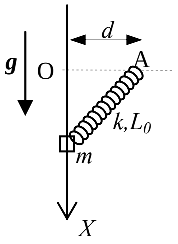
Corso di Laurea Ing E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 21/7/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.***
Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

-- **PARTE 1**



1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido di direzione verticale (asse X di figura, orientato verso il basso) in cui il manicotto è infilato. Il manicotto è legato all'estremità di una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 10 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 20 cm, il cui altro estremo è fissato al punto A di figura: come si vede, tale punto è sull'orizzontale passante per l'origine del riferimento (asse X), a una distanza $d = L_0$ = 20 cm da questo. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; notate che la figura si riferisce a una situazione **generica**, in cui il manicotto si trova alla posizione x generica e la molla ha lunghezza L generica]

a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto? Come si scrive la funzione che stabilisce il **modulo** della reazione $N(x)$ esercitata dal tondino sul manicotto in funzione della posizione x del manicotto? [Dovete scrivere delle funzioni di x, coordinata generica del manicotto rispetto all'asse di figura: **non** usate valori numerici!]

$a(x)$ = ……………………. $g-(k/m)x+(k/m)xL_0/(x^2+L_0^2)^{1/2}$ [l'equazione del moto va scritta per l'unica direzione possibile per il moto, che è quella verticale. Occorre quindi individuare le forze che agiscono in questa direzione. Usando l'asse X di figura, che punta verso il basso, in questa direzione si trova la forza peso mg e la componente verticale della forza elastica. Il **modulo** della forza elastica vale $k(L-L_0)$, con $L = (x^2+d^2)^{1/2}$ lunghezza della molla, e la proiezione in direzione orizzontale si ottiene moltiplicando per $-x/L$, come si vede con semplici considerazioni di trigonometria (il segno negativo si deve al fatto che la forza ha componente diretta verso l'alto). Da qui, ricordando che $d = L_0$, la soluzione]

$N(x)$ = ……………………. $kd-kdL_0/(x^2+L_0^2)^{1/2}$ [la reazione vincolare che il tondino esercita serve a far muovere il manicotto stesso in direzione verticale. Dunque essa deve bilanciare la componente orizzontale della forza elastica, l'unica forza che ha componente orizzontale. Notando che la proiezione della forza elastica in direzione orizzontale si ottiene moltiplicandone il modulo per d/L si ottiene la soluzione]

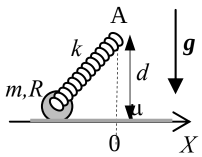
b) Supponete ora che inizialmente il manicotto si trovi fermo nella posizione $x_0 = 3L_0$ = 60 cm e che a un dato istante venga lasciato libero di muoversi da questa posizione con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v' con cui il manicotto passa, se ci passa, per la posizione x' = 0 (per la prima volta)?

v' = ……………………. ~ ……… m/s $-((k/m)L_0^2(10^{1/2}-1)^2-6gL_0)^{1/2}$ ~ -5.1 m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare la conservazione dell'energia meccanica, $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica, dato che il manicotto parte da fermo, è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale si deve alla variazione di energia gravitazionale (dovuta alla forza peso), che vale mgx_0, e alla variazione dell'energia elastica, che si ottiene notando che inizialmente la molla ha lunghezza $L_{IN} = (x_0^2 +d^2)^{1/2}$, mentre "finalmente" la lunghezza vale $L_{FIN} = d$. Poiché l'energia elastica di una molla di lunghezza generica L e lunghezza di riposo L_0 si scrive $U_{ELA} = (k/2)(L-L_0)^2$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)((d-L_0)^2-((x_0^2+d^2)^{1/2}-L_0)^2 = -(kL_0^2/2)(10^{1/2}-1)^2$, dove abbiamo notato che $x_0=3L_0$ e che $d = L_0$. In definitiva si ha: $(m/2)v'^2=(kL_0^2/2)(10^{1/2}-1)^2-3mgL_0$. Da qui si ottiene la risposta, dove abbiamo scelto la soluzione negativa perché il manicotto si sta muovendo verso l'alto, cioè nel verso negativo dell'asse]

c) Discutete per benino e meglio che potete, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto, e, qualora si tratti di moto armonico, quanto vale la pulsazione. Provate anche a vedere se si presentano delle situazioni rilevanti per certi valori di d o di L_0. [Se ne conoscete il significato, potrebbe farvi comodo ricordare i concetti che conducono a "sviluppare in serie" una funzione]

Discussione: ……………………. L'equazione del moto armonico deve essere del tipo $a(x) = -(k/m)x + costanti$, con (k/m) coefficiente positivo. Come si vede, il manicotto **non** ha un'equazione del moto di questo tipo, per cui il moto **non** è armonico e non si può determinare la pulsazione. Tuttavia il moto sarà presumibilmente periodico, di oscillazione (non armonica) attorno a una posizione di equilibrio, quella in cui $a(x_{EQ})$ = 0. Osservate che il termine non armonico dell'equazione del moto, cioè il termine $(k/m)L_0x/(x^2+d^2)^{1/2}$, diventa costante se L_0 = 0 (in questo caso il termine è proprio nullo), caso in cui si ha oscillazione armonica con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Inoltre il moto è armonico anche se d=0 (questo significa in pratica che la molla ha il suo asse in direzione verticale), ancora una volta con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$, caso in cui il termine non armonico vale $(k/m)L_0$. Verifichiamo ora cosa succede se d è molto grande, cioè se è sempre verificata la disuguaglianza $d >> x$; in queste condizioni il termine al denominatore dell'espressione sopra scritta è dominato da d, cioè $(k/m)xL_0/(x^2+d^2)^{1/2} \sim (k/m)xL_0/d$, che diventa così un termine dipendente linearmente da x. Esso è di segno positivo, ma, supponendo $d>>L_0$, il suo contributo diventa trascurabile e il moto armonico con pulsazione $\omega \sim (k/m)^{1/2}$. Naturalmente la situazione è ben diversa se anche L_0 diventa molto grande, cioè se si mantiene la condizione $d = L_0$: è facile rendersi conto che l'equazione del moto tenderebbe in questi casi a $a \sim g$, cioè il moto sarebbe uniformemente accelerato, compatibilmente col fatto che, per una molla che ha grandissima lunghezza di riposo, la variazione di lunghezza dovuta allo spostamento del manicotto produce effetti praticamente irrilevanti. Infine si potrebbe dimostrare, ma questo è davvero più complicato dal punto di vista algebrico, che il moto è armonico anche per piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio

-- **PARTE 2**



2. Un cilindro pieno e omogeneo, di massa m = 6.0 kg e raggio R = 20 cm, si trova su un piano **orizzontale scabro**, che presenta un coefficiente di attrito μ = 0.80. Il cilindro può ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse dove, grazie a un opportuno giogo di massa trascurabile, si trova agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 40 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica, L_0 = 0). L'altra estremità della molla è vincolata a un punto (punto A di figura) che si trova sulla verticale dell'origine del sistema di riferimento (asse X) che **dovete** usare, a una distanza d = 1.2 m dal piano orizzontale (vedi figura). Inizialmente il cilindro si trova **fermo**, a causa di una qualche forza esterna, nella configurazione rappresentata in figura: in queste condizioni, la lunghezza della molla è $L = d$ e il centro di massa del cilindro si trova in x<0. Quindi, all'istante t_0 = 0, la forza esterna viene rimossa e il cilindro si trova libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro, valutando tutti gli aspetti coinvolti, in particolare se: (i) il cilindro resta sempre a contatto con il piano orizzontale; (ii) il moto iniziale è di rotolamento puro; (iii) il moto rimane di rotolamento puro durante l'intera sua evoluzione, e valutate la velocità v_{CM}' del centro di massa del cilindro nell'istante in cui esso passa per la posizione x = 0.

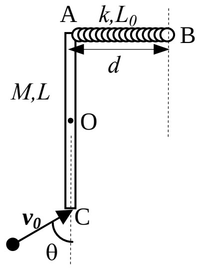
Discussione : ……………………….. In primo luogo occorre valutare se il cilindro si mantiene a contatto con il piano orizzontale. Infatti esso è soggetto alla forza elastica che ha una componente verticale la quale potrebbe essere maggiore della forza peso, provocando il distacco del cilindro. La forza elastica vale in modulo kL, e la sua componente verticale F_{eleY} si trova moltiplicando per $(d-R)/L$, come si ottiene con semplici ragionamenti di trigonometria. Usando i valori numerici delle varie grandezze, si trova: $F_{eleY} = kL(d-R)/L = k(d-R)$ = 40 N < mg = 59 N. Quindi inizialmente il cilindro non si distacca dal piano. Nell'evoluzione del moto, la molla continua sempre a esercitare la stessa forza in direzione verticale. Dunque il cilindro non si distaccherà mai dal piano. Essendo il cilindro un corpo rigido esteso occorre verificare se il moto può essere di rotolamento puro. Le equazioni del moto rotazionale (rispetto al centro di massa, cioè al centro del cilindro)e quella del moto traslazionale del centro di massa, scritta rispetto all'asse X di figura, si scrivono : $\alpha = F_AR/I = 2F_A/(mR)$, dove abbiamo posto positivo il verso di rotazione orario, abbiamo notato che l'unica forza che fa momento è la forza di attrito, di modulo F_A, e che il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo vale $I = mR^2/2$, e $a_{CM} =(F_{eleX} -F_A)/m$, dove abbiamo notato che la forza di attrito, opponendosi allo scivolamento della generatrice del cilindro a contatto con il piano, che tende a muoversi verso la sinistra di figura, ha segno negativo. La componente orizzontale della forza elastica, invece, ha valore positivo e si esprime, usando ancora un po' di trigonometria, $F_{elelX}=-kLx/L=-kx$ (notate che il segno meno è necessario se con x si esprime la coordinata del centro di massa, con segno e tutto!). Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, si ha la relazione geometrica (per i moduli) $\alpha = a_{CM}R$. Risolvendo il sistema di tre equazioni così ottenuto per l'incognita F_A, considerata in modulo per non fare confusione, si ottiene : $F_A = k|x|/3$, dove il segno di modulo ci rende sempre positiva l'espressione qualsiasi sia il segno di x . Tale forza ha il suo valore massimo nella posizione iniziale, dove il suo **modulo** vale $k|x_0|/3$, con $|x_0| = (L^2-(d-R)^2)^{1/2} = (d^2-d^2-R^2+2dR)^{1/2} = R^{1/2}(2d-R)^{1/2}$, da cui si vede che il modulo della forza di attrito necessaria per il rotolamento puro vale, al suo valore massimo (per le condizioni di figura), $F_A =kR^{1/2}(2d-R)^{1/2}/3$ ~ 8.8 N. La forza di attrito determinata dal contatto tra generatrice e piano vale **al massimo** $F_{A,MAX} = \mu N = \mu(mg-F_{elaY}) = \mu(mg-k(d-R))$ = 15 N. Dunque la forza di attrito garantita dalla superficie scabra permette, inizialmente e sempre, il moto di rotolamento puro. Si noti infatti che, per banali considerazioni di bilancio energetico, la molla non si allungherà mai più del valore iniziale, cioè non succederà mai che $|x|>|x_0|$, per cui il valore della forza di attrito necessaria per il rotolamento puro tenderà eventualmente a diminuire durante il moto versoo x = 0.

SEGUE

v_{CM}' = ……………………….. ~ ……….. m/s $((k/(3m))(2dR-R^2))^{1/2} \sim 1.0$ m/s [essendo il moto di rotolamento puro si ha conservazione dell'energia meccanica (la forza di attrito statica che vi è coinvolta non compie lavoro !), cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA} = (m/2)v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 +(k/2)((d-R)^2-d^2) = 3mv_{CM}'^2/2 +(k/2)(R^2-2dR)$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo e notato che la variazione di energia elastica è dovuta alla differenza di estensione, cioè di lunghezza (la lunghezza di riposo è nulla!), della molla, la cui energia elastica per una lunghezza generica L si scrive $U_{ELA} = (k/2)L^2$. Da qui la soluzione]

b) Detto t' l'istante in cui il centro di massa del cilindro passa per la posizione $x = 0$ (cioè t' è l'istante in cui la velocità del centro di massa è v_{CM}' determinata sopra), quanto vale la velocità v_{CM}'' all'istante t''? [Attenti alle trappole! Spiegate bene in brutta cosa fate e perché…]
v_{CM}'' = ……………………….. ~ ……….. m/s $v_{CM}'\sin(\pi/4) \sim 0.70$ m/s [il moto di rotazione del cilindro segue l'equazione, che vale per i moduli, $\alpha = 2F_A/(mR)$, come visto sopra. Altrettanto già dimostrato è che la forza di attrito vale, in modulo e nelle condizioni di rotolamento puro, che abbiamo verificato valide, $F_A = k|x|/3$. Da qui si ricava $\alpha = 2|k|x|/(3mR)$ e $a_{CM} = \alpha R = 2k|x|/(3m)$. Ora, per decidere il segno da porre in questa espressione in modo che esso sia correttamente contenuto nell'equazione del moto, osserviamo che, quando x diventa meno negativo (il centro di massa del cilindro si muove verso l'origine del riferimento), cioè più piccolo in modulo, l'accelerazione diminuisce. Di conseguenza occorre mettere un segno meno davanti all'espressione, cioè $a_{CM} = -(2k/(3m))x$ (mi scuso per l'apparente ingarbugliamento con cui ho provato a spiegare la questione dei segni: spero si capisca!). Questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\Omega = (2k/(3m))^{1/2}$ e periodo $T = \pi/(2\Omega)$. Concentriamoci sul moto armonico: l'istante t', quello in cui il centro di massa passa per la posizione di equilibrio dell'oscillazione armonica, è $t'=T/4$, come potete facilmente verificare (l'oggetto parte da fermo dalla posizione di massima ampiezza, in modulo, dell'oscillazione e ci vuole un quarto di periodo perché passi per la prima volta per la posizione di equilibrio). L'istante t'' è quindi tale che $t''=T/8$. In un moto armonico la velocità varia nel tempo secondo una funzione del tipo $v(t) = -A\Omega\sin(\Omega t + \Phi)$, con A e Φ dipendenti dalle condizioni iniziali. Poiché nel nostro riferimento dopo un quarto di periodo la posizione dell'oggetto è $x(t') = x(T/4) = 0$, è immediato che $\Phi = 0$. Inoltre, dato che nell'istante t' la velocità raggiunge il suo valore massimo v_{MAX} (in modulo), è altrettanto facile convincersi che $v(t'') = v_{MAX}\sin(\Omega t'')=v_{MAX}\sin(2\pi t''/T)=v_{MAX}\sin(\pi/4)$. Il valore v_{MAX} è proprio v_{CM}' determinato sopra, da cui la soluzione che, come potete facilmente verificare, è corretta anche come segno (il cilindro, all'istante considerato, si sta spostando nel verso positivo dell'asse X)]

3. Una sottile asta omogenea di massa M = 5.0 kg e lunghezza L = 50 cm è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano **orizzontale** attorno a un asse passante per il proprio punto di mezzo (il centro di massa, indicato con O in figura). A un'estremità dell'asta, punto A di figura, è agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 20 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 20 cm. L'altra estremità della molla è vincolata a un punto, indicato con B in figura, che si trova a distanza $d = L_0$ dal punto A. Inizialmente, dunque, l'asta è in equilibrio con la molla alla propria lunghezza di riposo. A un certo istante un proiettile di massa m = 50 g colpisce l'estremità C dell'asta con una velocità di modulo v_0 = 50 m/s che ha la direzione indicata in figura (l'angolo tra la direzione della velocità e l'asse dell'asta vale $\theta = \pi/3$). In seguito all'urto, il proiettile rimane istantaneamente **conficcato** nel punto C dell'asta. [Ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Discutete per benino, in brutta, cosa si conserva nell'evento dell'urto, cioè individuate quali fra le grandezze meccaniche che caratterizzano il sistema si conservano nel breve intervallo di tempo tra **subito dopo** e **subito prima** dell'urto.
Discussione: …………………………………… L'urto è un evento impulsivo, di durata molto breve. Nell'intervallo di tempo considerato il sistema subisce forze impulsive "esterne" attraverso il perno. Queste forze rendono il sistema non isolato, per cui **non** si conserva la quantità di moto totale. Tuttavia, essendo tali forze applicate al punto O, il sistema è isolato in termini di momenti delle forze esterne calcolate rispetto a questo polo. Di conseguenza si conserva il momento angolare totale. Infine, essendo l'urto palesemente anelastico, l'energia cinetica totale **non** si conserva. Notate come nella valutazione della conservazione di quantità di moto e momento angolare non abbiamo considerato la forza elastica, anch'essa esterna al sistema, che non fa effetto non essendo di carattere impulsivo.

b) Dopo l'urto si osserva che l'asta comincia a ruotare attorno al perno e, di conseguenza, la molla si allunga fino a raggiungere (istantaneamente, cioè per un istante) un valore di lunghezza massima L_{MAX}. Quanto vale L_{MAX}?
L_{MAX} = …………………………………… ~ .... m $L_0+mv_0\sin\theta(3/(k(M+3m))^{1/2} \sim 0.57$ m [il processo va suddiviso in due fasi: la prima riguarda l'urto e si esaurisce nella breve durata di questo, la seconda riguarda la rotazione dell'asta e si svolge, ragionevolmente, in tempi più lunghi. Nell'urto si conserva il momento angolare (assiale e riferito al polo O): prima dell'urto il solo proiettile si muove, contribuendo al momento angolare totale per la quantità $mv_0L\cos\theta/2$ (si ottiene facilmente ricordando la definizione di momento angolare, $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v_0}$, dove tutte le grandezze hanno un significato ovvio, e notando che il "braccio" della quantità di moto, cioè la distanza fra polo e direzione della velocità, vale $L\cos\theta/2$). Dopo l'urto il sistema costituito da asta e proiettile conficcato comincia a ruotare con una velocità angolare ω, e quindi il momento angolare può essere espresso come $I_{TOT}\omega$, con $I_{TOT} = I_{ASTA}+I_{PR} = (ML^2/12+mL^2/4) =(M+3m)L^2/12$. Uguagliando il momento angolare subito prima e subito dopo l'urto si ottiene $\omega = mv_0L\cos\theta/(2I_{TOT})$. A questo punto inizia la rotazione del sistema e in questa fase, non essendoci attriti, si conserva l'energia meccanica complessiva, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA} = -(I_{TOT}/2)\omega^2 + (k/2)(L_{MAX}-L_0)^2$, dove abbiamo notato che il sistema è inizialmente (in questa fase!) in moto e "finalmente" fermo e che l'energia elastica della molla, inizialmente nulla, è proporzionale al quadrato della sua elongazione. Si ottiene allora: $(L_{MAX}-L_0)^2 = (I_{TOT}/k)\omega^2 = m^2v_0^2L^2\cos^2\theta/(4I_{TOT}k)$ da cui la soluzione]

-- **TERMODINAMICA**

4. Due campioni di gas che si comportano come gas perfetti sono contenuti in due recipienti identici, di capacità termica **trascurabile**, realizzati con due cilindri di area di base A = 30 cm^2 muniti di un tappo di **massa trascurabile** scorrevole **senza attrito** e posto in contatto con la pressione atmosferica P_{ATM} = 1.00x10^5 Pa. In particolare, il recipiente A contiene n = 1.00x10^{-2} moli di gas **monoatomico**, mentre il recipiente B contiene la stessa quantità n = 1.00x10^{-2} moli di gas **biatomico**. Inizialmente i due gas si trovano rispettivamente alle temperature T_A = 300 K e $T_B = (4/7)T_A$ = 171 K. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

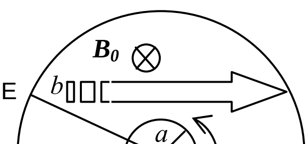
a) Quanto valgono le altezze h_A e h_B delle regioni occupate dai gas A e B nei rispettivi recipienti?
h_A = ……………………………… = …….. m $nRT_A/(AP_{ATM})$ = 8.31x10^{-2} m
h_B = ……………………………… = …….. m h_AT_B/T_A = 4.75x10^{-2} m [dalla legge dei gas perfetti, notando che la pressione dei gas è quella atmosferica, essendo i sistemi in equilibrio e i tappi in contatto con la pressione atmosferica]

b) Immaginate ora che i due recipienti vengano messi in contatto termico fra loro, ad esempio chiudendoli in una camera con capacità termica trascurabile munita di pareti impermeabili al calore (si intende che non c'è alcuno scambio termico oltre a quello tra i due gas). I due gas termalizzano fino a raggiungere una nuova temperatura di equilibrio, T'. Quanto vale T'? [Supponete che durante l'intero processo di termalizzazione la pressione atmosferica P_{ATM} continui ad agire inalterata sui tappi dei due recipienti e che il processo avvenga lentamente, cioè passando per stati di equilibrio]
T' = …………………………………… = ……… K $(nc_{PA}T_A+nc_{PB}T_B)/(nc_{PA}+nc_{PB})=(5T_A+7T_B)/12 = (3/4)T_A$ = 225 K [per il bilancio dei calori, dette Q_A e Q_B le quantità di calore scambiate dai due gas, deve essere $0 = Q_A+Q_B$. D'altra parte i gas subiscono trasformazioni isobare, dato che la pressione atmosferica continua ad agire sui tappi, per cui $Q_{A,B} = nc_{PA,B}\Delta T_{A,B}$. Ricordando che il calore specifico molare a pressione costante di un gas perfetto vale $c_P = (5/2)R$ o $(7/2)R$ a seconda che il gas sia mono- o bi-atomico, e svolgendo i calcoli, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale la variazione **totale** di entropia ΔS del **sistema dei due gas** nell'intero processo? [Si intende $\Delta S = \Delta S_A+\Delta S_B$]
ΔS = …………………………………… ~ .... J/K $nc_{PA}\ln(T'/T_A)+nc_{PB}\ln(T'/T_B)=(nR/2)(5\ln(T'/T_A)+7\ln(T'/T_B)) \sim 1.93$x10^{-2} J/K [le trasformazioni sono isobare, dunque $\Delta S_{A,B} = nc_{PA,B}\ln(T'/T_{A,B})$. Da qui, esplicitando le espressioni dei calori specifici molari a pressione costante dei due gas, la soluzione. Si noti che la variazione di entropia netta è diversa da zero e positiva, anche se il sistema nel suo complesso ha caratteristiche adiabatiche (è isolato dal mondo esterno dato che le pareti della scatola sono impermeabili al calore). Questo indica che la trasformazione considerata è nel suo complesso irreversibile]

-- **PARTE 3**

5. Un disco (un cilindro molto più "basso" che "largo") **cavo** omogeneo, fatto di materiale ottimo conduttore globalmente neutro, che ha raggio interno a = 50 cm, raggio esterno b = 1.0 m e spessore h = 10 cm, viene



SEGUE

mantenuto in rotazione attorno al suo asse (indicato con O in figura) con velocità angolare costante ω = 10 rad/s da un operatore esterno. Nella regione in cui si trova il disco è presente un campo magnetico esterno uniforme e costante, diretto ortogonalmente alla superficie del disco e di modulo B_0 = 2.0x10^{-2} T (il verso del campo si deduce dalla figura, che riporta una vista "dall'alto" del sistema: rispetto a questa figura il campo "entra nel foglio" e la rotazione avviene in verso antiorario). Supponete che le condizioni a cui si fa riferimento nelle domande siano di equilibrio (cioè la rotazione del disco ha avuto inizio molto tempo prima di quando il sistema viene considerato).

a) Come è fatto e che espressione ha, sempre che esista, il campo elettrico all'interno del disco? Discutete per benino in brutta sull'origine di questo campo, sul suo legame con il campo magnetico, sulla sua direzione e verso, sulla sua espressione.
Discussione: …………………………………………… la rotazione del disco fornisce alle cariche che esso contiene (di ambo i segni, in ugual numero essendo il disco neutro) una velocità tangenziale di verso antiorario, come la rotazione, e di modulo pari a ωr , con r generico compreso tra a e b (si noti che la velocità non è omogenea su tutto il disco!). Per la forza di Lorentz, le cariche positive vengono spinte verso la superficie laterale "interna" e quelle negative verso la superficie laterale "esterna", come si verifica facilmente usando la regola della mano destra. Il processo di spostamento prosegue finché, all'equilibrio, le forze dovute al campo elettrico generato da questa separazione di cariche uguaglino la forza di Lorentz. In altri termini, all'interno del disco si crea un campo elettrico **impresso** $\mathbf{E^*} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B_0}$. Questo campo è radiale, diretto verso l'esterno (come indicato anche dalla separazione delle cariche, che vede quelle negative andare sulla superficie laterale esterna), e disomogeneo, valendo il suo **modulo** $E(r) = \omega B_0 r$

b) Quanto vale, in modulo, la differenza di potenziale elettrico ΔV_{ab} che si instaura, se si instaura, tra la superficie laterale "interna" ($r = a$) e la superficie laterale "esterna" ($r = b$) del disco? [Per azzeccare i segni giusti, notate che si intende $\Delta V_{ab} = V(r=b) - V(r=a)$, con ovvio significato dei simboli]
ΔV_{ab} = ……………………………………= ……… V $\omega B_0(b^2-a^2)/2$ = 0.075 V [avendo appurato che nel disco esiste un campo impresso $\mathbf{E^*}(r) = -\omega B_0\mathbf{r}$, è facile calcolare la differenza di potenziale, che vale $\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E^*}\bullet d\mathbf{l} = \int_a^b \omega B_0 r dr$, da cui la soluzione]

6. Avete un condensatore le cui armature sono costituite da due dischi sottili di materiale perfettamente conduttore (raggio dei dischi R = 10 cm) posti parallelamente e coassialmente uno di fronte all'altro a una distanza d = 1.0x10^{-4} m (lo spazio tra le armature è vuoto). Le armature sono connesse a un generatore di differenza di potenziale **variabile** nel tempo, tale che in un intervallo di tempo Δt = 10 s la differenza di potenziale passa da zero al valore V_0 = 50 V seguendo una funzione **lineare** del tempo. [Usate i valori ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto; notate che l'intervallo di tempo considerato può essere ritenuto sufficientemente lungo da consentire l'impiego di un approccio "quasi-stazionario", cioè di utilizzare le leggi valide nel caso stazionario]

a) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore nell'intervallo Δt?
L = …………………………………… = ……… J $\varepsilon_0\pi R^2 V_0^2/(2d)$ = 3.4x10^{-6} J [il lavoro del generatore serve per caricare il condensatore al punto che la differenza di potenziale tra le armature diventa V_0. Dunque la variazione di energia elettrostatica, ovvero il lavoro del generatore, vale $CV_0^2/2$, con $C = \varepsilon_0 S/d$ $(S=\pi R^2)$, capacità del condensatore ad armature piane e parallele]

b) Come si esprime in funzione del tempo t l'intensità di corrente $I(t)$ prodotta dal generatore nell'intervallo $0<t<\Delta t$? [Date una risposta solo "letterale" usando i parametri del problema e considerate il valore assoluto della corrente, senza preoccuparvi del segno]
$I(t)$ = …………………………………… $dQ(t)/dt = C\, dV(t)/dt = (\varepsilon_0\pi R^2/d)\, V_0/\Delta t$ [la corrente fluisce sulle armature del condensatore per caricarle; la funzione che esprime la differenza di potenziale in funzione del tempo si ricava semplicemente dalla descrizione riportata nel testo, che permette di scrivere: $V(t) = V_0 t/\Delta t$]

c) Discutete per benino, in brutta, cosa cambierebbe nella risposta alla domanda precedente se l'intervallo di tempo Δt fosse "molto breve".
Discussione: …………………………………… l'approccio quasi-stazionario che abbiamo di fatto impiegato si serve, in sostanza, delle "equazioni di Maxwell" in forma stazionaria (elettrostatica) e non tiene conto di eventuali contributi aggiuntivi ai campi dovuti alle variazioni temporali. Questi contributi potrebbero essere molteplici, dato che il campo elettrico variabile nel tempo che si trova tra le armature darebbe luogo a un campo magnetico (di direzione tangenziale) variabile nel tempo che a sua volta originerebbe un campo elettrico (assiale) variabile nel tempo, e così via. Il contributo più importante alla corrente che fluisce sulle armature è quello dovuto alla variazione del flusso di campo elettrico, cioè la cosiddetta corrente di spostamento. Ricordando l'"equazione di Maxwell" per la circuitazione del campo magnetico, si ha che la corrente di spostamento si può scrivere come $\mu_0\varepsilon_0\, d\Phi(E(t))/dt$. In prima approssimazione, cioè trascurando i contributi successivi dovuti alle variazioni temporali dei vari campi, si ha $E(t) = V(t)/d = V_0 t/(d\Delta t)$, per cui la corrente di spostamento, cioè il termine da aggiungere alla intensità di corrente determinata sopra, diventa $I_S = \mu_0\varepsilon_0 V_0/(d\Delta t)$, con μ_0 permeabilità magnetica del vuoto. Notate che questo contributo cresce al diminuire di Δt, coerentemente con le nostre assunzioni iniziali

---

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 21/7/2011 Firma:

SEGUE