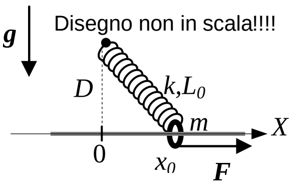
Corso di Laurea STC Chim Curr Appl – ESAME DI FISICA GENERALE - 13/1/2010

Nome e cognome: …………………………………………………………   Matricola: ……………

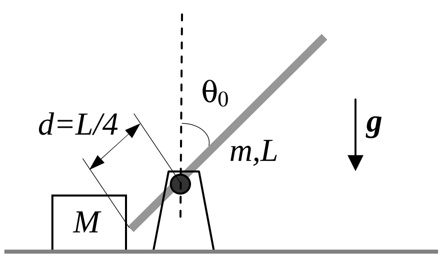
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



2. Un anello di massa m = 1.0 kg e dimensioni trascurabili può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. L'anello è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 25 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale nella posizione indicata in figura (la distanza tra il chiodo e la guida è $D = 2L_0$ = 2.0 m); la figura mostra anche l'asse X che dovete usare (orizzontale come la guida e centrato sulla "verticale" del chiodo). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Inizialmente l'anello è sottoposto a una forza esterna di modulo F , direzione orizzontale e verso come in figura, che mantiene l'anello in **equilibrio** nella posizione $x_0 = L_0$ = 1.0 m. Quanto vale il modulo della forza F?
   F = …………………………………… ~ ……… N $kL_0(1-5^{-1/2}) \sim 14$ N [per l'equilibrio è necessario che la sommatoria delle forze in direzione X sia nulla. Le forze presenti in questa direzione sono la forza esterna F e la componente orizzontale della forza elastica F_{EX} che hanno versi opposti e modulo uguale (per l'equilibrio). Il modulo della componente orizzontale della forza elastica è, indicando con θ l'angolo compreso tra l'asse della molla e l'asse X, $|F_{EX}| = k|\Delta|\cos\theta$, dove $\Delta = L - L_0$, con $L = (D^2+x_0^2)^{1/2} = 5^{1/2}L_0$ e $\cos\theta = x_0/L = 1/5^{1/2}$. Da qui la soluzione]

   b) Supponete che, a un dato istante, la forza esterna venga improvvisamente rimossa; di conseguenza, l'anello comincia a muoversi. Quanto vale la velocità v' con cui esso passa per la posizione x = 0?
   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $((k/mL_0^2((5^{1/2}-1)^2-1)^{1/2} \sim 2.6$ m/s [essendo l'attrito trascurabile, si conserva l'energia meccanica dell'anello, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché l'anello parte da fermo, è $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Inoltre l'unica forza (conservativa) che fa lavoro è la forza elastica; dunque $\Delta U = \Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta^2-(k/2)\Delta_0^2$, dove Δ_0 e Δ sono rispettivamente gli allungamenti della molla quando l'anello è nella posizione x=0 e x_0.(fate attenzione alla simbologia, che risulta un po' confusa…). Per il teorema di Pitagora è $\Delta = (5^{1/2}-1)L_0$, come calcolato nella risposta precedente, mentre $\Delta_0 = D - L_0 = L_0$. Quindi si ottiene $0 = (m/2)v'^2-(k/2)L_0^2((5^{3/2}-1)^2-1))$, da cui la soluzione]

   c) Immaginate ora che, nella posizione x = 0, si trovi (**inizialmente fermo**) un altro anello di massa $M = 2m$, anch'esso di dimensioni trascurabili e libero di muoversi con attrito trascurabile lungo la guida. Quando il primo anello arriva nella posizione x = 0 si verifica un **urto elastico** tra i due anelli. Quanto vale, subito dopo l'urto, la velocità v'' del primo anello (quello di massa m)? [Esprimete anche il segno rispetto all'asse di figura]
   v'' = …………………………………… ~ ……… m/s $v'/3 \sim 0.88$ m/s [il problema è sostanzialmente quello di un urto elastico centrale (il moto avviene solo in direzione orizzontale) tra un corpo di massa m che si muove con velocità v' calcolata sopra (e diretta nel verso negativo dell'asse X) e un corpo di massa M che è inizialmente fermo. Nel processo si conserva la quantità di moto (il sistema è isolato lungo X nel breve periodo dell'urto) e l'energia cinetica complessiva. Si ha quindi: $-mv'=MV''+mv''$, dove il segno negativo è usato perché v' calcolata nella risposta precedente è un modulo, da cui, tenendo conto della relazione tra le masse: $V'' = -(v'+v'')/2$; inoltre è anche: $(m/2)v'^2=(m/2)v''^2+(M/2)V''^2$, ovvero, usando sempre la relazione tra le masse data nel testo: $v'^2-v''^2=2V''^2$. Risolvendo il sistema delle due equazioni appena scritte si ottiene la soluzione]



2. Una sottile asta **omogenea** di massa m = 10 kg e lunghezza L = 4.9 m è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno ad un perno passante per un punto che si trova a distanza $d = L/4$ da un suo estremo, come rappresentato in figura. Volete fare in modo che l'asta stia in equilibrio formando un angolo $\theta_0 = \pi/4$ rispetto alla verticale. A questo scopo mettete un suo estremo a contatto con una cassa rigida di massa $M = 2m$ = 20 kg poggiata su un pavimento **scabro,** che presenta un coefficiente di attrito statico μ = 0.80. La configurazione è tale che la cassa non si "ribalta" e rimane poggiata sul pavimento. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) \sim 0.71$]
   a) Nelle condizioni sopra descritte, si osserva che l'asta rimane effettivamente in equilibrio. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito F_A che si esercita tra piano e cassa in queste condizioni?
   F_A = …………………………….. ~ ……….. N $mgtg\theta_0$ = 98 N [se la cassa è ferma la forza di attrito statico $\boldsymbol{F_A}$ deve essere uguale in modulo alla forza che la cassa esercita sull'estremità dell'asta; l'equilibrio rotazionale dell'asta è garantito da questa forza (applicata al punto di contatto tra asta e cassa e diretta verso la destra della figura), il cui momento rispetto al perno deve bilanciare il momento della forza peso, applicata al centro di massa dell'asta (che si trova al punto di mezzo). Tenendo conto della geometria del problema si ha $0 = mg(L/4)\sin\theta_0 - F_A(L/4)\cos\theta_0$, avendo scelto come positivo il verso di rotazione orario dell'asta attorno al perno. Si ha quindi: $F_A = mgtg\theta_0$. Osservate che, per definizione, $F_{A,MAX} = Mg\mu > F_A = mgtg\theta_0$, per cui la situazione di equilibrio proposta è effettivamente realizzata]

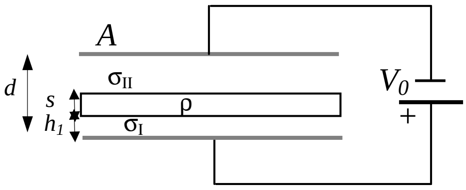
   b) Supponete ora che, ad un dato istante, la cassa venga improvvisamente rimossa: l'asta comincia quindi a ruotare attorno al perno con velocità angolare iniziale nulla. Quanto vale la velocità angolare ω di rotazione dell'asta nell'istante in cui essa si trova a passare per la posizione orizzontale (cioè quando l'angolo indicato in figura vale θ = π/2)?

ω = …………………………….. ~.......... rad/s $((2mg(L/4)\cos\theta_0)/I')^{1/2}$ = $((24/7)(g/L)\cos\theta_0)^{1/2}$ ~ 2.2 rad/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U_g = (I'/2)\omega^2 - mg(L/4)\cos\theta_0$, dove si è presa come variazione dell'energia potenziale gravitazionale quella dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta, che vale $\Delta z = -(L/4)\cos\theta_0$. Inoltre il momento di inerzia I', relativo alla rotazione dell'asta omogenea rispetto al polo considerato, si trova a partire dal momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa, $I_{CM} = (m/12)L^2$, usando il teorema degli assi paralleli: $I' = I_{CM}+m(L/4)^2 = (7/48)mL^2$, da cui la soluzione]

3. Due sottili lamine di materiale ottimo conduttore, spessore **trascurabile** ed area A = 1.0 m^2 sono poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza d = 10 cm. Ad un dato istante, le due lamine, che inizialmente erano **scariche**, vengono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 100 V. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto e supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**]

a) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore per portare il sistema in condizioni stazionarie?
L = ………………………………… = ……….. J $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0 A/d)\,V_0^2/2$ = 4.4x10^{-7} J [il lavoro è pari alla energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale, all'equilibrio, $CV_0^2/2$; la capacità C si esprime, per un condensatore ad armature piane e parallele, come $\varepsilon_0 A/d$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che nello spazio (vuoto) tra le lamine venga posta una lastra conduttrice globalmente **scarica**, di area A identica a quella delle lamine e spessore s = 2.0 cm. La configurazione è descritta schematicamente nella figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza h_1 = 1.0 cm dalla lamina "inferiore". Quanto valgono, in condizioni stazionarie, la densità di carica di volume ρ all'interno della lastra conduttrice e le densità di carica superficiale σ_I e σ_{II} sulle sue due facce indicate in figura (rispettivamente quella inferiore e superiore, nel disegno)?



Disegno non in scala!!!

ρ = ………………………………..... = ……….. C/m^3 0 [essendo il sistema in condizioni stazionarie, cioè di equilibrio, il campo elettrico interno alla lastra deve essere nullo, e nulla deve essere la densità di carica di volume, come si può facilmente dimostrare]

σ_I= ………………………………… = ……….. C/m^2 $-\varepsilon_0 V/(d-s)$ =-1.1x10^{-10} C/m^2

σ_{II}= ………………………………… = ……….. C/m^2 $-\sigma_I$ =1.1x10^{-10} C/m^2 [detti E_1 ed E_2 i campi nella regioni compresa tra lamina inferiore e lastra e tra lastra e lamina superiore, per Gauss deve essere $\sigma_I = -E_1\varepsilon_0$ (il segno negativo viene dal fatto che il versore rilevante è antiparallelo al campo!); per la neutralità della lastra deve essere $\sigma_{II} = -\sigma_I$; d'altra parte per Gauss deve anche essere $E_2 = \sigma_B/\varepsilon_0 = E_1$. Sfruttando la definizione di differenza di potenziale, detta $h_2 = d - s - h_1$ la distanza tra faccia superiore della lastra e lamina superiore, deve allora essere $V = E_1h_1+E_2h_2 = E_1(d-s)$, da cui la soluzione]

c) Sempre facendo riferimento alla situazione di figura, cioè considerando la lastra tra le lamine, supponete che all'istante t_0 = 0 il generatore venga istantaneamente scollegato dal circuito e sostituito con un resistore elettrico di resistenza R = 10 kOhm (in pratica il resistore si trova ad essere collegato tra le due lamine). Quanto vale, in modulo, **l'energia** E' "dissipata" per effetto Joule nel resistore nell'intervallo tra t_0 = 0 e l'istante t' = 1.1 μs?
E'= ………………………………..... = ……….. J $(\varepsilon_0 A/(2(d-s)))V_0^2(1-(1-e^{-1})^2)$ ~ 3.3x10^{-7} J [il problema è sostanzialmente la scarica di un condensatore di capacità C' su una resistenza R. Tale processo è descritto da un andamento esponenziale decrescente per le grandezze rilevanti, cioè per le cariche che si trovano sui vari conduttori e per la differenza di potenziale ai capi del condensatore stesso. La costante tempo di questo processo di scarica è $\tau = RC'$. Come si può dimostrare facilmente, ad esempio usando l'espressione dei campi determinata nella risposta al quesito precedente, il sistema rappresentato in figura equivale alla serie di due condensatori ad armature piane e parallele, di capacità rispettivamente C_1 e C_2, per cui $C' = C_1C_2/(C_1+C_2)$, con $C_1 = \varepsilon_0 A/h_1$ e $C_2 = \varepsilon_0 A/(d-s-h_1)$. Si ha quindi $C' = \varepsilon_0 A/(d-s)$ = 1.1x10^{-10} F, da cui $\tau = RC'$ = 1.1 μs . L'energia dissipata si può determinare o integrando nel tempo la potenza dissipata, $P(t)=V^2(t)/R$, o ragionando in termini energetici, cioè notando che l'energia dissipata deve essere pari alla differenza tra l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante t' e l'energia immagazzinata inizialmente, ovvero, usando i moduli: $E' = |(C'/2)V_0^2-(C'/2)V'^2|$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore all'istante t' è $V' = V_0(1-e^{-t'/\tau})$; inoltre, si trova $t' = \tau$, da cui: $E' = (C'/2)V_0^2|1-(1-e^{-1})^2|$. Da qui la risposta]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 13/1/2010 Firma: