istante t' tale che $V_{CM}(t')=\omega(t')R$. Risolvendo, si vede che tale istante vale $t' = V_{CM}/(3\mu g)$. A questo istante le condizioni sono quelle di rotolamento puro e la generatrice non slitta più sulla strada. Di conseguenza l'attrito diventa statico, e non è più vero che esso vale necessariamente $F_A = \mu N$, dovendo invece essere $F_A \le \mu N$. Da questo istante in poi, inoltre, non ci sono più forze dissipative che facciano lavoro, dunque si conserva l'energia meccanica. Questo implica che le velocità restino inalterate,cioè il rotolamento rimane puro. Dopo questa lunga, ma necessaria, premessa si può dare una risposta alla domanda. Scrivendo la legge oraria dello spostamento per il moto uniformemente accelerato, all'istante t' il centro di massa risulta aver percorso una distanza $s(t') = V_{CM}t'-a_{CM}t'^2/2 = V_{CM}^2/(2\mu g)-\mu g(V_{CM}/(3\mu g))^2/2 = (V_{CM}^2/(2\mu g))(1-1/9)=8V_{CM}^2/(18\mu g)= 4V_{CM}^2/(9\mu g)$. Numericamente si ottiene $s(t') << D$. Dunque alla distanza D il moto è già ampiamente di rotolamento puro e la velocità vale $V'_{CM} = V_{CM}(t') = V_{CM}-\mu gV_{CM}/(3\mu g)=2V_{CM}/3$]

e) Quanto vale la forza di attrito F'_A quando la ruota, ovvero il suo centro di massa, ha percorso il tratto D sulla zona scabra?

F'_A = …………………………….. = ……. N 0 [il moto è di rotolamento puro e avviene con velocità costante, secondo quanto stabilito prima. Le equazioni del moto prima determinate stabiliscono che questo è possibile solo se $F_A = 0$, da cui la risposta, Notate che questo valore della forza di attrito è sempre compatibile con il contatto tra ruota e strada a prescindere dal coefficiente, dato che è sempre $F'_A < \mu N$. Quindi le ipotesi fatte sono tutte verificate]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 10/9/2012 Firma: