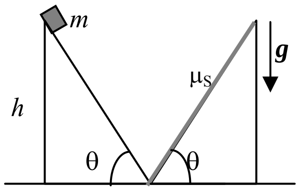
Corso di Laurea STC e Chim Curr Appl – ESAME DI FISICA GENERALE - 20/4/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

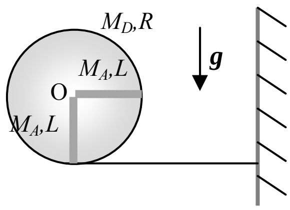
1. Una piccola cassa (da considerare **puntiforme**!) di massa m = 2.0 kg si trova ferma all'inizio di un "percorso" costituito dalla successione di due piani inclinati fissi e rigidi che formano entrambi un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale e che hanno entrambi un'altezza h = 4.0 m. Il primo piano è perfettamente lucidato e presenta un attrito trascurabile; il secondo ha una superficie scabra e presenta coefficienti di attrito statico μ_S = 0.80 e dinamico μ_D = 0.50. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



a) A un dato istante, la cassa viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla, scende lungo il primo piano inclinato (quello liscio) e risale per il secondo (quello scabro). Fino a quale altezza h' arriverà? [Misurate tale altezza dal piano orizzontale di appoggio dei piani inclinati lungo la direzione verticale: è un'**altezza**!]
h' = …………………………………… ~ .... m
$2ghsin\theta/(2g(sin\theta+\mu_D cos\theta))=hsin\theta/(sin\theta+\mu_D cos\theta)=h/(1+\mu_D tg\theta) \sim 2.1$ m [come si può facilmente dimostrare, la cassa arriva al fondo del primo piano inclinato dotata di una velocità di modulo $v' = (2gh)^{1/2}$ Sul piano scabro la cassa subisce l'attrito dinamico, di modulo $F_{AD} = \mu_D N = \mu_D mgcos\theta$. Dunque la sua equazione del moto, scritta rispetto a un riferimento X orientato verso la sommità del piano inclinato e parallelo a questo, è $a = -g(sin\theta+\mu_D cos\theta)$ e la legge oraria del moto è $x(t) = v't+at^2/2$, mentre la legge oraria della velocità recita $v(t)=v'+at$ (abbiamo posto t_0=0 all'istante in cui la cassa inizia il suo moto di risalita sul secondo piano). L'istante di arresto vale $t_{STOP}=-v'/a$ e lo spazio percorso sul secondo piano vale $x_{STOP} = v't_{STOP}+at_{STOP}^2/2= -v'^2/a+v'^2/(2a)=-v'^2/(2a)$. L'altezza massima si ottiene da considerazioni trigonometriche: $h'=x_{STOP}sin\theta$ e da qui, facendo le debite sostituzioni, si trova la soluzione]

b) Discutete per benino, in brutta, cosa succede alla cassa dopo che ha raggiunto l'altezza h' di cui sopra, in particolare se essa ridiscende o rimane ferma nella posizione raggiunta.
Discussione: …………………………………… nell'istante in cui la cassa si ferma, l'attrito statico diventa il meccanismo rilevante (il nostro modello prevede infatti di distinguere fra attrito statico e dinamico, e quest'ultimo agisce solo finché c'è movimento). La forza di attrito statico vale, al massimo, $F_{AS,MAX}=\mu_S N=\mu_S mgcos\theta$. Affinché la cassa resti ferma, cioè rimanga in equilibrio all'altezza h' dove si è arrestata, occorre che sulla cassa agisca una forza di attrito che si oppone alla componente attiva della forza peso, cioè, in modulo, $F_{AS} = mgsin\theta$. Nelle condizioni del problema, si vede che $F_{AS}/F_{AS,MAX} = tg\theta/\mu_s > 1$, dunque l'attrito statico **non** è sufficiente a mantenere in equilibrio la cassa e questa subito dopo essersi fermata comincia a ridiscendere lungo il piano inclinato scabro.

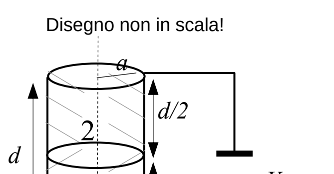
2. Un certo corpo rigido può essere schematizzato come costituito da due sottili aste **omogenee** di lunghezza L = 50 cm e massa $M_A = m$ = 2.0 kg, saldate su una faccia di un disco **disomogeneo** (ma comunque **a simmetria cilindrica**), di raggio $R = L$ = 50 cm e massa $M_D = 2m$ = 4.0 kg, così da ottenere la forma rappresentata in figura: in sostanza, le aste sono saldate lungo due raggi della stessa faccia del disco, in modo da formare tra loro un angolo retto. Il corpo è imperniato con attrito trascurabile sull'asse del disco (O nella sezione di figura) e può ruotare su un piano **verticale**: una fune **orizzontale** vincolata da un lato all'estremità di una delle due aste e dall'altro a una parete fissa e rigida verticale, mantiene il corpo **in equilibrio** nella configurazione di figura, in cui un'asta è lungo la verticale (quella a cui è attaccata la fune) e l'altra lungo l'orizzontale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto valgono il modulo T della tensione della fune e il **modulo** F_O della forza esercitata dal perno sul corpo rigido in queste condizioni di equilibrio?
T = …………………………………… = ……… N $mg/2 \sim 10$ N [per l'equilibrio rotazionale occorre che la somma dei momenti delle forze sia nulla. Prendendo il punto O come polo, le forze che fanno momento sono la forza peso dell'asta "orizzontale", $M_A g$, applicata al suo centro di massa, che dista $R/2$ da O (essendo l'asta omogenea il centro di massa è a metà della lunghezza) e la tensione della fune. Infatti la forza peso del disco è a braccio nullo e lo stesso vale per quella dell'asta "verticale", come potete facilmente verificare. La forza peso tende a far ruotare il corpo in senso antiorario (in figura) e ha braccio $R/2$, la tensione della fune tende a far ruotare in senso orario e ha braccio R. Uguagliando i moduli dei momenti delle forze si ottiene il risultato]
F_O = …………………………………… = ……… N $mg(16+1/4)^{1/2}$ = 78 N [per l'equilibrio traslazionale la somma vettoriale delle forze agenti sull'intero corpo deve essere nulla, cioè deve essere: $0 = \mathbf{F_O}+2M_A\mathbf{g}+M_C\mathbf{g}+\mathbf{T}$. La forza $\mathbf{F_O}$ ha componente verticale pari (e opposta) al peso di tutto il corpo e componente orizzontale pari (e opposta) alla tensione della fune. Poiché si tratta di un vettore e le componenti trovate sono ortogonali tra loro, usando l'espressione di T appena trovata e notando che $tg^2\theta = 3$, si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che la densità di massa del disco vari con la distanza r dall'asse secondo la legge $\rho_m=\rho_0 r^2/R^2$, con ρ_0 costante (incognita da determinare!), quanto vale il momento di inerzia I per rotazioni dell'**intero** corpo rigido attorno all'asse passante per O? [Ricordate che, per una variabile generica ξ, è $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, per $n \neq -1$; siete pregati di svolgere quanto più possibile i calcoli e di spiegarli in brutta, senza affidarvi troppo alla memoria (almeno per il cilindro disomogeneo)!]
I = …………………………………… = ……… kg m^2 $mL^2(2/3+4/3)=2mL^2$ = 1.0 kg m^2 [essendo un sistema composto, occorre sommare il momento di inerzia del disco I_D con quelli delle aste I_A. Ovviamente tutti i momenti vanno calcolati rispetto al polo O. Ricordando che per un'asta sottile omogenea imperniata a un suo estremo è $I_A=M_A L^2/3$ e notando che le due aste contribuiscono con lo stesso momento di inerzia, si ha che le due aste posseggono un momento di inerzia complessivo $2mL^2/3$. Per il disco, usando il corretto elemento di volume (guscio cilindrico di spessore dr), $dV=2\pi rhdr$, con h spessore (ovvero altezza) del disco, occorre risolvere l'integrale: $I_D = \int_0^R \rho_0(r^2/R^2)r^2 2\pi hrdr= (\rho_0 2\pi h/R^2)\int_0^R r^5 dr=(\rho_0 2\pi h/R^2)(R^6/6)$. Il termine costante incognito ρ_0 si può determinare esprimendo la massa M_D in funzione della densità di massa, cioè risolvendo l'integrale $M_D = \int_0^R \rho_0(r^2/R^2)2\pi hrdr= (\rho_0 2\pi h/R^2)\int_0^R r^3 dr=(\rho_0 2\pi h/R^2)(R^4/4)$. Estraendo da quest'ultima equazione l'espressione di ρ_0 e sostituendola nell'altra si trova $I_D = 2M_D R^2/3 = 4mL^2/3$, da cui la soluzione]

3. Un condensatore è realizzato con due armature conduttrici di forma circolare di raggio a = 10 cm poste parallelamente tra loro a distanza reciproca d = 2.0 mm. Lo spazio tre le armature è riempito per metà da due distinti materiali omogenei 1 e 2, **debolmente conduttori** con resistività rispettivamente ρ_{C1} = 1.0x10^3 ohm m e ρ_{C2} = 5.0x10^3 ohm m Questi materiali sono disposti in modo da riempire lo spazio



rispettivamente compreso tra un'armatura ed il piano collocato a distanza *d/2* da questa, e da qui fino all'altra armatura, come indicato in figura. Entrambi i materiali hanno la costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m. Le armature sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 50$ V e si sa che il sistema ha raggiunto **condizioni di equilibrio**.

a) Quanto vale la carica Q che si deposita alla superficie di separazione tra i due materiali 1 e 2?

Q = ……………………………………= .... C $(E_2 - E_1)\,\pi a^2\,\varepsilon_0 = (2/d)V_0\,((\rho_{C2} - \rho_{C1})/(\rho_{C2} + \rho_{C1}))\pi a^2\,\varepsilon_0 = 9.2\times10^{-9}$ C [il sistema si comporta come un resistore, o meglio come una serie di due resistori (1 e 2). Dato che le armature sono molto estese laterlamente e poco distanti l'un l'altra, si possono trascurare gli effetti ai bordi e quindi si può supporre che i campi elettrici nei due materiali, $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$, siano ortogonali alle armature ed **uniformi** all'interno delle due armature. La condizione sulla differenza di potenziale implica allora: $E_1 d/2 + E_2 d/2 = (E_1+E_2)d/2 = V_0$. I campi hanno intensità diversa, ma, poiché la corrente fluisce in modo uniforme e la densità di corrente deve essere la stessa nei due materiali (per la continuità della corrente), le intensità sono legate dalla relazione: $j_1 = E_1/\rho_1 = j_2 = E_2/\rho_2$. Unendo le due equazioni si ottiene: $E_1 = (2/d)V_0\rho_1/(\rho_1+\rho_2)$; $E_2 = (2/d)V_0\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica (sempre di raggio a) con l'asse parallelo all'asse del condensatore e con le superfici di base una nel materiale 1 e l'altra nel materiale 2 permette di legare la discontinuità del campo alla carica che si accumula sull'interfaccia: $E_2 - E_1 = Q/(\pi a^2\varepsilon_0)$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale la potenza P fornita dal generatore?

P = ……………………………………= .... W $V_0^2 2\pi a^2/(d\,(\rho_{C2} + \rho_{C1})) = 13$ W [il generatore fornisce (in modulo, ma la potenza è per definizione positiva, in genere) la stessa potenza che viene "dissipata" per effetto Joule, cioè $P = V_0 I = V_0^2/R$, dove R è la resistenza offerta dai due pezzi di materiale al passaggio della corrente. Per la geometria del sistema (simmetria piana!), si ha semplicemente $R = R_1+R_2 = (\rho_{C1}+\rho_{C2})(d/2)/(\pi a^2)$, da cui la risposta]

c) Quanto valgono in modulo, direzione e verso i campi magnetici $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ misurati ad una distanza $r = 5.0$ cm rispetto all'asse passante per i centri delle due armature all'interno dei materiali rispettivamente 1 e 2? [Usate il valore $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]

Direzione e verso dei campi: .... direzione tangenziale e verso stabilito dalla regola della mano destra; infatti la presenza di campo magnetico è dovuta alla corrente che fluisce nel sistema e che ha direzione assiale

B_1 = ……………………………………= .... T $\mu_0 J\,\pi r^2/(2\pi r) = \mu_0 V_0\, r/(d(\rho_1+\rho_2)) = 2.6\times10^{-7}$ T [dal teorema di Ampere calcolato su un percorso circolare di raggio r; la corrente concatenata a questo circuito è data dal flusso di $\boldsymbol{j}$ nel cerchio delimitato dalla circonferenza. L'espressione di j è stata determinata nella risposta ai quesiti precedenti]

B_2 = ……………………………………= .... T $B_1 = 2.6\times10^{-7}$ T *(t)* [dato che $\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{j_2}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/4/2011 Firma: