

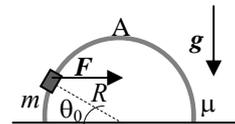
Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

PARTE 1

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m = 2.0$  kg è vincolato a scorrere lungo una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma di una semicirconferenza di raggio  $R = 1.0$  m disposta su un piano verticale, come indicato in figura. Sul manicotto agisce una forza esterna orizzontale di modulo  $F = 40$  N. La guida esercita un **attrito** statico sul manicotto con coefficiente di attrito  $\mu = 0.80$ ; in queste condizioni si osserva che la posizione rappresentata in figura (l'angolo misurato rispetto all'orizzontale vale  $\theta_0 = \pi/6$ ) è di **equilibrio**. [Usate  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che  $\sin(\pi/6) = 1/2$  e  $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$  con  $\sqrt{3} \sim 1.73$ . State bene attenti a notare che l'angolo, in questo esercizio, è misurato rispetto all'orizzontale!]



a) Quanto vale il modulo della forza di attrito  $F_A$  che la guida esercita sul manicotto?

$F_A = \dots \sim \dots$  N  $F \sin \theta_0 - mg \cos \theta_0 \sim 3.0$  N [il manicotto è vincolato a muoversi (eventualmente!) lungo la guida. Nella condizione di equilibrio del testo, occorre che l'accelerazione tangenziale sia nulla, cioè che si annulli la risultante delle forze in direzione tangenziale. Tali forze sono la componente tangenziale della forza  $F$ , che vale  $F \sin \theta_0$  (il segno positivo indica che abbiamo scelto un verso positivo che corrisponde a uno spostamento in senso orario, verso la destra di figura), la componente tangenziale della forza peso, che vale  $-mg \cos \theta_0$ , e la forza di attrito. Per stabilire il segno di quest'ultima, notiamo che se non ci fosse attrito il moto avverrebbe proprio in senso orario, dato che  $F \sin \theta_0 > mg \cos \theta_0$ . Di conseguenza nel riferimento scelto la forza di attrito deve avere segno negativo. Dunque per l'equilibrio deve essere:  $0 = F \sin \theta_0 - mg \cos \theta_0 - F_A$ , da cui la soluzione. Per completare la risposta occorre poi verificare che la situazione considerata conduca a una forza di attrito effettivamente sufficiente per garantire l'equilibrio. Questo si verifica poiché  $F_{A \max} = \mu N = \mu(F \cos \theta_0 + mg \sin \theta_0) > F_A$  appena determinato]

b) Supponete ora che all'istante  $t_0 = 0$  l'attrito improvvisamente si annulli (cioè  $\mu$  diventi magicamente nullo): in queste nuove condizioni il manicotto, che inizialmente era fermo nella posizione di equilibrio, si mette in movimento e comincia a "risalire" lungo la guida. Quanto vale la sua velocità  $v$  nell'istante in cui esso raggiunge la sommità della guida, ovvero la posizione indicata con "A" in figura? [Naturalmente durante questo processo la forza  $F$  si mantiene costante e uniforme]

$v' = \dots \sim \dots$  m/s  $(2FR \cos \theta_0 / m - 2gR(1 - \sin \theta_0))^{1/2} \sim 5.0$  m/s [non essendoci forze dissipative, si usa il bilancio energetico:  $L_F = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v^2 + mg\Delta z$ . La variazione di quota del manicotto può essere espressa, secondo la trigonometria, come  $\Delta z = mgR(1 - \sin \theta_0)$ . Il lavoro della forza  $F$  si ottiene dalla definizione:  $L_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int F dx = F\Delta x = FR \cos \theta_0$ , dove l'integrale è esteso tra inizio e fine del processo considerato, si è notato che la forza è diretta lungo l'orizzontale (che abbiamo chiamato asse  $X$ ), che essa è costante durante il processo e che lo spostamento del manicotto lungo  $X$  è dato, dalla trigonometria, da  $\Delta x = R \cos \theta_0$ . Si ha dunque  $FR \cos \theta_0 = (m/2)v^2 + mgR(1 - \sin \theta_0)$ , da cui la soluzione]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare  $N'$  che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui questo raggiunge la sommità della guida?

