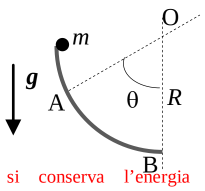
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 30/1/2017

Nome e cognome: …………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto puntiforme di massa m = 1.0 kg si trova alla sommità di una guida semicircolare di raggio R = 5.0 m liscia, fissa, rigida e disposta su un piano verticale, come rappresentato in figura. A un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Supponendo **trascurabile** ogni forma di attrito, quanto vale la velocità v_A con cui l'oggetto passa per la posizione indicata con A in figura? [La posizione considerata è tale che il raggio che congiunge il punto A con il centro O dell'arco di circonferenza forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto alla verticale; ricordate che $sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3}$ ~ 1.73, e $cos(\pi/3) = 1/2$]

v_A = …………………………………… = ……… m/s $(2gR\cos\theta)^{1/2}$ = 7.0 m/s [essendo trascurabili gli attriti, si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U = (m/2)v_A^2 - mgR\cos\theta$, dove si è tenuto conto del fatto che inizialmente l'oggetto è fermo e che l'energia potenziale (gravitazionale) varia nel processo perché l'oggetto cambia la sua quota di un tratto $R\cos\theta$ (il segno negativo tiene conto del fatto che esso scende, cioè diminuisce la propria energia potenziale). Da qui la soluzione]

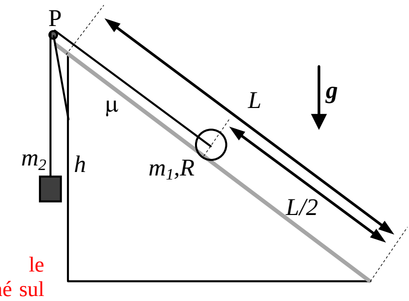
b) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A che la guida esercita sull'oggetto nell'istante in cui questo passa per il punto A di cui sopra?

N_A = …………………………………… = ……… N $3mg\cos\theta$ = 15 N [l'oggetto sta compiendo un moto circolare, dunque su di esso deve agire l'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v_A^2/R$ diretta radialmente verso il centro di curvatura. Le forze che agiscono sull'oggetto, la forza peso e la reazione vincolare della guida, devono allora creare questa accelerazione. La forza peso ha componente radiale $mg\cos\theta$ di verso centrifugo (l'angolo è quello rispetto alla verticale). Deve quindi essere: $ma_C = N_A - mg\cos(\theta)$. Da qui la soluzione, dove si è usato il valore di v_A determinato sopra]

c) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **tangenziale** a_B dell'oggetto nell'istante in cui questo passa per il punto B di figura? [Il punto B è al termine della guida, e si intende che la domanda si riferisce a un istante immediatamente precedente a quello in cui l'oggetto "lascia" la guida]

a_B = …………………………………… = ……… m/s^2 0 [al punto B l'oggetto si muove in direzione orizzontale. Dunque la sua accelerazione tangeizale è data dalle eventuali forze in tale direzione. Poiché le forze che agiscono sull'oggetto (peso e reazione vincolare) sono radiali, cioè verticali, l'accelerazione richiesta è nulla]

2. Una ruota, costituita da un cilindro pieno e omogeneo di massa m_1 = 4.0 kg e raggio R = 50 cm, si trova su un piano inclinato **scabro**, di altezza h = 4.0 m e lunghezza $L = 5h/4$ = 5.0 m, che presenta un coefficiente di attrito (statico) μ = 0.50. Al mozzo (asse) della ruota è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa m_2 incognita, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso e ad esso solidale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Per quale valore m_{2EQ} della massa m_2 si ha **equilibrio**? Quanto vale, in queste condizioni di equilibrio, la forza di attrito F_{AEQ} esercitata al contatto tra ruota e piano inclinato?

m_{2EQ} = …………………………………… = ……… kg $4m_1/5$ = 3.2 kg [all'equilibrio le accelerazioni traslazionali del peso e del centro di massa del cilindro, così come la sua accelerazione angolare, sono nulle. Poiché sul peso agiscono la forza peso di modulo $m_{2EQ}g$, diretta verticalmente verso il basso, e la tensione della fune di modulo T diretta verso l'alto, all'equilibrio deve essere $T = m_{2EQ}g$. L'equazione del moto del centro di massa del cilindro si scrive $a_2 = (T - m_1 g\sin\theta - F_{AEQ})/m_1$, dove si è usato un asse parallelo al piano diretto verso l'alto. In questa equazione, θ rappresenta l'angolo formato dal piano inclinato rispetto all'orizzontale. Per la geometria, si ha $\sin\theta = h/L = 4/5$. L'equazione del moto di rotazione del cilindro scritta usando come polo il centro del cilindro recita, essendo la sola forza di attrito in grado di produrre momento rispetto al polo prescelto, $\alpha = F_A R/I$, con $I = m_1R^2/2$. All'equilibrio l'accelerazione angolare è nulla, per cui è $F_{AEQ} = 0$. L'equazione del moto traslazionale conduce, imponendo l'equilibrio, alla soluzione]

F_{AEQ} = …………………………………… = ……… N 0 [vedi sopra; notate che questo valore della forza di attrito è compatibile con la definizione di attrito statico, $F_A \le \mu N$]

b) A un dato istante, per motivi magici, il peso raddoppia la propria massa, che quindi diventa $m_2 = 2m_{2EQ}$, con m_{2EQ} calcolato sopra. In conseguenza, l'equilibrio non c'è più e ruota e *peso* si mettono in movimento partendo da fermi. Dimostrate, discutendo **per bene** in brutta, che il moto della ruota è di rotolamento puro e determinate l'accelerazione a_2 del *peso*.

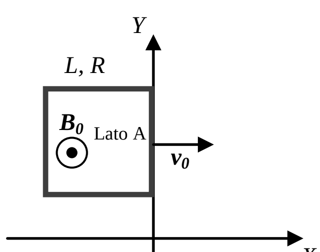
Discussione : …………………………………… Riscriviamo le equazioni del moto rilevanti per il sistema, usando un asse verticale diretto verso il basso per il peso e un asse parallelo al piano inclinato e diretto verso l'alto per la ruota: $a_{CM1} = (T - 4m_1g/5 - F_A)/m_1$, dove abbiamo notato che la forza di attrito si oppone al movimento del punto (generatrice) di contatto fra ruota e piano inclinato ed è quindi diretta verso il basso del piano inclinato, e abbiamo esplicitato il $\sin\theta$; $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(m_1R)$, dove abbiamo posto positivo il segno dell'accelerazione angolare che corrisponde al segno positivo dell'accelerazione del centro di massa e esplicitato il momento di inerzia rispetto al centro del cilindro; $a_2 = (m_2g - T)/m_2$. Le tre equazioni formano un sistema in cui compaiono 5 incognite (le accelerazioni, la forza di attrito, il modulo della tensione della fune). Un'ulteriore equazione può essere scritta tenendo conto della inestensibilità della fune (e dell'orientazione degli assi): $a_2 = a_{CM1}$. Se poi si suppone che il moto sia di rotolamento puro, che è quello che si deve dimostrare, si può porre $a_{CM1} = \alpha R$. A questo punto le equazioni del sistema sono diventate 5 e quindi si può risolvere. Se si risolve per l'incognita F_A si ottiene $F_A = ((m_2 - 4m_1/5)/(2m_2 + 3m_1))m_1g$. Ponendo $m_2 = 2m_{2EQ} = 8m_1/5$, dove si è usato il risultato precedente, si ottiene $F_A = (4/31)m_1g$. Se il moto è di rotolamento puro, l'attrito deve avere carattere statico, per cui deve essere $F_A \le \mu N = \mu m_1 g\cos\theta = 3\mu m_1 g/5$, dove abbiamo usato $\cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = 3/5$. Si ottiene quindi una disequazionea per il coefficiente di attrito: $\mu \ge (20/93)$. Numericamente questa disequazione è verificata, cioè l'attrito che si determina al contatto tra ruota e piano inclinato è sufficiente per gli scopi del moto di rotolamento puro. Dunque il moto è di rotolamento puro.

a_2 = …………………………………… = ……… m/s^2 $8g/31$ = 2.5 m/s^2 [avendo stabilito la tipologia del moto, è sufficiente risolvere il sistema di equazioni per l'incognita a_2 , che conduce al risultato]

c) Supponendo che inizialmente (quando c'era equilibrio) la ruota si trovasse nella posizione indicata in figura, cioè "a metà strada" del piano inclinato, quanto vale la velocità v_2 del *peso* nell'istante in cui la ruota giunge alla sommità del piano inclinato? [Supponete che il *peso* sia libero di scendere al di sotto della quota di base del piano inclinato]

v_2 = …………………………………… ~ ……… m/s $(8gL/31)^{1/2}$ ~ 3.2 m/s [ci sono due possibili strade per risolvere il problema, La prima, più immediata ma meno elegante, si basa su quanto già determinato in precedenza: possiamo infatti affermare che il peso si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione a_2 stabilita prima. Esso parte da fermo e deve percorrere un tratto $\Delta s = L/2$, che, essendo la fune inestensibile, è pari allo spostamento del centro di massa della ruota. La legge oraria del moto è quindi $\Delta s = a_2 (\Delta t)^2/2$, e quella della velocità è $v_2 = a_2 \Delta t$ (si suppone infatti che esso parta da fermo). Tenendo conto dello spostamento percorso, combinando le due equazioni si ottiene facilmente $L/2 = a_2(v_2/2)^2/2$, ovvero $L = v_2^2/a_2$, da cui la risposta. In alternativa si può ragionare in termini di conservazione dell'energia meccanica, che si verifica poiché nel moto di rotolamento puro la forza di attrito (statico!) non compie lavoro. Questa strada è lasciata per esercizio]

3. Una spira quadrata (indeformabile) di lato L è realizzata con un sottile filo conduttore che ha resistenza elettrica complessiva R. La spira può muoversi con attrito trascurabile nella direzione X di un sistema di riferimento cartesiano (essa si muove essendo vincolata sul piano orizzontale XY, con i lati paralleli alle due direzioni cartesiane, come rappresentato in figura) in cui, **solo** nel semispazio x < 0, insiste un campo magnetico "esterno" (cioè generato esternamente alla spira) **uniforme e costante** di modulo B_0 diretto lungo l'asse Z (esso, in pratica, esce dal foglio se guardate le figura). Supponete che un operatore esterno (una manina) mantenga la spira in



movimento lungo la direzione X con velocità costante di modulo v_0 orientata nel verso positivo dell'asse e che all'istante $t_0 = 0$ il lato della spira marcato con A si venga a trovare nella posizione $x = 0$ (come rappresentato in figura). In buona sostanza, per $t > t_0 = 0$ la spira comincia a "uscire" dalla regione in cui insiste il campo magnetico. Supponete anche che per $t < t_0 = 0$ la corrente nella spira sia nulla. [In questo esercizio non ci sono valori numerici!]

a) Considerando gli istanti di tempo $t > t_0$, come si esprime l'intensità $I(t)$ della corrente che scorre nella spira? Che verso ha? [Fate attenzione a considerare per bene il problema e trovate una o più espressioni che valgano per **qualsiasi** istante $t > t_0 = 0$. Per determinare il verso fate riferimento alla figura e spiegate **bene**, in brutta, i ragionamenti necessari]

$I(t)$= ……………………………. B_0Lv_0/R per $0 < t < t' = v_0/L$; 0 per $t > t' = v_0/L$ [ci sono due metodi per determinare cosa succede in questo esercizio. Il primo si basa sulla forza di Lorentz che agisce sulle cariche presenti nel conduttore di cui è fatta la spira. Queste cariche sono "trascinate" dal movimento della spira, cioè esse hanno (approssimativamente) la stessa velocità della spira. In presenza di un campo magnetico ortogonale alla spira, come in questo problema, la forza di Lorentz per una carica positiva ha direzione Y (riferendosi alla figura) e segno negativo (verso il basso), tenendo conto del verso della velocità e della regola della mano destra. Finché la spira si trova tutta immersa nel campo magnetico, le cariche positive sul lato A saranno spinte verso il basso, ma nella stessa direzione saranno spinte anche le cariche che si trovano sul lato opposto ad A. Sugli altri due lati la forza di Lorentz non produce effetto, dato che le cariche non possono essere spinte fuori dal filo elettrico (sottile!). La corrente netta potrà quindi essere nulla. Non appena il lato A penetra nella regione senza campo magnetico le cariche che sono al suo interno non risentiranno più di alcuna forza, mentre quelle sul lato opposto continueranno a sentire la stessa forza di prima. Dunque si crea una corrente (fatta, convenzionalmente, di cariche positive) che scorre in verso **antiorario** rispetto alla figura. Ai fini del moto delle cariche, la forza di Lorentz equivale all'applicazione di un campo elettrico (si chiama talvolta campo impresso) che vale in modulo $E^* = F_M/q = v_0B_0$ ed è uniforme lungo tutta la spira. Ad esso corrisponde una differenza di potenziale $\Delta V^* = E^*L = v_0B_0L$ che è responsabile per il moto delle cariche, cioè per la determinazione della corrente, che quindi vale $I = \Delta V^*/R = v_0B_0L/R$. Come si vede, l'intensità di questa corrente è, nell'intervallo considerato, **costante**. Per $t > t' = L/v_0$ la spira si trova tutta fuori dal campo magnetico. La forza di Lorentz si annullerà e, di conseguenza, la corrente passerà a zero (il passaggio richiede in realtà del tempo, ma, in assenza di dati numerici e delle conoscenze necessarie a determinarlo, qui possiamo considerarlo trascurabile). Tutto questo può essere trovato in modo ancora pi immediato usando la cosiddetta legge di Faraday che stabilisce che la forza elettromotrice, ovvero la differenza di potenziale indotta sulla spira (chiusa) vale $\Delta V = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira tende infatti a diminuire nel tempo. Tenendo conto che il campo magnetico interessa solo una porzione dell'area della spira che si può esprimere come L^2-Lv_0t , si ha $\Phi(\mathbf{B}) = B_0(L^2-Lv_0t)$. Derivando rispetto al tempo si ottiene $\Delta V = B_0v_0L$ (e, di conseguenza, $I = v_0B_0LR$). Il segno positivo che abbiamo trovato significa che tale corrente (indotta) circola in modo tale che la variazione di flusso del campo magnetico da essa prodotto si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Poiché questo flusso tende a diminuire (diamo un segno positivo al flusso associato al campo magnetico che esce dal foglio), la corrente indotta creerà un campo indotto che si somma al campo esterno, cioè è concorde a questo, in modo da "rinforzarne" il flusso. Ovviamente anche per Faraday la corrente si annulla quando la spira è tutta entrata nella regione in cui non c'è campo]

Verso della corrente: ……………………………. Antiorario rispetto alla figura[per la spiegazione vedi sopra]

b) Come si esprime la potenza P_{OP} che l'operatore deve erogare per mantenere in moto la spira nell'intervallo di tempo necessario perché essa penetri completamente nel semispazio in cui il campo magnetico è assente? [Anche in questo caso, spiegate **per bene**, in brutta, i ragionamenti necessari]

P_{OP} = ……………………………. $(B_0v_0L)^2/R$ [ragionando in termini generali di bilancio energetico, si può affermare che la potenza erogata dall'operatore deve uguagliare quella "dissipata" per effetto Joule dalla corrente che circola nella spira. Tale potenza si esprime come $P_J = RI^2 = (B_0v_0L)^2/R$, e, come si vede, essa è costante nel tempo (nell'intervallo considerato), essendo costante la corrente che fluisce nella spira]

c) Come si esprime (in modulo) la **forza** F_{OP} che l'operatore deve applicare alla spira affinché la velocità resti costante? [Anche in questo caso considerate solo l'intervallo di tempo necessario alla penetrazione della spira nel semispazio in cui il campo magnetico è assente]

F_{OP} = ……………………………. $P_{OP}/v_0 = B_0^2L^2v_0/R$ [ci sono due modi per rispondere. Il primo è più stupido, ma conviene partire da questo per rendersi conto di cosa succede. Affinché la velocità della spira sia costante è necessario che la sua accelerazione sia nulla, ovvero che siano nulle le forze a essa applicate. Oltre alla forza esterna, quella dell'operatore, sulla spira agisce anche la forza dovuta all'interazione tra la corrente che vi circola e il campo magnetico. Ricordando la relazione $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ che esprime la forza che agisce su un elemento di filo (di lunghezza dl e orientazione come la corrente) immerso in un campo magnetico, tenendo conto di come la corrente circola nella spira possiamo facilmente dedurre che la forza agisce solo sul lato opposto ad A. Infatti sul lato A non c'è campo magnetico mentre sugli altri due lati le forze, che sono dirette lungo Y , si annullano a vicenda. Inoltre su ogni elemento del lato opposto ad A la forza è uniforme, e vale $IB_0dl = (B_0^2v_0L)/R$. La forza complessiva, che si ottiene sommando questi contributi infinitesimi su tutta la lunghezza del lato, vale $B_0^2v_0L^2/R$. L'operatore deve bilanciare questa forza e quindi esercitare una forza che, in modulo, è pari a questa. Il modo più furbo fa riferimento al fatto che, per una forza costante (e abbiamo verificato che questa forza è costante), si ha $P = Fv$, da cui si ottiene la soluzione]