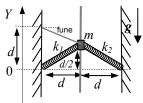
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 3/7/2015

Nome e cognome: Matricola: Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 0.50 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y, orientato verso l'alto). Il manicotto è Y attaccato alle estremità di due molle che hanno lunghezza di riposo **trascurabile** e costanti elastiche $k_1 = k = 10$ N/m e $k_2 = 2k = 20$ N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a una parete verticale rigida e fissa, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza d = 20 cm da esso: il punto di attacco delle due molle alle pareti è alla stessa quota dell'origine del riferimento (vedi figura). Il manicotto è anche agganciato all'estremità di una fune inestensibile, il cui altro estremo è vincolato a una delle due pareti (vedi figura) in un punto che dista d = 20 cm dall'origine del riferimento. In queste condizioni il manicotto si trova in **equilibrio** nella posizione $y_0 = d/2$. [Usate g = 9.8 m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



isegno non in scala!!!

a) Quanto vale il modulo T della tensione della fune? Quanto vale il modulo F_G della forza che la guida esercita sul manicotto?

 $T=\dots$ N $(mg+3kd/2)5^{1/2}\sim 18$ N [l'equilibrio del manicotto implica che sia nulla la somma vettoriale delle forze che agiscono su di esso. Per rispondere a questa domanda è sufficiente esaminare le componenti verticali delle forze, dato che, se il manicotto si muovesse, il suo movimento potrebbe avere solo direzione verticale essendo vincolato dalla guida. Le forze che agiscono sul manicotto sono la forza peso, mg, diretta verticalmente verso il basso, le due forze elastiche di modulo rispettivamente k_1L_1 e k_2L_2 , che hanno entrambi componenti verticali dirette verso il basso (le molle hanno lunghezza di riposo trascurabile, per cui sono sicuramente estese, e si vede facilmente che $L_1=L_2=L=(d^2+y_0^2)^{1/2}=(d^2+(d/2)^2)^{1/2}=5^{1/2}d/2$), e la tensione della fune, che ha invece componente verticale diretta verso l'alto. Le forze elastiche hanno direzione come l'asse delle molle e le loro componenti verticali possono essere calcolate moltiplicando per $cos\theta$, essendo θ l'angolo che gli assi delle molle formano con la direzione verticale. Si vede facilmente che, per la geometria, questo angolo è lo stesso per le due molle e che $cos\theta=y_0/L=d/(2L)$. Di conseguenza, nel riferimento in questione le forze elastiche hanno componenti verticali $-k_1d/2=-k_2d/2$, dove il segno negativo indica che tali componenti puntano verso il basso. Lo stesso angolo θ si trova anche tra direzione della fune e verticale, per cui la componente verticale della tensione della fune è $T\cos\theta=T$ $y_0/L=T(d/2)/(5^{1/2}d/2)=T/5^{1/2}$. La condizione di equilibrio recita allora: $\theta=-mg-(k_1+k_2)(d/2)+T/5^{1/2}$, da cui la soluzione]

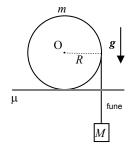
b) Supponete che all'istante $t_0 = 0$ la fune venga tagliata (senza impartire alcuna velocità iniziale al manicotto). Il manicotto prende a scendere verso il basso, passando, a un istante successivo, per la posizione y' = 0. Quanto vale la sua velocità y' in questo istante?

c) Dimostrate, discutendo **per bene** in brutta, che il moto del manicotto è **armonico** e determinatene la pulsazione ω .

Discussione: per stabilire il tipo di moto occorre come prima cosa scrivere l'"equazione del moto" a(y) che stabilisce l'accelerazione del manicotto in direzione y e in funzione della coordinata (generica) y. La scrittura è quasi gratuita avendo determinato la risposta al punto a). Si trova infatti facilmente che, essendo le molle con lunghezza di riposo trascurabile e non essendoci più la tensione della fune (che è stata tagliata!), si ha $a(y) = -((k_1 + k_2)/m) - g$. Questa equazione del moto, che è del tipo $-K_1y + K_2$, con $K_1 > 0$, è proprio quella del moto armonico, come si può facilmente determinare supponendo la soluzione (legge oraria del moto armonico) $y(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + y_{EQ}$, derivandola due volte rispetto al tempo e verificando di conseguenza l'uguaglianza sancita dall'equazione del moto. Si vede facilmente che l'uguaglianza è verificata a patto che sia $\omega = K_1^{-1/2} = (3k/m)^{1/2}$.

 $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rad/s} \frac{(3k/m)^{1/2}}{2} \sim 7.7 \, \text{rad/s}$ [vedi sopra]

2. Un cilindro omogeneo di massa m = 1.0 kg e raggio R = 10 cm si trova su un piano orizzontale **scabro**, dotato di un coefficiente di attrito $\mu = 0.70$. Una fune inestensibile e di massa trascurabile è avvolta sulla superficie laterale del cilindro e termina con un blocco di massa M = 2m = 2.0 kg libero di muoversi: quando il cilindro **rotola**, la fune si svolge (ovviamente senza strisciare sulla superficie laterale del cilindro) e il blocco si muove in direzione verticale. Inizialmente il cilindro viene tenuto fermo (a fune tesa) da una qualche causa esterna (una manina!) che a un dato istante viene rimossa: si osserva che il cilindro prende a muoversi di **rotolamento puro** mentre il blocco scende verso il basso. (Nota bene: supponete che la configurazione descritta sia effettivamente realizzabile, cioè che non ci siano impedimenti "geometrici" al moto della fune con blocco e a quello del cilindro: questo si può realizzare, per esempio, avvolgendo la fune attorno alla mezzeria del cilindro, scavando un'asola sul piano e facendoci passare la fune). [Usate g = 9.8 m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



- b) Scrivete, discutendo **per bene** in brutta, le "equazioni del moto" rilevanti per il problema, e determinate se il moto di rotolamento puro ipotizzato nel testo sia effettivamente realizzabile o meno con i dati del problema. [Le "equazioni del moto" sono le espressioni delle accelerazioni di **tutti** i "moti" che si verificano nel sistema considerato, inclusa la discesa in verticale del blocco!]

Equazioni del moto e discussione: Devono chiaramente essere scritte tre equazioni per le seguenti accelerazioni: a_{CM} (traslazione in direzione orizzontale del centro di massa del cilindro), α (accelerazione angolare per la rotazione del cilindro attorno al suo asse geometrico), A (traslazione in direzione verticale del blocco). Sulla base di quanto stabilito sopra, si ha $a_{CM} = F_A/m$. Le forze che agiscono sul cilindro producendo un momento rispetto al polo (scelto sull'asse del cilindro) sono solo la tensione della fune T, che tende a far ruotare il cilindro in senso orario, e la forza di attrito che, per come è orientata, tende a far ruotare il cilindro in senso antiorario. Scegliendo come positivo il verso di rotazione orario, scelta che è congruente con il verso positivo dello spostamento del centro di massa del cilindro, si ha $\alpha = (TR - F_A R)/I$, dove abbiamo tenuto conto che entrambe le forze hanno braccio pari a R. Inoltre possiamo porre $I = (m/2)R^2$, essendo il cilindro pieno e omogeneo. Per quanto riguarda la traslazione in direzione verticale del blocco, l'accelerazione, scritta rispetto a un asse verticale diretto verso il basso (di nuovo per avere congruenza dei segni) è A = g - T/M. Le tre equazioni scritte contengono le "incognite" a_{CM} , F_A , T, α , A: occorrono dunque altre due equazioni per permettere la soluzione. Queste equazioni possono essere ottenute dalle condizioni (geometriche) che legano le varie accelerazioni. Se il rotolamento è puro, deve essere $a_{CM} = \alpha R$. Inoltre, poiché la fune non slitta sulla superficie laterale del cilindro, se il cilindro compie una rotazione pari a $\Delta\theta$ la fune si svolge per un tratto $R \Delta\theta$, e, grazie alla inestensibilità della fune stessa, di analoga quantità si sposta verso il basso il blocco. "Derivando" rispetto al tempo per due volte i due membri di questa equazione si trova $A = \alpha R$, ovvero, se preferite, $A = a_{CM}$. Le equazioni da mettere a sistema diventano così cinque, lo stesso numero delle incognite, e quindi è possibile risolvere. Dall'equazione del moto del blocco si ottiene allora $T = Mg - MA = Mg - Ma_{CM}$; sostituendo nell'equazione del moto di rotazione del cilindro (e esplicitando il momento di inerzia), si ottiene $\alpha = 2(Mg - Ma_{CM} - Ma_{CM})$ F_A //(mR). Poiché $a_{CM} = \alpha R$, si ottiene $a_{CM} = 2(Mg - Ma_{CM} - F_A)/m$. D'altra parte l'equazione del moto di traslazione del cilindro implica che $a_{CM} = F_A/m$. Sostituendo e riarrangiando, si trova facilmente $F_A(3+2M/m) = 2Mg$, ovvero, usando la relazione tra le masse data nel testo, $F_A = 4mg/7$. Il contatto tra cilindro e piano fornisce una forza di attrito (statico!) massima $F_{A,MAX} = \mu N$, con N $= (mg+T) = (mg+Mg-Ma_{CM}) = (3mg-MF_A/m) = (3mg-8mg/7) = 13mg/7$ (occhio! La tensione della fune spinge verso il basso come la forza peso del cilindro!). Perché si abbia rotolamento puro occorre quindi verificare se $\mu 13mg/7 \ge 4mg/7$, ovvero se $\mu \ge$ 4/13. Questo si verifica per cui il moto di rotolamento puro ipotizzato nel testo è possibile.

c) Supponendo che il moto del cilindro si mantenga di rotolamento puro, quanto vale la velocità v_{CM} quando il blocco è sceso per un tratto $\Delta h = 50$ cm? [Supponete che tutte le forme di attrito diverse da quelle del contatto tra cilindro e piano e tra fune e cilindro siano **trascurabili** e immaginate che la fune si mantenga sempre verticale durante l'intero processo considerato in questa domanda]

 $v_{CM} = \dots$ m/s $(19g\Delta h/8)^{1/2} \sim 3.4$ m/s [visto che gli unici attriti considerati sono statici e quindi non compiono lavoro, si può usare la conservazione dell'energia meccanica $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. In questa espressione è facile individuare $\Delta U_G = -Mg\Delta h = -2mg\Delta h$ (attenti al segno, dovuto al fatto che il blocco diminuisce la propria quota). La variazione di energia cinetica deve tenere conto di tutti i "moti" del problema, cioè $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}^2 + (H/2)\omega^2 + (H/2)V^2$, dove ω è la velocità angolare del cilindro e V quella di traslazione del blocco. Per il rotolamento puro, si ha $\omega = v_{CM}/R$. Per quanto riguarda la velocità del blocco, in questa domanda occorre anche considerare il suo moto in direzione orizzontale. Infatti, se la fune resta sempre verticale, come specificato nel testo, il blocco deve spostarsi in direzione orizzontale di conserva con il centro di massa del cilindro. Allora in questo modello si ha $V^2 = (V_X + V_y)^2$. A causa del "trascinamento" del blocco in direzione orizzontale, si può porre $V_X = v_{CM}$. Per la componente verticale si può invece ragionare come fatto in precedenza nella relazione tra A e α , ottenendo $V_Y = \omega R = v_{CM}$. Di conseguenza, $V^2 = 4 v_{CM}^2$. Esplicitando il momento di inerzia del cilindro e usando anche la relazione tra le masse, si ha $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}^2(1+1/2+8) = (19/4)m v_{CM}^2$, da cui la soluzione. Naturalmente, dato il carattere un po' "tricky" di questa soluzione, nella correzione si accettano come pienamente validi anche risultati in cui la velocità orizzontale del blocco non è considerata (ma almeno quella verticale sì!)!]

3. Un dispositivo elettrico è costituito da **tre** gusci sferici **sottili** concentrici, di raggio rispettivamente a = 1.0 cm, b = 2a = 2.0 cm e c = 3a = 3.0 cm. Lo spazio compreso tra i gusci è vuoto. I gusci sono collegati come rappresentato in figura: quelli di raggio a e c sono collegati ai poli positivi di due distinti generatori di differenza di potenziale, rispettivamente V_a = 3.0 kV e V_c = V_a/3 = 1.0 kV, i cui poli negativi sono collegati a terra. Il guscio di raggio b è invece collegato direttamente a terra. [Supponete che il sistema abbia raggiunto condizioni stazionarie; usate il valore ε₀ = 8.8x10⁻¹² F/m per la costante dielettrica del vuoto]

a) Come si scrivono le **funzioni** E(r) che rappresentano il modulo del campo elettrico in funzione della distanza (generica) r dal centro del sistema in diverse regioni, come sotto specificato? [Dovete scrivere delle funzioni: non usate valori numerici ed **esprimete le cariche sui gusci** con i simboli Q_a , Q_b , Q_c]

Regione I (a < r < b): $E_I(r) = \dots$ $Q_a/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ [usando il teorema di Gauss è immediato, come si può facilissimamente verificare, che $E(r) = Q_{INT}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, con Q_{INT} la carica elettrica contenuta nella scatola (sferica) usata per calcolare il flusso nel teorema di Gauss. Evidentemente la carica dipende dalla regione di spazio considerata, e, per a < r < b, è $Q_{INT} = Q_a$, carica che si trova sul guscio di raggio a]

Regione II (b < r < c): $E_{II}(r) =$ $(Q_a + Q_b)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ [come prima, ma stavolta $Q_{INT} = Q_a + Q_b$]

Regione III (c < r): $E_{III}(r) =$ $(Q_a + Q_b + Q_c)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ [idem]

b) Quanto valgono le cariche Q_a , Q_b , Q_c che si trovano sui tre gusci? [Spiegate meglio che potete, in brutta, i ragionamenti]

 $Q_b = \dots = \dots = \dots = \dots = \dots = \dots = -V_a(8\pi\epsilon_0 a) - Q_a = -V_a(16\pi\epsilon_0 a) = -1.3 \times 10^{-8} \, \text{C}$ [si può ripetere un ragionamento analogo a quello svolto per la risposta precedente, notando però che: gli estremi di integrazione vanno da b a c; il campo elettrico ha l'espressione di E_H (r); la d.d.p. è stavolta $\Delta V_{bc} = V_c$ (notate il segno!), per cui si ottiene facilmente $(Q_a + Q_b) = -(24\pi\epsilon_0)V_c a = -(8\pi\epsilon_0)V_a a$, da cui, usando la risposta al quesito precedente, la soluzione]

c) Quanto vale il lavoro L_{TOT} prodotto dai generatori per portare il dispositivo alle condizioni stazionarie?

 "sferico" che ha come armature i gusci di raggio b e c le quali si trovano a d.d.p. di modulo V_c ; notate che questo condensatore ha un'armatura in comune con il precedente (il guscio di raggio b). Il terzo è un condensatore costituito dal solo guscio di raggio c (l'altra armatura si trova all'"infinito"!): questo condensatore si trova evidentemente in parallelo al precedente, dato che la stessa d.d.p. di modulo V_c , insiste tra le loro armature. Dunque l'armatura costituita dal guscio di raggio c possiede tutta la carica di questo parallelo tra due condensatori. L'energia del parallelo è allora semplicemente esprimibile come $U_{EIII} = Q_c V_c / 2$. L'energia "totale", che corrisponde al lavoro dei due generatori, è data dalla somma $U_{EIII} + U_{EI}$. Notate che nell'espressione non compare esplicitamente la carica Q_b ; come già affermato, sul guscio di raggio b finisce sia la carica "relativa" al condensatore I che quella relativa al condensatore II (per altro, con segni diversi). Inoltre questa armatura si trova a terra, per cui i generatori non compiono alcun lavoro per spostarvi la carica. Anche in questo caso, essendo la soluzione un po' "tricky", nella correzione si accettano come valide soluzioni non del tutto corrette (ma almeno impostate correttamente!)]