$N' = \dots \sim \dots$  N  $mv^2/R - mg = (2F \cos \theta_0 - 2mg + 2mg \sin \theta_0) - mg = 2F \cos \theta_0 - 3mg + 2mg \sin \theta_0 \sim 30$  N [il manicotto percorre un'orbita circolare e pertanto su di esso agisce un'accelerazione centripeta di modulo  $a_C = v^2/R$  diretta verso il centro della semicirconferenza. Questa accelerazione centripeta è data dalle forze che hanno componente radiale, che sono la forza peso  $mg$ , diretta come l'accelerazione centripeta, e la reazione vincolare  $N'$ , diretta radialmente e di verso che può essere sia centripeto che centrifugo (il manicotto può esercitare la reazione sia in un verso che nell'altro!). Notiamo che la forza  $F$  non contribuisce, essendo orizzontale, dunque ortogonale alla direzione considerata. Cominciamo con l'osservare che  $v^2/R > g$ . Dunque la reazione vincolare deve avere la stessa direzione della forza peso in modo da permettere l'ottenimento della dovuta reazione vincolare. Si ha quindi:  $v^2/R = g + N'/m$ , da cui la soluzione, dove si è ovviamente usata l'espressione di  $v$  trovata in precedenza]

PARTE 2

2. In un esperimento di fisica atomica vengono creati due ioni identici (hanno entrambi la stessa massa  $m = 1.6 \times 10^{-26}$  kg e carica elettrica  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C), denominati "1" e "2", che inizialmente si trovano a grandissima distanza l'uno dall'altro (praticamente "infinita") e hanno velocità dirette lungo l'asse  $X$  di un riferimento, chiamate  $v_{01}$  e  $v_{02}$ . Queste velocità hanno lo stesso segno e sono scelte in modo tale che lo ione 1 tende a "tamponare" lo ione 2: infatti è  $v_{01} = 2v_{02}$ , con  $v_{01} = 2.0 \times 10^3$  m/s. Nel sistema considerato tutte le forze diverse da quella di interazione elettrostatica possono essere considerate trascurabili. Si osserva che lo ione 1 si avvicina allo ione 2 fino a che la distanza tra di loro raggiunge un valore minimo  $d_{MIN}$ . [Ricordate che la forza elettrostatica tra cariche puntiformi  $q$  si esprime come  $F_E = \hat{e} \kappa_E q^2 / r^2$ , essendo  $\kappa_E = 9.0 \times 10^9$  N m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>,  $r$  la distanza tra le due cariche e  $\hat{e}$  il versore della congiungente tra le due cariche. Notate che il problema è unidimensionale]

a) Quanto valgono le velocità  $v_1$  e  $v_2$  dei due ioni nell'istante in cui essi si trovano alla distanza  $d_{MIN}$ ? [Spiegate per bene, in brutta, come giungete alla soluzione]

$v_1 = \dots = \dots$  m/s  $3mv_0/(2m) = 3v_0/2 = 3.0 \times 10^3$  m/s [alla minima distanza la velocità relativa dei due ioni è nulla, dato che un attimo prima essa ha un certo segno (le cariche si avvicinano) e un attimo dopo ha segno

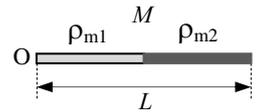
opposto (le cariche si allontanano). Questo significa che all'istante considerato è  $v_1 = v_2 = v$ . Inoltre il sistema è palesemente isolato, dato che, come recita il testo, tutte le forze escluse quella di interazione (interna al sistema!) sono trascurabili. Quindi si conserva la quantità di moto, per cui:  $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = 2mv = m_1v_{01} + m_2v_{02} = 3mv_0$ , da cui, tenendo conto che il problema è unidimensionale, la soluzione]

$$v_2 = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ m/s} \quad v_1 = 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} \quad [\text{vedi sopra}]$$

b) Quanto vale  $d_{MIN}$ ?

$d_{MIN} = \dots\dots\dots = \dots\dots \mu\text{m}$   $20\kappa_E q^2 / (mv_0^2) = 2.9 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.29 \mu\text{m}$  [nel processo si conserva l'energia meccanica, dato che non ci sono forze dissipative. Si ha quindi:  $0 = \Delta E_K + \Delta U$ . La variazione di energia cinetica è  $\Delta E_K = (m/2)v_1^2 + (m/2)v_2^2 - (m/2)v_{01}^2 - (m/2)v_{02}^2 = (m/2)(2v^2 - 5v_0^2) = (m/2)v_0^2(9/2 - 5) = -(m/2)v_0^2/10$ , dove abbiamo usato tutto quanto stabilito nella risposta al quesito precedente. La variazione di energia potenziale è dovuta al lavoro della forza elettrica di interazione:  $\Delta U = -L_E = -\int_{\infty}^{d_{MIN}} F_E \cdot dl$ , dove abbiamo posto come estremo di integrazione iniziale l'infinito per tenere conto del fatto che inizialmente le cariche si trovano a grande distanza tra di loro (a tale distanza gli effetti della forza di interazione sono trascurabili). Il prodotto scalare che si trova nell'integrando si "risolve" notando che la forza è diretta come la congiungente tra le cariche, che corrisponde alla direzione dell'asse  $X$ . Si ha quindi  $\Delta U = -\int_{\infty}^{d_{MIN}} F_E \cdot dx = -\kappa_E q^2 \int_{\infty}^{d_{MIN}} (1/x^2) dx = \kappa_E q^2 (1/x)_{\infty}^{d_{MIN}} = \kappa_E q^2 / d_{MIN}$ . Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

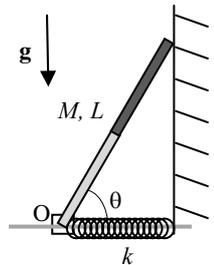
3. Un'asta molto sottile, di lunghezza e massa complessive  $L = 2.4 \text{ m}$  e  $M = 3.0 \text{ kg}$ , è costruita unendo insieme ("testa a testa") due aste della stessa sezione e lunghezza, fatte con materiali che hanno densità di massa diverse. Facendo riferimento alla figura per la numerazione, la parte "1" ha densità di massa  $\rho_{m1}$  che è la metà della densità  $\rho_{m2}$  della parte "2". [Si intende che ognuno dei due pezzi in cui l'asta è suddivisibile sono individualmente omogenei]



a) A quale distanza  $L_{CM}$ , misurata rispetto all'estremo indicato con O in figura, si trova il centro di massa dell'asta? [Spiegate per bene, in brutta, come procedete per arrivare alla risposta!]

$L_{CM} = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ m}$   $ML(1/12 + 1/2)/M = 7L/12 = 1.4 \text{ m}$  [per definizione, in un corpo rigido continuo la posizione del centro di massa in una certa direzione, che qui chiamiamo  $X$ , è data da  $x_{CM} = \int x dm / M$ , dove  $M$  rappresenta la massa totale e  $x$  è la coordinata dell'elemento di massa  $dm$  rispetto a un asse che, nel nostro caso, coincide con l'asse geometrico dell'asta (la posizione del centro di massa appartiene ovviamente all'asse geometrico dell'asta sottile). La somma rappresentata dall'integrale va ovviamente estesa su tutta l'asta. Essendo una somma possiamo facilmente riorganizzarla separandola in due sotto-somme (cioè due integrali di massa, sommati fra di loro) che riguardano i due pezzi 1 e 2. Nel fare questo (che, se volete, potete pure fare matematicamente, passando all'integrale di volume e quindi a quello di lunghezza, e poi svolgendo tutti i conti, ma è fatica sprecata, secondo me) vi potete facilmente accorgere che, in pratica, state riconducendo l'integrale sul corpo esteso alla somma di due elementi discreti, di massa rispettivamente  $M_1$  e  $M_2$ , collocati rispettivamente nel centro di massa del singolo pezzo 1 e del singolo pezzo 2. Poiché questi pezzi sono omogenei, allora i loro centri di massa si troveranno a metà lunghezza. Se poniamo l'origine dell'asse ( $X$ ) in corrispondenza dell'estremo del pezzo 1, allora avremo:  $x_{CM1} = L/4$  e  $x_{CM2} = 3L/4$ , dove  $L$  è la lunghezza complessiva dell'asta. Per quanto riguarda le masse  $M_1$  e  $M_2$ , tenendo conto della relazione fra le densità, avremo  $M_1/M_2 = \rho_{m1}/\rho_{m2} = 1/2$  e  $M_1 + M_2 = M$ , da cui  $M_1 = M/3$  e  $M_2 = 2M/3$ . Quindi potremo porre  $x_{CM} = (M_1 x_{CM1} + M_2 x_{CM2}) / M$ , che, identificando  $x_{CM}$  con  $L_{CM}$  (per usare la simbologia dell'esercizio) conduce alla soluzione]

b) Immaginate ora che l'asta di cui sopra sia montata come in figura. In pratica, un estremo dell'asta è appoggiato (a contatto!) con una parete verticale fissa e rigida **priva di attrito**, mentre l'altro estremo, quello che prima avevamo identificato con O, è imperniato su un manicotto di massa e dimensioni trascurabili che può scorrere, con **attrito trascurabile**, lungo una guida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Al manicotto è collegata una molla, di massa e **lunghezza di riposo** trascurabili e costante elastica  $k$  (**incognita**); la molla ha il suo asse in direzione orizzontale, essendo vincolata, all'altro suo estremo, alla base della parete verticale. Si osserva che l'asta si trova in **equilibrio** quando l'angolo fra il suo asse e l'orizzontale vale  $\theta = \pi/3$ . Quanto vale la costante elastica  $k$  della molla? [Usate  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che  $\cos(\pi/3) = 1/2$  e  $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$  con  $3^{1/2} \sim 1.73$ ]



$k = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ N/m}$   $7Mg/(12L\sin\theta) \sim 8.3 \text{ N/m}$  [per l'equilibrio dell'asta occorre che si annullino la sommatoria delle forze (equilibrio traslazionale) e quella dei momenti (equilibrio rotazionale). Le forze che agiscono sull'asta sono il peso, applicato al centro di massa la cui posizione è stata determinata sopra, la reazione vincolare esercitata dalla guida, applicata al manicotto e diretta verticalmente in verso opposto al peso, la forza elastica, diretta orizzontalmente e orientata coerentemente con il fatto che la molla è sicuramente estesa (la sua lunghezza di riposo è trascurabile!) e un'altra forza,  $F_M$ , che è diretta orizzontalmente e applicata all'estremo dell'asta che è in contatto con la parete verticale, essendo dovuta alla reazione che la parete esercita sull'asta. Per l'equilibrio traslazionale, con ovvi significati dei simboli, deve essere  $N = Mg$  e  $F_M = F_{ELA} = k|\Delta L| = kL_{MOLLA}$ , dove abbiamo usato i moduli delle forze e abbiamo usato la circostanza che  $L_0 = 0$ . Per l'equilibrio rotazionale conviene considerare come polo il punto O: su di esso, infatti, agiscono le due forze  $F_{ELA}$  e  $N$ , le quali, avendo braccio nullo rispetto a questo polo, non danno contributi in termini di momento. Osservando la geometria del sistema e usando la trigonometria si ha, per l'equilibrio dei momenti:  $Mg(7L/12)\cos\theta = F_M L \sin\theta = kL_{MOLLA} L \sin\theta$ , dove abbiamo usato l'uguaglianza fra i moduli della forza esercitata dalla parete e della forza elastica sancita dall'equilibrio traslazionale. Si ha dunque:  $k = 7Mg/(12L\sin\theta)$ . D'altra parte la trigonometria ci dice che  $L_{MOLLA} \sin\theta = L \sin\theta$  (entrambi le due espressioni conducono alla lunghezza del cateto di triangolo rettangolo che va dalla base della parete al punto di contatto tra parete e asta), da cui la soluzione]

----- PARTE 3

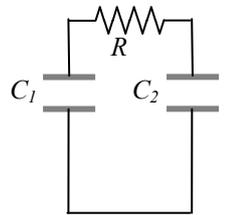
4. Avete a disposizione due condensatori. Il primo, che chiameremo condensatore 1, è realizzato disponendo due lastre sottili conduttrici di area  $S = 10 \text{ cm}^2$  parallelamente fra loro, a distanza  $d = 0.10 \text{ mm}$  (lo spazio tra le armature è vuoto). Il secondo, che chiameremo condensatore 2, è fatto da due gusci sferici conduttori sottili di raggio rispettivamente pari a  $a = 10 \text{ cm}$  e  $b = 20 \text{ cm}$  (lo spazio fra le armature è vuoto). [Usate  $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  per la costante dielettrica del vuoto]

- a) Quanto valgono le capacità  $C_1$  e  $C_2$  dei due condensatori? [Cercate di dare un minimo di spiegazione sul procedimento che conduce alla risposta, che potrete anche ricordare a memoria. Per questa risposta è altamente gradita, se non **obbligatoria**, l'espressione numerica, così vediamo come ve la cavate con le unità di misura...]

$C_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ pF}$   $\epsilon_0 S/d = 8.8 \times 10^{-11} \text{ F} = 88 \text{ pF}$  [la determinazione della capacità parte dalla definizione:  $C = Q/\Delta V$ , dove  $Q$  è la carica accumulata sul condensatore e  $\Delta V$  la differenza di potenziale tra le armature. Per il calcolo si suppone di collegare un generatore alle armature e si cerca un modo per legare  $Q$  a  $\Delta V$ . Il modo più efficace consiste nell'esprimere la differenza di potenziale come integrale di linea del campo elettrico (cambiato di segno, in realtà), usando nell'integrale la dipendenza funzionale del campo dalle coordinate spaziali stabilita dal teorema di Gauss (e dalle considerazioni di "simmetria"). Nel caso piano, qui di interesse, si ha: per Gauss,  $E = Q/(\epsilon_0 S)$  (uniforme, trascurando gli effetti ai bordi come lecito per la geometria del sistema), quindi  $\Delta V = Ed$ , da cui, mettendo tutto insieme, la soluzione]

$C_2 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ pF}$   $4\pi\epsilon_0/(1/a-1/b) = 2.2 \times 10^{-11} \text{ F} = 22 \text{ pF}$  [stavolta Gauss ci dice che  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , per cui  $\Delta V = (Q/(4\pi\epsilon_0))(1/a-1/b)$ , da cui la soluzione]

- b) Immaginate ora che inizialmente il condensatore 1 venga collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale  $V_0 = 1.0 \text{ kV}$  fino a raggiungere condizioni stazionarie (di equilibrio). Il condensatore 2, invece, non viene collegato a un bel niente e dunque rimane scarico (globalmente neutro). Quindi il generatore viene rimosso e i **due** condensatori vengono collegati attraverso un resistore di resistenza  $R = 50 \text{ kohm}$  come rappresentato schematicamente in figura. Dopo aver atteso tanto, tanto tempo (quello necessario a raggiungere nuove condizioni stazionarie), quanto varrà la carica  $Q_2'$  accumulata sul condensatore 2?



$Q_2' = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ C}$   $C_1 C_2 V_0 / (C_1 + C_2) = 1.8 \times 10^{-8} \text{ C}$  [nelle nuove condizioni stazionarie, raggiunte dopo tanto, tanto tempo, i due condensatori si troveranno alla stessa differenza di potenziale  $\Delta V'$ . Infatti le condizioni stazionarie (di equilibrio) richiedono che non passi corrente attraverso il resistore, che dunque non presenta caduta di potenziale. In queste condizioni si avrà  $Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2$ , dove le capacità sono quelle calcolate al punto precedente. Inoltre, dato che il generatore è stato rimosso, la quantità di carica totale deve conservarsi, cioè deve essere  $Q_1' + Q_2' = Q_{10} = C_1 V_0$ . Si forma un sistema di due equazioni e due incognite che, risolto, fornisce la soluzione]

- c) Quanto vale il "tempo caratteristico"  $\tau$  del processo che stiamo considerando?

$\tau = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ }\mu\text{s}$   $RC_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 8.8 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.88 \text{ }\mu\text{s}$  [il modo più semplice di rispondere consiste nel verificare, guardando lo schema, che il processo consiste nella scarica (parziale) del condensatore 1 e la carica del condensatore 2. I due condensatori sono in serie fra di loro, per cui la capacità effettiva (totale) è  $1/C_{TOT} = 1/C_1 + 1/C_2$ . La costante tempo sarà allora data dal prodotto  $RC_{TOT}$ . Un modo più convincente consiste nel notare che la d.d.p. ai capi del condensatore  $C_2$ , che istante per istante è sempre esprimibile come  $Q_2/C_2$ , è sempre pari alla somma della d.d.p. ai capi del condensatore  $C_1$ , che è sempre pari a  $Q_1/C_1$ , e della caduta di potenziale attraverso il resistore, che per la legge di Ohm vale  $RI$ . Si ha cioè  $Q_2/C_2 = Q_1/C_1 + RI$ . Inoltre per la conservazione della carica si ha anche  $Q_{10} = C_1 V_0 = Q_1 + Q_2$ , per cui l'equazione precedente si può riscrivere come:  $Q_2/C_2 = V_0 Q_2/C_1 + RI$ . D'altra parte la corrente che circola nel circuito è fatta dalle cariche che lasciano il condensatore 1 per andare nel condensatore 2. Tenendo conto di come è realizzato il circuito, questo implica che  $I = -dQ_2/dt$ . Si ottiene allora una bellissima equazione differenziale:  $dQ_2/dt = -Q_2/(RC_{TOT}) + V_0/R$ , che è a variabili separabili e ha come soluzione  $Q_2(t) = V_0 C_{TOT} (1 - e^{-t/\tau})$ , con  $\tau = RC_{TOT}$ ]

- d) Quanto vale l'energia  $E$  che viene "dissipata" per effetto Joule dal resistore nel corso dell'intero processo? [Per "intero processo" si intende quello che ha inizio nell'istante in cui il condensatore 1, inizialmente carico, viene collegato tramite il resistore al condensatore 2, inizialmente scarico, secondo lo schema di figura e che termina quando vengono raggiunte le nuove condizioni stazionarie, cioè dopo tantissimo tempo]

$E = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ J}$   $-C_{TOT} V_0^2 / 2 = -1.8 \times 10^{-5} \text{ J}$  [si può ragionare in termini di bilancio energetico:  $E$  allora rappresenterà la differenza tra l'energia inizialmente accumulata nel condensatore 1 e la somma di quella che alla fine si trova nei due condensatori. Ricordando che l'energia di un condensatore è  $U_E = Q^2/(2C)$ , si avrà:  $E = Q_1'^2/(2C_1) + Q_2'^2/(2C_2) - Q_{10}^2/(2C_1)$ . Usando la solita relazione di conservazione della carica,  $Q_1' = Q_{10} - Q_2'$ , e facendo un po' di algebra, si trova:  $E = Q_2'^2/(2C_{TOT}) - Q_2' V_0$  da cui, sostituendo l'espressione di  $Q_2' = C_{TOT} V_0$  trovata prima e usando  $C_{TOT}$  già definito, la soluzione, dove il segno negativo sta a indicare che questa energia è stata "dissipata"]

----- TERMODINAMICA (OPZIONALE)

4. Un campione di  $n = 9.8 \times 10^{-3}$  moli di gas perfetto monoatomico si trova all'interno di un recipiente cilindrico che ha area di base  $S = 0.98 \text{ cm}^2$  ed è dotato di pareti indeformabili che formano un'intercapedine riempita con una grande quantità di acqua e ghiaccio fondente. In particolare, la parete "interna" è perfettamente trasparente al calore, mentre quella esterna è praticamente impermeabile al calore: in questo modo si ottiene che il gas è a contatto termico con il ghiaccio fondente e lo scambio di calore con il "mondo esterno" può essere considerato trascurabile. Nel recipiente può scorrere, in direzione verticale (la direzione dell'asse del cilindro) e con attrito trascurabile, un tappo di massa  $m$  (incognita) che suddivide il volume del recipiente in due regioni: in quella "di sotto" si trova il gas, mentre in quella "di sopra" è fatto il vuoto pneumatico. Inizialmente la regione occupata dal gas ha altezza  $h_0 = 10 \text{ cm}$  e le condizioni sono di **equilibrio**. [Usate  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per il modulo dell'accelerazione di gravità e  $R = 8.3 \text{ J/(K mole)}$  per la costante dei gas perfetti]

- a) Quanto deve valere la massa  $m$  del tappo?  
 $m = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ kg}$   $nRT_0 h_0 / g = 23 \text{ kg}$  [il gas è all'equilibrio con una grande massa di ghiaccio fondente, pertanto esso si trova alla temperatura  $T_0 = 273 \text{ K}$ . Inoltre, essendo all'equilibrio, la sua pressione deve uguagliare la pressione esercitata dal tappo, che vale  $P_0 = mg/S$ . Dalla legge dei gas perfetti si trova  $P_0 V_0 = P_0 S h_0 = m g h_0 = n R T_0$ , da cui la soluzione]

- b) Supponete ora che, all'interno del gas, avvenga a un certo istante una qualche reazione chimica che comporta un'esplosione in cui viene liberata una certa quantità di calore  $Q_{ESPL}$  (incognita). Dopo un certo tempo, necessario perché il gas raggiunga una nuova condizione di equilibrio, si osserva che una quantità  $\Delta M = 20 \text{ g}$  di ghiaccio si è fusa all'interno dell'intercapedine. Quanto vale la nuova altezza  $h'$  della regione occupata dal gas dopo che il sistema ha nuovamente raggiunto l'equilibrio? Quanto vale il calore  $Q_{ESPL}$ ? [Supponete che l'esplosione **non** modifichi il numero di moli del gas;

usate il valore  $\lambda_F = 3.0 \times 10^5$  J/kg per il calore latente di fusione del ghiaccio e considerate che la massa iniziale di ghiaccio fondente è molto maggiore di  $\Delta M$ ; state attenti ai trabocchetti e discutete per benino in brutta!]

$$h' = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ m} \quad h_0 = 0.10 \text{ m}$$

$Q_{ESPL} = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ J}$        $\Delta M \lambda_F = 6.0 \times 10^3 \text{ J}$  [il gas subisce una trasformazione presumibilmente non reversibile, dato che l'esplosione è un fenomeno violento che difficilmente può dare luogo a trasformazioni che passano per stati di equilibrio. Alla fine del processo, però, il gas si troverà in una nuova condizione di equilibrio in cui sia la pressione (la massa del tappo non cambia) che la temperatura (il ghiaccio fondente si comporta da termostato) non sono variate rispetto alle condizioni iniziali. Dunque il volume del gas resterà lo stesso che era occupato inizialmente. Allora il gas complessivamente non compie lavoro, e nulla è la variazione di energia interna, essendo nulla la variazione di temperatura. Di conseguenza il gas non scambia calore e **tutto** il calore ceduto dall'esplosione viene impiegato per fondere la quantità  $\Delta M$  di ghiaccio, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la variazione di entropia  $\Delta S$  dell'intero sistema (gas + acqua e ghiaccio fondente) nel processo sopra considerato?

$\Delta S = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ J/K}$        $\Delta M \lambda_F / T_0 = 22 \text{ J/K}$        $\Delta M \lambda_F = 6.0 \times 10^3 \text{ J}$  [il gas non modifica il suo stato ed essendo la variazione di entropia di un gas esprimibile come la variazione di entropia per una trasformazione reversibile che connette lo stato iniziale con quello finale (dunque una trasformazione "nulla", in questo caso), si ha che il gas non muta l'entropia. Invece la miscela acqua e ghiaccio fondente subisce una trasformazione irreversibile consistente nella fusione di una sua parte. Essendo questa trasformazione isoterma (la temperatura non varia, mantenendosi sempre pari alla temperatura di fusione del ghiaccio,  $T_0 = 273 \text{ K}$ ), la variazione di entropia si ottiene dividendo il calore necessario per la fusione per questa temperatura, da cui il risultato]

---

**Nota:** acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).  
Pisa, 19/7/2012

Firma: