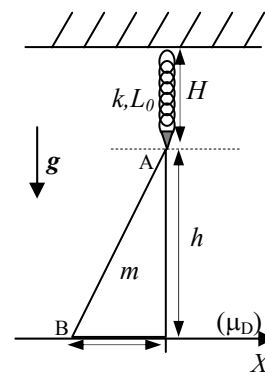


Nome e cognome: Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un blocco di massa $m = 5.0$ kg ha sezione con forma di triangolo rettangolo e cateti di lunghezza $h = 40$ cm (posto in direzione verticale) e $d = 20$ cm (posto in direzione orizzontale). Il blocco è libero di scorrere su un piano orizzontale (ogni altro movimento diverso dalla traslazione, per esempio rotazioni o ribaltamenti, è impossibile). Come mostrato in figura, su una delle superfici del blocco, quella che appare inclinata in sezione, spinge un puntale (puntiforme!) montato all'estremità di una molla con costante elastica $k = 5.0 \times 10^2$ N/m. L'altro estremo della molla è fissato a un solaio rigido e indeformabile. La molla e il puntale hanno entrambi massa trascurabile; inoltre l'asse della molla si mantiene sempre in direzione verticale e non c'è attrito tra puntale e superficie del blocco. La molla ha lunghezza di riposo $L_0 = h + H$, dove $H = 20$ cm è la distanza tra il punto più "in alto" del blocco e il solaio (vedi figura). Inizialmente il blocco è mantenuto fermo da qualche forza esterna nella configurazione di figura, in cui la molla è alla sua massima compressione e il puntale preme sul punto più "in alto" del blocco (marcato con A in figura). Quindi la forza esterna viene rimossa (senza fornire alcuna velocità iniziale) e il blocco comincia a muoversi in direzione orizzontale (verso la destra della figura).



a) Supponendo per questa domanda che l'attrito tra blocco e piano orizzontale sia trascurabile, quanto vale la velocità V del blocco nell'istante in cui il suo estremo più "in basso" (marcato con B in figura) passa sotto il puntale?

$V = \dots\dots\dots = \dots\dots$ m/s $(k/m)^{1/2}h = 4.0$ m/s [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)V^2$ (inizialmente il blocco è fermo) e la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza elastica: $\Delta U = (k/2)\Delta_{in}^2 - (k/2)\Delta_{in}^2$. Poiché la lunghezza di riposo della molla coincide esattamente con la lunghezza che essa assume nell'istante "finale" del processo considerato, è $\Delta_{in} = 0$. Invece, per ovvi motivi geometrici, si ha $\Delta_{in} = h$, da cui la soluzione]

b) Come si scrive, in funzione della coordinata x , il modulo della forza $F(x)$ che il puntale esercita sulla superficie del blocco con cui si trova a contatto? [Usate il sistema di riferimento X di figura, orizzontale e centrato sulla verticale della molla. Dovete scrivere una funzione matematica di x : non usate valori numerici nella sua espressione e usate bene la geometria]

$F(x) = \dots\dots\dots |k(H+xh/d-L_0)| = kh(1-x/d)$ [è evidente che la compressione della molla, e dunque la forza elastica da essa generata attraverso il puntale, dipende dalla posizione del blocco, e quindi dalla coordinata x . Sulla base di semplici considerazioni geometriche, si vede che la lunghezza della molla è $L(x) = H + xtg\theta$, essendo θ l'angolo formato dal "piano inclinato" con l'orizzontale. La goniometria stabilisce poi $tg\theta = h/d$, da cui la risposta, dove si è anche tenuto conto di $L_0 = H + h$ e si sono considerati i segni in modo da ottenere una grandezza sempre positiva, come deve essere il modulo]

c) Come si scrive, in funzione della coordinata x , il modulo della forza di reazione $N(x)$ che il piano orizzontale esercita sulla superficie del blocco che vi scorre sopra? [Usate il sistema di riferimento X di figura, orizzontale e centrato sulla verticale della molla. Dovete scrivere una funzione matematica di x : non usate valori numerici nella sua espressione]

