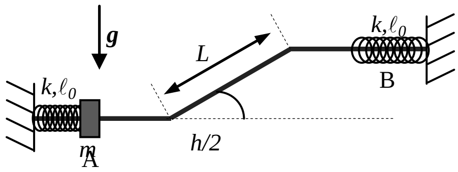
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 27/6/2017

Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un tondino di acciaio, rigido e fisso su un piano verticale, è foggiato come rappresentato in figura: un primo tratto orizzontale è raccordato a un tratto inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, a sua volta raccordato a un tratto orizzontale (il tratto inclinato ha lunghezza L = 1.6 m). Il tondino funge da guida per un manicotto (puntiforme!) di massa m = 0.10 kg, che può scorrere lungo il tondino stesso con **attrito trascurabile,** rimanendovi infilato. Alle estremità del tondino si trovano due molle identiche, di massa trascurabile, costante elastica k = 9.8 N/m e lunghezza di riposo ℓ_0 diversa da zero (irrilevante ai fini della soluzione), indicate come molla A e B secondo quanto descritto in figura; un estremo delle due molle è vincolato a muretti solidali con il tondino. La configurazione iniziale è quella rappresentata in figura: il manicotto è a contatto con l'estremità libera della molla A, che si trova compressa per un tratto Δ_{A0} = 50 cm a causa di una qualche forza esterna, mentre la molla B si trova ferma alla propria lunghezza di riposo. A un dato istante la forza esterna viene rimossa e il manicotto viene "sparato via", cominciando a muoversi lungo il tondino fino a raggiungere l'estremità libera della molla B, dove si può supporre che non si verifichino fenomeni di "rimbalzo" e che il manicotto agisca per comprimere la molla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = 1/2 e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.73]



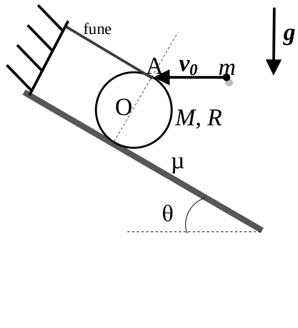
   a) Nel suo movimento, il manicotto comprime la molla B fino a che non viene raggiunto, istantaneamente, un valore massimo di compressione Δ_{Bmax} . Quanto vale Δ_{Bmax} ? [A scanso di equivoci, si ricorda che la compressione di una molla è $\Delta = \ell_0 - \ell$, con ℓ_0 lunghezza a riposo e ℓ lunghezza attuale della molla; nell'istante considerato la molla A è tornata alla propria lunghezza di riposo]

   Δ_{Bmax} = …………………………………… = ……… m $(\Delta_{A0}{}^2 - mgL/k)^{1/2}$ = 0.30 m [cominciamo con l'osservare che la condizione richiesta nell'esercizio si raggiunge nell'istante in cui il manicotto si ferma; infatti subito prima e subito dopo la compressione aumenta e diminuisce. Poiché gli attriti sono supposti trascurabili, si può convenientemente applicare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Qui $\Delta E_K = 0$, poiché, prendendo come configurazione iniziale quella del testo, la velocità del manicotto è nulla sia all'inizio che alla fine del processo. La variazione di energia potenziale ΔU deve tenere conto di diversi contributi da sommare tra loro, dovuti alla presenza di diverse forze conservative che agiscono sul manicotto: il peso e le forze elastiche delle due molle (l'altra forza presente è la reazione vincolare esercitata dal tondino sul manicotto, che non fa lavoro essendo sempre ortogonale allo spostamento). La variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso è $\Delta U_G = mg\Delta h$, con $\Delta h = Lsin\theta = L/2$ (esplicitando il valore del seno dell'angolo), per cui $\Delta U_G = mgL/2$, con segno positivo dovuto al fatto che la quota del manicotto aumenta. Poiché l'energia elastica di una generica molla di costante elastica k è $U_{ELA} = (k/2)\,\Delta^2$, è evidente che all'inizio l'energia elastica è nella molla A, mentre alla fine è nella molla B. Si ha dunque $\Delta U_{ELA} = (k/2)(\Delta_{Bmax}{}^2 - \Delta_{A0}{}^2)$. Mettendo tutto insieme si ottiene $(\Delta_{Bmax}{}^2 - \Delta_{A0}{}^2) = -(mgL/k)$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt che trascorre da quando il manicotto raggiunge l'estremo libero della molla B a quando la molla B raggiunge la massima compressione? [Ragionate per bene e spiegate altrettanto bene il vostro ragionamento in brutta!]

   Δt = …………………………………… ~ ……… s $T/4 = 2\pi(m/k)^{1/2}$ ~ 0.16 s [da quando il manicotto arriva all'estremità della molla in poi il moto è di tipo armonico. Infatti, usando un asse orizzontale con origine nella posizione iniziale dell'estremo libero della molla, l'accelerazione si scrive $a = -(k/m)x$, che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. La posizione di equilibrio di tale moto è proprio $x = 0$ e dunque l'oscillazione considerata, che va dalla posizione di equilibrio a un punto estremo, si svolge in un quarto del periodo T , che vale $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$. Da qui la soluzione]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 4.0 kg e raggio R = 25 cm è appoggiato su un piano inclinato **scabro,** con coefficiente di attrito μ = 0.80, che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Al cilindro, sul punto indicato con A in figura, è agganciata una fune inestensibile e di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato a un muretto che sorge sulla sommità del piano inclinato. In tale configurazione il cilindro si trova in equilibrio e la fune è parallela al piano inclinato. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/6)$ = 1/2 e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.73]



   a) Quanto valgono, nelle condizioni appena descritte, i moduli della forza di attrito F_A che il piano inclinato esercita sul cilindro e della tensione T della fune sul cilindro? Discutete poi se la condizione di equilibrio ipotizzata nel testo è effettivamente realizzabile, o no.

   F_A = ……………………….. = ……….. N $(Mgsin\theta)/2$ = 9.8 N [il cilindro è in equilibrio, dunque su di esso deve essere nulla sia l'accelerazione del centro di massa che l'accelerazione angolare rispetto a un qualche polo. Cominciamo con l'esaminare quest'ultima, scegliendo come polo il punto O (asse del cilindro – in ogni caso la scelta del polo non modifica i risultati vista la situazione di equilibrio). Rispetto a tale polo si vede subito che la forza peso del cilindro e la reazione vincolare del piano inclinato non generano momento, essendo nullo il loro braccio. Invece la forza di attrito e la tensione $\boldsymbol{T}$ della fune 2 fanno momento. Il braccio della forza di attrito, che è sicuramente parallela al piano inclinato, è R , così come anche il braccio della tensione della fune (essa è ortogonale al raggio che parte da O e arriva ad A). La tensione tende a far ruotare il cilindro nel verso antiorario (di figura) e, per avere equilibrio, la forza di attrito dovrà tendere a far ruotare il cilindro nel senso opposto. Essa ha quindi direzione parallela al piano inclinato, diretta verso l'alto. Per l'equilibrio rotazionale deve allora essere $F_A R = TR$, da cui, per i moduli, $F_A = T$. L'equilibrio traslazionale richiede che sia nulla la somma delle componenti delle forze nella direzione del piano inclinato. Usando un sistema diretto verso l'alto del piano inclinato, deve essere: $0 = -mgsin\theta + F_A + T = -Mgsin\theta + 2F_A$, dove abbiamo usato il risultato appena trovato. Da qui la soluzione]

   T = ……………………….. = ……….. N F_A = 9.8 N [vedi sopra]

Discussione: ………………………… La discussione prevede, ovviamente, di verificare che il contatto tra cilindro e piano inclinato sia in grado di produrre una forza di attrito statico sufficientemente intensa da permettere quanto sopra ipotizzato. La forza di attrito statico al contatto è $F_{A,S} \le \mu N = \mu Mg\cos\theta$. Per rendere possibile l'equilibrio occorre quindi $F_A = Mg\sin\theta/2 \le \mu Mg\cos\theta$, ovvero $tg\theta \le 2\mu$. Sostituendo i valori numerici si ha $0.58 \le 1.6$, che è effettivamente verificata, per cui la situazione ipotizzata è possibile

b) Supponete che, a un dato istante, un proiettile puntiforme di massa $m = M/40 = 0.10$ kg colpisca il cilindro proprio nel punto A di figura, avendo, subito prima dell'impatto, una velocità orizzontale di modulo $v_0 = 50$ m/s . L'urto è completamente **anelastico** e il proiettile resta conficcato nel cilindro nel punto A. Discutete, spiegando per bene in brutta, quali grandezze dinamiche del sistema proiettile+cilindro si conservano nell'urto e determinate la velocità angolare ω del cilindro **subito dopo** l'urto. [Considerate non impulsive sia la forza di attrito tra cilindro e piano inclinato che, ovviamente, la tensione della fune, la quale si annulla subito dopo l'urto. Per semplificare i conti, **trascurate** l'effetto del (leggero) proiettile conficcato sul momento di inerzia del sistema]

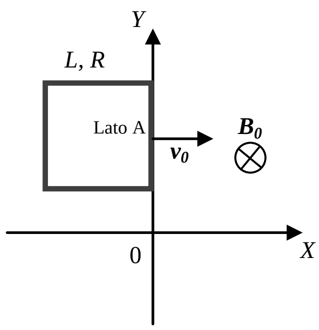
Discussione: ………………………… Le grandezze da prendere in considerazione sono, come si fa convenzionalmente nel caso degli urti, l'energia cinetica totale, la quantità di moto totale, il momento angolare totale. L'energia cinetica totale non si conserva a causa del carattere anelastico dell'urto. La quantità di moto totale, per essere conservata, richiede che sul sistema non agiscano forze esterne impulsive. L'unica forza impulsiva esterna è la reazione vincolare, quindi la quantità di moto totale non si conserva **nella direzione della reazione vincolare stessa**, cioè in direzione ortogonale al piano inclinato (se così non fosse, il cilindro penetrerebbe nel piano inclinato). Invece nella direzione del piano inclinato la quantità di moto totale si conserva, essendo il sistema isolato rispetto alle forze impulsive. Infine, il momento angolare totale si conserva, avendo l'unica forza impulsiva che agisce sul sistema un braccio nullo (si considera O come polo).

ω =…………………………….. ~ ……… rad/s $2(m/M)(v_0/R)\cos\theta$ ~ 8.65 rad/s [sfruttiamo la conservazione del momento angolare totale. Subito dopo l'urto, esso si può esprimere come $I\omega$, dove, sfruttando il suggerimento del testo, possiamo porre $I = MR^2/2$, momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo. Osservate che, effettivamente, la presenza del proiettile conficcato modifica il momento di inerzia rispetto a O (che a rigore non è più il centro di massa del sistema!) per una quantità $mR^2 = I/20$, effettivamente trascurabile se si usano solo due cifre significative, come nell'esercizio. Subito prima dell'urto il momento angolare è dato dal movimento del proiettile, e può essere calcolato come mv_0b . Con b si indica il "braccio" della quantità di moto rispetto a O , cioè la distanza tra O e la retta di applicazione della quantità di moto. Per ragioni geometriche, si vede facilmente che si ha $b = R\cos\theta$. Dunque la conservazione del momento angolare totale si traduce nell'equazione $mv_0R\cos\theta = (MR^2/2)\omega$, da cui la soluzione]

c) Discutete per bene, in brutta, se il moto del cilindro **subito dopo** l'urto è di rotolamento puro, o no. [Occhio: è una domanda che richiede di capire per bene cosa succede dopo l'urto, e non richiede di fare considerazioni e conti inutili…]

Discussione: ………………………… Per il rotolamento puro occorre che sussista una precisa relazione tra spostamento del centro di massa e spostamento angolare, che si traduce in una altrettanto precisa relazione tra velocità del centro di massa e angolare: $v_{CM} = \omega R$. Subito dopo l'urto abbiamo appena calcolato che assume la velocità angolare. Per quanto riguarda la velocità del centro di massa, essa può essere determinata dalla conservazione della quantità di moto totale nella direzione del piano inclinato. Essa recita $mv_0\cos\theta = (m+M)v_{CM} = M v_{CM}$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la stessa approssimazione usata prima per il momento di inerzia (qui la correzione sulla massa totale è ancora inferiore). Dunque $v_{CM} = (m/M)\, v_0\cos\theta$. Si vede che tale grandezza è diversa (minore per un fattore 2) rispetto a ωR . Di conseguenza subito dopo l'urto il moto non è di rotolamento puro.

3. Una spira quadrata (indeformabile) di lato L è realizzata con un sottile filo conduttore che ha resistenza elettrica complessiva R . La spira può muoversi con attrito trascurabile nella direzione X di un sistema di riferimento cartesiano (essa si muove essendo vincolata sul piano orizzontale XY, con i lati paralleli alle due direzioni cartesiane, come rappresentato in figura) in cui, **solo** nel semispazio $x > 0$, è presente un campo magnetico esterno **uniforme e costante** di modulo B_0 che ha direzione e verso tali da infilarsi nel foglio (per chi guarda la figura). Supponete che un operatore esterno (una manina) mantenga la spira in movimento lungo la direzione X con velocità **costante** di modulo v_0 orientata nel verso positivo dell'asse e che all'istante $t_0 = 0$ il lato della spira marcato con A si venga a trovare nella posizione $x = 0$ (come rappresentato in figura). In buona sostanza, per $t > t_0 = 0$ la spira comincia a "entrare" nella regione in cui insiste il campo magnetico. Supponete anche che per $t < t_0 = 0$ la corrente nella spira sia nulla. [In questo esercizio non ci sono valori numerici, per cui esprimete le risposte usando i simboli letterali delle grandezze di interesse]



a) Come si esprime l'intensità $I(t)$ della corrente che scorre nella spira? Che verso ha? [Trovate una o più espressioni che valgano per **qualsiasi** istante $t > t_0 = 0$. Per determinare il verso fate riferimento alla figura e spiegate **bene** i ragionamenti seguiti!]

$I(t)$= ……………………………. B_0Lv_0/R per $0 < t < t' = v_0/L$; 0 per $t > t' = v_0/L$ [ci sono due metodi per determinare cosa succede in questo esercizio. Il primo si basa sulla forza di Lorentz che agisce sulle cariche presenti nel conduttore di cui è fatta la spira. Queste cariche sono "trascinate" dal movimento della spira, cioè esse hanno (approssimativamente) la stessa velocità della spira. In presenza di un campo magnetico ortogonale alla spira, come in questo problema, la forza di Lorentz per una carica positiva ha direzione Y (riferendosi alla figura) e segno positivo (verso l'alto), tenendo conto del verso della velocità e della regola della mano destra. Dunque mano a mano che la spira penetra nel campo magnetico si formerà una corrente che ha verso antiorario (rispetto alla figura). Alla forza di Lorentz, che ha modulo qv_0B_0L si può associare un campo elettrico impresso v_0B_0L , a cui, a sua volta, si associa una differenza di potenziale $v_0B_0L^2$ (il campo elettrico impresso è uniforme su tutta la lunghezza del lato di spira), che, per la legge di Ohm, dà luogo a una corrente di intensità $I = v_0B_0L^2/R$. Ovviamente tale corrente persiste finché la spira non è completamente immersa nel campo magnetico, cioè per $t < L/v_0$. Infatti la forza di Lorentz agisce solo sulle cariche elettriche che si trovano sui lati verticali (in figura, per i lati orizzontali il prodotto vettoriale che è nella definizione della forza di Lorentz restituisce zero), e quando anche il secondo lato verticale risente della forza, il movimento delle cariche, cioè la corrente, viene inibito, tendendo ad avere verso antiorario e orario per i due lati verticali (il "primo", quello marcato con A, e il "secondo", rispettivamente). Allo stesso risultato si giunge usando la cosiddetta legge di Faraday, la quale stabilisce che la forza elettromotrice, ovvero la differenza di potenziale indotta sulla spira (chiusa), vale $\Delta V = -d\Phi(\boldsymbol{B})/dt$. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira tende infatti a aumentare nel tempo, se si prende come positivo il flusso associato al verso di $\boldsymbol{B_0}$, dato che con il tempo aumenta l'area della spira che è interessata (concatenata al) dal campo magnetico. Tenendo conto che il campo magnetico interessa solo una porzione dell'area della spira che si può esprimere come $L^2\text{-}Lv_0t$, si ha $\Phi(\boldsymbol{B}) = B_0(L^2\text{-}Lv_0t)$. Derivando rispetto al tempo si ottiene $\Delta V = B_0v_0L$ (e, di conseguenza, $I = v_0B_0L/R$). Il segno positivo che abbiamo trovato significa che tale corrente (indotta) circola in modo tale che la variazione di flusso del campo magnetico da essa prodotto si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Poiché questo flusso tende a aumentare, la corrente indotta creerà un campo indotto che si oppone al campo esterno. Usando la regola della mano destra in versione ciao-ciao, si ottiene che il verso della corrente indotta deve essere antiorario (rispetto alla figura). Ovviamente anche per Faraday la corrente si annulla quando la spira è tutta entrata nella regione in cui c'è campo, dato che per $t > L/v_0$ il flusso del campo magnetico diventa costante (non c'è più variazione dell'area interessata dal campo magnetico]

Verso della corrente: ……………………………. Antiorario rispetto alla figura [per la spiegazione vedi sopra]

b) Come si esprime la potenza P_{op} che l'operatore esterno (la manina) deve erogare per mantenere costante la velocità della spira? [Si intende anche in questo caso una risposta che tenga conto di tutti gli istanti temporali di rilievo per il processo]

P_{op} = ……………………………. $B_0^2L^2v_0^2/R$ [la potenza dissipata per effetto Joule dalla resistenza che costituisce la spira si esprime come $P_J = RI^2 = (B_0v_0L)^2/R$, ed è diversa da zero solo per $t_0 < t < L/v_0$. Ragionando in termini di bilancio energetico, è ovvio che, in assenza di altre forze di attrito, questa è proprio la potenza che l'operatore deve erogare, nell'intervallo considerato, affinché la spira continui a muoversi alla velocità $\boldsymbol{v_0}$, da cui la soluzione]

c) Che direzione e verso ha e come si esprime, in modulo, la **forza** F dovuta all'interazione tra la corrente che scorre nella spira e il campo magnetico? [Considerate solo l'intervallo di tempo necessario alla penetrazione completa della spira nel semispazio $x > 0$]

Direzione e verso della forza di interazione: ……………………………. Antiorario rispetto alla figura [abbiamo stabilito come nella spira circoli della corrente in verso antiorario (rispetto alla figura). Ricordando la relazione $d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ che esprime la forza che agisce su un elemento di filo (di lunghezza dl e orientazione come la corrente), e considerando solo l'intervallo temporale richiesto, si ottiene che le forze che agiscono sui lati orizzontali della spira sono uguali e opposte tra loro, per cui il contributo netto si annulla. Invece la forza che agisce sul lato A della spira (il "secondo" lato verticale non è ancora entrato nella regione dove è presente il campo magnetico, per richiesta della domanda, e in ogni caso nell'istante in cui anche il "secondo" lato penetra nel campo la corrente si annulla, vedi sopra) ha direzione ortogonale sia a $d\boldsymbol{l}$ che a $\boldsymbol{B_0}$. Tale direzione è la X del sistema di riferimento (la direzione orizzontale di figura) e il verso, come si deduce facilmente usando la regola della mano destra, è quello del segno negativo, cioè la forza spinge verso la sinistra di figura, ovvero è opposta alla velocità impressa dall'operatore esterno alla spira.

F = ……………………………. $B_0^2L^2v_0/R$ [ci sono due modi per rispondere. Il primo è più stupido, ma conviene partire da questo per rendersi conto di cosa succede. Abbiamo appena osservato che tale forza ha direzione e verso tali da opporsi alla velocità $\boldsymbol{v_0}$. Per determinarne il modulo, usiamo l'espressione prima riportata, osservando che tutti i contributi $d\boldsymbol{F}$ sono uguali tra loro (non c'è nulla che dipenda dalla posizione nella espressione). Poiché corrente e campo magnetico sono ortogonali tra loro, ogni elemento di forza ha modulo $dF = B_0Idl$ e la forza totale si ottiene integrando sulla lunghezza dle lato A: $F = B_0IL$, da cui, usando l'espressione di prima per I , la risposta. La stessa risposta può anche essere ottenuta ragionando dal punto di vista dell'operatore. Abbiamo infatti stabilito che l'operatore deve erogare una certa potenza, P_{op} , per mantenere costante la velocità della spira. Abbiamo anche verificato che la forza necessaria affinché questo si verifichi deve essere costante e uniforme; infatti la forza che l'operatore fornisce alla spira deve essere uguale e opposta a quella di interazione, cosa che rende possibile avere un'accelerazione nulla per la spira, e quindi il mantenimento della velocità costante.. La relazione tra potenza e forza (costante) prevede $P_{op} = Fv_0$, da cui, ancora, la soluzione]