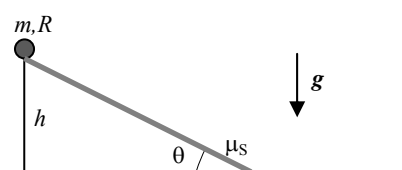
$N(x) = \dots\dots\dots mg + F(x) = mg + kh(1-x/d)$ [per l'equilibrio del blocco in direzione verticale è evidente che su di esso deve agire una reazione vincolare che bilancia il suo peso e la forza generata dalla molla (e trasferita dal puntale sul blocco). Si noti che entrambe le forze considerate sono verticali e dirette verso il basso, per cui il modulo di N è dato dalla somma dei moduli delle due forze]

d) Immaginate ora che, a differenza di quanto considerato nel quesito a), il piano su cui scorre il blocco presenti un attrito dinamico con coefficiente $\mu_D = 0.50$. Quanto vale, in presenza di questo attrito, la velocità del blocco V' che si calcola nelle condizioni di cui alla domanda a)? [In pratica vi si chiede di ripetere la soluzione del punto a), considerando però la presenza dell'attrito; usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $\int x dx = x^2/2$]

$V' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots$ m/s $((k/m)h^2 - 2\mu_D(d/m)(mg + kh/2))^{1/2} \sim 3.2$ m/s [stavolta l'energia

meccanica non si conserva e l'espressione di bilancio energetico stabilisce: $L_A = \Delta E_K + \Delta U$. Le grandezze al secondo membro hanno la stessa espressione di prima, cioè della soluzione in assenza di attrito. Il lavoro della forza di attrito, L_A , si calcola tenendo conto che la forza di attrito dinamico ha modulo $F_A = \mu_D N(x)$. Il lavoro si calcola allora nel seguente modo: $L_A = \int_0^d \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{s} = -\int_0^d F_A dx = -\mu_D \int_0^d (mg + F) dx = -\mu_D \int_0^d (mg + kh(1-x/d)) dx$, dove abbiamo assunto come estremi di integrazione, riferiti all'asse x , le posizioni iniziale e finale dello spigolo "destra" del blocco, abbiamo posto un segno negativo per tenere conto che la forza di attrito si oppone allo spostamento e abbiamo inserito l'espressione della forza $F(x)$ determinata al punto precedente. Il calcolo dell'integrale, che è ben banale, fornisce: $L_A = -\mu_D((mg + kh)d - kh(d^2/(2d))) = -\mu_D(mg + kh d/2)$. Da qui, sfruttando il bilancio energetico, si ottiene la soluzione. Si noti che la soluzione prevede di estrarre la radice quadrata di una grandezza costruita mediante sottrazione. Dunque il radicale potrebbe, in certe condizioni (nel caso di forte contributo dell'attrito), essere negativo. L'eventuale significato fisico di tale condizione sarebbe che, in pratica, il blocco non percorrerebbe per intero lo spostamento considerato nel testo]

2. Un cilindro omogeneo di massa $m = 2.0$ kg e raggio $R = 20$ cm si trova fermo sulla sommità di un piano inclinato, di altezza $h = 3.0$ m, che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è scabro e si sa che il coefficiente di attrito statico vale $\mu_s = 0.50$ ed è seguito da un tratto piano orizzontale che invece è liscio (cioè il tratto orizzontale presenta attrito trascurabile). A un dato istante il cilindro, precedentemente tenuto in posizione da una qualche forza esterna (una manina), viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate il valore $g = 9.80$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Dimostrate per benino, in brutta, che il moto del cilindro lungo il piano inclinato, nelle condizioni del problema, è di rotolamento puro (cioè non c'è strisciamento).

Discussione: Il moto di rotolamento puro, senza strisciamento, implica delle precise relazioni geometriche tra grandezze traslazionali e angolari (di rotazione attorno all'asse del cilindro). In particolare è $v_{CM} = \omega R$ e $a_{CM} = \alpha R$. Le equazioni del moto traslazionale e rotazionale (prima e seconda equazione del moto) recitano: $a_{CM} = g \sin\theta - F_A/m$ e $\alpha = F_A R/I$, dove si è scelto un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso, si è indicato con F_A il modulo della forza di attrito statico, che, come si vede facilmente, è l'unica forza agente sul cilindro che abbia un momento diverso da zero rispetto all'asse del cilindro stesso. Il momento di inerzia del cilindro omogeneo è $I = mR^2/2$. Usando le due equazioni del moto e la relazione geometrica fra le accelerazioni si ottiene un sistema di tre equazioni algebriche con tre incognite. Risolvendo questo sistema per l'incognita F_A si ottiene che, in condizioni di

rotolamento puro, deve essere $F_A = mgsin\theta/3$. Per definizione di coefficiente di attrito statico, si sa che $F_A \leq \mu_s N$, con $N = mgcos\theta$ modulo della reazione vincolare esercitata dal piano inclinato sul cilindro. Allora affinché possa esserci rotolamento puro deve verificarsi: $mgsin\theta/3 \leq \mu_s mgcos\theta$, ovvero $tg\theta \leq 3\mu_s$. Con i dati del problema la disuguaglianza è effettivamente verificata e dunque il moto lungo il piano inclinato è di rotolamento puro.

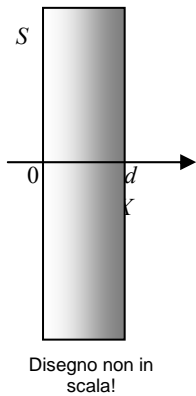
- b) Quanto valgono la velocità del centro di massa del cilindro, v_{CM} , e la velocità angolare del cilindro, ω , nell'istante in cui esso raggiunge il tratto orizzontale alla base del piano inclinato? [Supponete che, come dovreste aver dimostrato alla risposta del quesito precedente, il moto lungo il piano inclinato sia di rotolamento puro]

$v_{CM} = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ m/s $(4gh/3)^{1/2} \sim 6.3$ m/s [nel moto di rotolamento puro interviene la forza di attrito statico, che quindi non compie lavoro. Allora è possibile usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U = (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 - mgh$, da cui, usando la relazione tra le velocità già scritta alla soluzione del quesito precedente e impiegando il momento di inerzia per il cilindro omogeneo, si ottiene la soluzione] $\omega = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ rad/s $v_{CM}/R \sim 31$ rad/s [a causa della relazione geometrica fra grandezze traslazionali e angolari tipica del moto di rotolamento puro]

- c) Che tipo di movimento fa il cilindro sul piano orizzontale **liscio** (con attriti trascurabili)? Discutete per bene in brutta quello che vi aspettate che si verifichi, tenendo d'occhio le conservazioni delle grandezze dinamiche nel processo.

Discussione: $\dots \dots \dots$ Energia meccanica, cinetica, quantità di moto e momento angolare si conservano. Infatti non ci sono attriti e quindi si conserva l'energia meccanica. D'altra parte non ci sono variazioni di energia potenziale, e quindi si conserva anche l'energia cinetica da sola. Poi il cilindro è isolato in direzione orizzontale, che è quella di interesse per il moto, dato che su di esso non agiscono forze in questa direzione. Di conseguenza si conserva la quantità di moto (in direzione orizzontale e anche in quella verticale, che rimane costantemente nulla essendo il movimento solo orizzontale). Infine, anche il momento angolare si conserva non essendoci momenti di forza rispetto all'asse del cilindro. In definitiva, il cilindro prosegue il suo moto in direzione orizzontale mantenendo la velocità del centro di massa e la velocità angolare acquistate durante la discesa lungo il piano inclinato.

3. Una lastra molto estesa e sottile di materiale dielettrico è stata costruita in modo da portare al suo interno una distribuzione di carica volumica **disomogenea**. Come indicato in figura, in cui la lastra è vista "di profilo", le superfici (facce) "di base" della lastra, che hanno area $S = 0.10$ m², sono ortogonali rispetto all'asse X di figura. Lo spessore della lastra è $d = 1.0$ mm (si ha evidentemente $d \ll S^{1/2}$, in modo da poter trascurare gli "effetti ai bordi" e considerare puramente **piana** la simmetria del problema). La densità di carica volumica dipende dalla sola coordinata x e si sa che aumenta **linearmente** da 0 fino al valore $\rho_0 = 8.8$ C/m³ quando si passa dalla faccia "di sinistra" in figura, collocata ad $x = 0$, alla faccia "di destra", che si trova ad $x = d$. Si sa anche che $E(x) = 0$ per $x \leq 0$. [Considerate $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m la costante dielettrica sia all'interno che al di fuori della lastra]



- a) Come si scrive l'espressione del campo elettrico $E(x)$ nelle regioni $0 < x < d$ e $x > d$ (cioè dentro la lastra e "alla destra" della lastra stessa)? [Non usate alcun valore numerico per questa risposta, che va espressa in funzione dei parametri letterali noti del problema; indicate in brutta direzione e verso del campo, nell'ipotesi che si possano trascurare gli effetti ai bordi]

$E(x) = \dots \dots \dots$ per $0 < x < d$ $Q_{int}(x)/(S\epsilon_0) - E(x \leq 0) = \rho_0 x^2 / (2\epsilon_0 d)$ [se si trascurano gli effetti ai bordi, come lecito viste le dimensioni della lastra, il sistema ha simmetria piana. Quindi il campo elettrico è diretto lungo X (nel verso positivo, essendo positiva la carica) e dipende solo dalla coordinata x . Il suo valore si ottiene da Gauss, usando una scatola a forma di parallelepipedo di cui le due facce di base, con superficie pari ad S , sono poste una ad $x \leq 0$ e l'altra ad una qualche coordinata x generica all'interno della lastra. Per la soluzione occorre poi esprimere la densità $\rho(x)$. Sulla base della descrizione riportata nel testo, deve essere $\rho(x) = \rho_0 x/d$, e tenere in debito conto la condizione $E(x \leq 0) = 0$, per cui il flusso del campo elettrico è nullo sulla superficie di base "di sinistra" della scatola. Il flusso è anche nullo attraverso tutte le superfici laterali, per cui si ha: $SE(x) = Q_{int}(x)/\epsilon_0$. La carica interna alla scatola si trova per integrazione della $\rho(x)$ nel volume della scatola stessa. Usando come elemento di volume $dV = Sdx$, scelta opportuna a causa della simmetria piana del problema, si ha: $Q_{int}(x) = \int_{vol} \rho(x) dV = (\rho_0 S/d) \int_0^x x^2 dx = (\rho_0 S/(2d))x^2$, da cui la soluzione]

$E(x) = \dots \dots \dots$ per $x > d$ $Q_{int}(x)/(S\epsilon_0) - E(x \leq 0) = \rho_0 d / (2\epsilon_0)$ [come prima, ma stavolta nel determinare la carica interna alla scatola occorre considerare tutta la carica portata dalla lastra. In altre parole è $Q_{int}(x) = \int_{vol} \rho(x) dV = (\rho_0 S/d) \int_0^d x^2 dx = (\rho_0 S/(2d))d^2 = \rho_0 Sd/2$ da cui la soluzione. Si noti che in queste condizioni il campo non dipende più dalla coordinata x , come atteso per una distribuzione piana di carica]

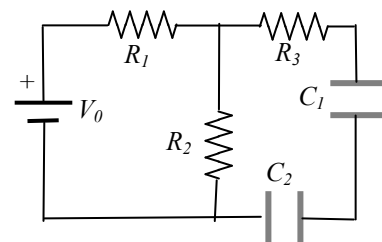
- b) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V = V(x=d) - V(x=0)$ tra la faccia "di destra" e quella "di sinistra" in figura?

$\Delta V = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$ V $-\int_0^d E(x) dx = \rho_0 d^3 / (6d\epsilon_0) = \rho_0 d^2 / (6\epsilon_0) = 1.7 \times 10^5$ V [dalla definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x \leq 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

- c) Supponete ora che uno ione positivo di carica unitaria, $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 1.0 \times 10^{-26}$ kg, incida sul lato di sinistra della lastra con una velocità diretta orizzontalmente (nel verso positivo dell'asse X) di modulo v_0 . Immaginando che lo ione possa penetrare all'interno della lastra senza subire altra forza se non quella elettrica, dunque trascurando gli effetti della forza peso e di qualsiasi forma di "attrito", qual è il valore minimo v_{MIN} della velocità di "impatto" v_0 che garantisce che lo ione riemerge dal lato destro della lastra? [Ovviamente, si intende che la lastra è fissa nello spazio!]

$v_{MIN} = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots$ m/s $(2q\Delta V/m)^{1/2} \sim 2.3 \times 10^6$ m/s [non essendoci forze non conservative, si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U_{ele}$. Nelle condizioni minimali richieste dal problema, lo ione riemerge dalla lastra con velocità nulla, dunque $\Delta E_k = -(m/2)v_{MIN}^2$. La variazione di energia potenziale elettrostatica è, per definizione di differenza di potenziale, $\Delta U_{ele} = q\Delta V$. Da qui la soluzione. Notate che l'elevato valore della velocità è necessario per "forzare" lo ione, positivo, ad attraversare la lastra, carica positivamente] la definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x \leq 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

4. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori ($R_1 = 4.0$ kohm, $R_2 = 1.0$ kohm, $R_3 = 0.50$ kohm) e due condensatori di **identica capacità** ($C_1 = C_2 = 2.0$ μ F) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 50$ V.



- a) Quanto vale, in **condizioni stazionarie** (cioè "a regime"), l'intensità di corrente I_3 che attraversa il resistore R_3 ?

$I_3 = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$ A 0 [per passare attraverso

R_3 la corrente dovrebbe attraversare la serie dei due condensatori, cosa che in condizioni di equilibrio non è possibile]

- b) Quanto vale, in **condizioni stazionarie**, la carica **complessiva** Q accumulata sui due condensatori C_1 e C_2 ?

$Q = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$ C $(C/2)V_0 R_2 / (R_1 + R_2) = 1.0 \times 10^{-5}$ C [i due condensatori sono collegati in serie tra loro, per cui essi accumulano la stessa carica (se così non fosse, il sistema costituito dalle armature dei due condensatori che si trovano collegate assieme non sarebbe complessivamente neutro). Di conseguenza, la capacità "equivalente" del sistema dei due condensatori è $C_{eq} = C/2$. Per definizione, deve essere quindi $Q = C_{eq}\Delta V$. Poiché attraverso il resistore R_3 non passa corrente, non c'è differenza di potenziale ai suoi capi, e quindi la differenza di potenziale ΔV ai capi della serie dei due

condensatori è pari alla differenza di potenziale ai capi del resistore R_2 : $\Delta V = R_2 I = R_2 V_0 / (R_1 + R_2)$, dove si è applicata la legge di Ohm. Da qui la soluzione. Nota aggiunta a posteriori: il testo originale recitava “carica complessiva $Q = Q_1 + Q_2$. In realtà, come già discusso, essendo i due condensatori collegati in serie la carica è la stessa per entrambe, e dunque non si somma. Si è tenuto conto dell’espressione misleading nella correzione degli elaborati!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/7/2010

Firma: