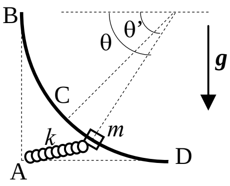
Corso di Laurea STC e Chimica C.A. – ESAME DI FISICA GENERALE - 21/6/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 50 cm ed è disposto su un piano verticale. Al manicotto è agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 0.10 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** (L_0 = 0, in pratica!). L'altra estremità della molla è vincolata a un punto fisso, indicato con A in figura, che corrisponde all'intercetta tra la verticale e l'orizzontale dei punti di inizio e fine della guida: dato che questa descrizione risulterà incomprensibile ai più, vi invito a osservare la figura, che si riferisce a una posizione "generica" del tondino, quella in cui l'angolo tra orizzontale e raggio "vettore" vale θ (generico). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 1/2^{1/2}$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Esprimete la funzione $L(\theta)$ che fornisce la lunghezza della molla per un valore generico dell'angolo θ (che, come già affermato, è quello tra orizzontale e raggio "vettore", vedi figura). [Dovete scrivere una funzione dell'angolo θ (quello indicato in figura) e quindi non utilizzate valori numerici! Notate che si tratta di un semplice problema di geometria…]

$L(\theta)$ = …………………… $R(3-2(sin\theta+cos\theta))^{1/2}$ [immaginate di porre un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto A, chiamando asse X e Y gli assi orizzontale e verticale. Se indicate con x,y la posizione del manicotto in questo riferimento, è chiaro che la lunghezza della molla è $L = (x^2+y^2)^{1/2}$. Ricordando un po' di trigonometria e osservando la figura, dovrebbe esservi evidente che si ha $x=R-Rcos\theta$ e $y=R-Rsin\theta$. Dunque, riorganizzando appena le espressioni, $L=R((1-cos\theta)^2+(1-sin\theta)^2)^{1/2}$, da cui, svolgendo i binomi e ricordando che $sin^2\theta+cos^2\theta = 1$, il risultato]

b) Immaginate che il manicotto si trovi inizialmente **fermo** sulla sommità della guida, cioè nel punto indicato come B in figura, e che da qui venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v' con cui passa, se ci passa, per il "punto di mezzo" della guida (punto C in figura, quando il manicotto passa per questo punto l'angolo θ vale θ' = π/4)? [Trascurate ogni forma di attrito]

v' = …………………… ~ ………. m/s $(gR2^{1/2}+(k/m)R^2(2^{1/2}-1))^{1/2} \sim 2.7$ m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. Alla variazione di energia potenziale contribuiscono l'energia potenziale della forza peso (gravitazionale) e quella elastica della molla, cioè $\Delta U= \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$. La variazione dell'energia potenziale gravitazionale è dovuta alla discesa del manicotto per un tratto che vale, in modulo, $Rsin\theta'$, per cui $\Delta U_G= -mgRsin\theta'=-mgR/2^{1/2}$. La variazione di energia elastica della molla è dovuta al fatto che essa cambia la sua lunghezza dal valore iniziale $L(0)=R$ al valore "finale" $L(\theta')=R(3-2(sin\theta'+cos\theta'))^{1/2} = R(3-4/2^{1/2})^{1/2}$. Ricordando che l'energia elastica è, nel caso di molla lunga L e con lunghezza di riposo nulla, $U_{ELA}=(k/2)L^2$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)R^2(3-4/2^{1/2})-(k/2)R^2=(k/2)R^2(2-4/2^{1/2})=kR^2(1-2^{1/2})$.. Unendo il tutto e rimaneggiando si trova la soluzione: si noti che la soluzione esiste, dunque il manicotto passa effettivamente per la posizione richiesta, dato che il suo movimento comporta una diminuzione dell'energia potenziale]

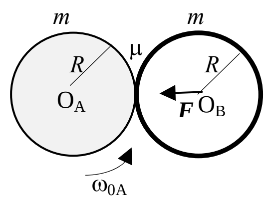
c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che il tondino esercita sul manicotto nell'istante in cui esso passa per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per il punto di mezzo della guida (punto C di figura, angolo θ' = π/4)? [Attenti: il manicotto "passa" per quella posizione, dunque non è fermo…]

N = …………………… ~ ………. N $mv'^2/R+mg/2^{1/2} +kR(3-2x2^{1/2})^{1/2}\sim 0.63$ N [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio R con una data velocità. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto, le quali sono la componente radiale della forza peso, che punta verso l'esterno della circonferenza e vale $mgsin\theta'=mg/2^{1/2}$, la forza elastica, che è radiale e punta anch'essa verso l'esterno della circonferenza (la molla è estesa, avendo lunghezza di riposo nulla!) e la reazione vincolare, che invece punterà verso il centro di curvatura della circonferenza. Da qui la soluzione]

d) E quanto vale la velocità v'' con cui il manicotto arriva alla fine della guida (punto D di figura), se ci arriva?

v'' = …………………… ~ ………. m/s $(2gR)^{1/2} \sim 3.1$ m/s [anche qui adottiamo la conservazione dell'energia meccanica, che stavolta si scrive in modo semplicissimo. Infatti la molla non cambia la sua lunghezza tra inizio e "fine" (essa è sempre lunga R!) e dunque non c'è variazione dell'energia elastica. Resta la variazione dell'energia potenziale gravitazionale, che è pari a $-mgR$, da cui la soluzione che, anche in questo caso, esiste!]

2. All'interno di un macchinario si trovano due "ruote", denominate A e B, entrambi di raggio R = 30 cm, che possono ruotare con **attrito trascurabile** attorno a dei perni passanti per i propri assi geometrici, O_A e O_B. Le due "ruote" hanno anche identica massa m = 1.0 kg, però la ruota A è piena e omogenea, mentre la ruota B assomiglia a un cerchione di bicicletta, cioè tutta la sua massa è praticamente distribuita in modo omogeneo sulla circonferenza. Le superfici laterali delle due ruote sono scabre e hanno un coefficiente di attrito μ = 0.50: notate che tale coefficiente di attrito vale sia nel caso di attrito dinamico che di attrito statico. Inizialmente le due ruote non sono a contatto tra di loro, la A ruota con velocità angolare ω_{0A} = 50 rad/s (è stata messa in rotazione in precedenza da una qualche causa esterna!) e la ruota B è ferma. Quindi le due ruote vengono poste a contatto l'una con l'altra nella situazione rappresentata in figura, dalla quale si vede che il contatto avviene sulla superficie laterale. A questo scopo una forza di modulo F = 20 N è applicata al perno O_B, il quale è mobile nella direzione della congiungente fra i due perni (il perno O_A è invece fisso). Si osserva che, trascorso un certo intervallo di tempo Δt, le due ruote si muovono con la stessa velocità angolare ω. [Le ruote ruotano su un piano orizzontale e la forza peso non c'entra nulla!]



a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto hanno le due ruote quando vengono messe a contatto e determinate l'intervallo Δt di cui sopra e la velocità angolare comune ω che viene raggiunta dalle due ruote.

Discussione : ……………………….. Come anche suggerito dal testo, la ruota B si metterà in moto rotatorio. Essa potrà ruotare, partendo da ferma, perché sottoposta a un momento di forze, secondo l'equazione del moto rotatorio $\alpha_B = \Sigma\tau/I_B$. L'unica forza applicata a B che può provocare un momento è la forza di attrito F_A esercitata al punto di contatto tra le due ruote. Infatti le altre forze, in particolare quella applicata sul perno O_B e la reazione alla forza $\boldsymbol{F}$ hanno evidentemente braccio nullo. Nella fase transiente del moto, quando le velocità angolari delle due ruote sono diverse e quindi c'è strisciamento nel punto di contatto (anzi, nella generatrice delle ruote che è a contatto reciproco), la forza di attrito è dinamica, per cui $F_A=\mu N$, La reazione vincolare che compare in questa espressione deve essere normale alla superficie di contatto, per cui deve essere radiale rispetto alle ruote. Dato che le ruote sono poste a contatto tra di loro a causa della forza $\boldsymbol{F}$, la reazione deve bilanciare tale forza, cioè $N = F$. La forza di attrito, inoltre, dovendosi opporre allo strisciamento, ha direzione tangenziale rispetto alle ruote, per cui il suo braccio è pari al raggio delle ruote stesse. Dunque l'accelerazione angolare della ruota B vale $\alpha_B=F_AR/I_B=F_A/(mR)=\mu F/(mR)$, avendo notato che, per un « cerchione » di bicicletta, si ha $I = mR^2$. Notate che, ovviamente, una forza di attrito uguale e opposta agisce sulla ruota A, la quale dunque risente di un'accelerazione angolare $\alpha_A = -F_AR/I_A =-2\mu F/(mR)$, avendo notato che $I_A = mR^2/2$ (ruota piena e omogenea). Di conseguenza la ruota A dimnuirà la propria velocità angolare mentre la ruota B si metterà in movimento. Come suggerito dal testo, a un certo istante le due velocità angolari coincideranno. Di conseguenza anche le velocità tangenziali dei punti di contatto delle due ruote saranno, in modulo, le stesse e non ci sarà più strisciamento. Da questo istante in poi non ci saranno più perdite di energia (cinetica) per attrito e le velocità resteranno costanti al valore ω.

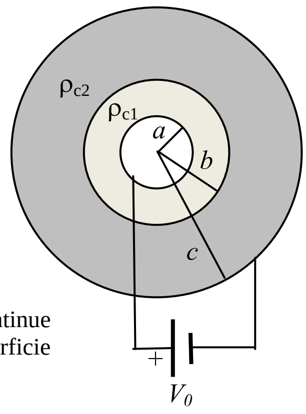
Δt = ……………………….. = ………. s $\omega_{0A}mR/(3\mu F)$ =0.50 s [osservando che le accelerazioni determinate sopra sono uniformi e costanti, si avrà che le leggi orarie delle velocità angolari assumeranno la forma : $\omega_B = \alpha_B(t-t_0)$ e $\omega_A = \omega_{0A}+\alpha_A(t-t_0)$, con t_0 istante in cui avviene il contatto . L'intervallo di tempo richiesto è quello per cui le due velocità risultano uguali, cioè $\Delta t = \omega_{0A}/(\alpha_B-\alpha_A)$, da cui, sostituendo le espressioni trovate prima, la soluzione]

ω = ……………………….. = ………. rad/s $\alpha_B\Delta t =(\mu F/(mR))(\omega_{0A}mR/(3\mu F)) = \omega_{0A}/3 = 17$ rad/s [vedi sopra]

b) Quanto vale il lavoro L_{ATT} fatto dalla forza di attrito che si esercita al contatto tra le due ruote nel processo di cui sopra?

L_{ATT} = ……………………………………~ ……… J $-\omega_{0A}^2/(6mR^2)$ = -4.6x10^2 J [per motivi di bilancio energetico, il lavoro della forza di attrito deve uguagliare la variazione di energia cinetica (infatti nel processo non ci sono variazioni di energia potenziale…), cioè $L_{ATT} = \Delta E_K = ((I_A+I_B)/2)\omega^2-(I_A/2)\omega_{0A}^2$, da cui, sostituendo e rimaneggiando, la soluzione]

3. Un sistema è costituito da una sfera omogenea di materiale perfettamente conduttore di raggio a = 5.0 mm che si trova al centro di un guscio sferico **sottile**, di raggio c = 20 mm, fatto dello stesso materiale perfettamente conduttore. Lo spazio tra i due conduttori è riempito da due gusci sferici spessi concentrici fatti di due materiali **debolmente conduttori** diversi fra loro. In particolare, lo spazio $a<r<b$, con b = 10 mm, è riempito di materiale omogeneo 1 con resistività ρ_{C1} = 1.0x10^6 ohm m, mentre lo spazio $b<r<c$ è riempito di materiale omogeneo 2 con resistività ρ_{C2} = 2.0x10^6 ohm m. Il sistema è collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10 V come rappresentato in figura (il polo positivo è collegato alla sfera di raggio $r=a$, il polo negativo al guscio di raggio $r=c$) e si suppone che esso si trovi in **condizioni stazionarie**, cioè che il collegamento con il generatore sia avvenuto molto tempo prima di quando si eseguono le osservazioni di questo problema. [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, e supponete che questa sia anche la costante dielettrica dei materiali 1 e 2]



a) Spiegate per bene, in brutta, quali tra le grandezze vettoriali campo elettrico e densità di corrente sono continue (cioè non cambiano il proprio valore) attraversando l'interfaccia tra materiale 1 e materiale 2, cioè la superficie sferica posta in $r=b$.

Spiegazione: …………………… il sistema permette il passaggio di corrente dalla sfera di raggio a al guscio di raggio c, Poiché la carica elettrica "si conserva" passando per l'interfaccia (non ci sono meccanismi che possano far scomparire o comparire nuove cariche elettriche), l'intensità di corrente attraverso i due materiali deve essere la stessa. D'altra parte, vista la simmetria del problema, l'intensità di corrente, che è il flusso del vettore densità di corrente, è data dal semplice prodotto tra densità di corrente e superficie (sferica) di integrazione. Applicando il ragionamento a una superficie sferica di raggio pari, o prossimo, a b, si ottiene che la densità di corrente deve essere la stessa nei due materiali e pertanto questa grandezza è continua attraverso l'interfaccia. Dato che, in un materiale ohmico come i deboli conduttori considerati nel problema, si ha $\mathbf{j} = \mathbf{E}/\rho_C$, essendo le resistività diverse nei due materiali i campi elettrici dovranno essere diversi, cioè la grandezza campo elettrico non è continua all'interfaccia.

b) Chiamando Q_a e Q_b le cariche (**generiche**) che si trovano rispettivamente sulla sfera conduttrice di raggio a e (eventualmente) all'interfaccia tra i due materiali ($r=b$) nelle condizioni del problema, come si scrivono le funzioni $\mathbf{E_1}(r)$ ed $\mathbf{E_2}(r)$ che esprimono il campo elettrico rispettivamente nelle regioni $a<r<b$ e $b<r<c$? [Dovete scrivere delle **funzioni** della distanza dal centro r; non usate valori numerici per questo risultato e spiegate bene, in brutta, come usate il teorema di Gauss]

$\mathbf{E_1}(r)$ = …………………………….. $(Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2))\hat{\mathbf{r}}$ [per il teorema di Gauss, usando una scatola di forma sferica (concentrica al sistema) e raggio r generico, compreso tra a e b , si ha la soluzione, dove si è anche scritta la direzione e il verso usando il versore del sistema di riferimento sferico centrato al centro del sistema. Notate che, in condizioni stazionarie, essendo i materiali debolmente conduttori omogenei (ognuno nella regione in cui è presente) non si hanno cariche nel volume al loro interno (si ci fossero, vorrebbe dire che la carica non si "conserva"…]

$\mathbf{E_2}(r)$ = …………………………….. $((Q_a+Q_b)/(4\pi\varepsilon_0 r^2))\hat{\mathbf{r}}$ [come sopra, però stavolta la scatola contiene anche la carica Q_b distribuita all'interfaccia per il teorema di Gauss]

c) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la carica Q_a definita al punto precedente?

Q_a = ……………………………. = ………… C $(4\pi\varepsilon_0 V_0)/(1/a-1/b+(\rho_{C2}/\rho_{C1})(1/b-1/c))$ = 5.5x10^{-6} C [le condizioni "al contorno" del problema impongono che $\Delta V = V(r=c) - V(r=b) = -V_0$ (il segno meno dipende dalla definizione della differenza di potenziale scritta: chiaramente il guscio sferico di raggio c , essendo collegato al polo negativo del generatore, si troverà a potenziale più basso rispetto alla sfera di raggio a). Quindi deve essere: $-V_0 = -\int_a^c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$. Tenendo conto della direzione del campo, dovuta alla simmetria sferica del sistema, e del fatto che esso è diverso nei due materiali, si ottiene: $V_0 = \int_a^b E_1 dr+\int_b^c E_2 dr$. D'altra parte per la continuità di $\mathbf{j}$ deve essere $\mathbf{j_1} = \mathbf{j_2}$ cioè $E_2 = E_1\, \rho_{C2}/\rho_{C1}$ e quindi: $V_0 = \int_a^b E_1 dr+(\rho_{C2}/\rho_{C1})\int_b^c E_1 dr$. Sostituendo l'espressione funzionale di E_1 trovata in precedenza e risolvendo gli integrali si ha: $V_0 = (Q_a/(4\pi\varepsilon_0))((1/a-1/b)+(\rho_{C2}/\rho_{C1})(1/b-1/c))$, da cui la soluzione]

d) Quanto vale, in condizioni stazionarie, l'intensità di corrente I erogata dal generatore? [Notate che il sistema, per la presenza dei materiali deblmente conduttori, ammette passaggio di corrente in condizioni stazionarie!]

I = ……………………………. = ………… A $Q_a 4\pi a^2/(4\pi\varepsilon_0\rho_{c1}a^2)=Q_a/(\varepsilon_0\rho_{C1})$ = 0.62 A [come già discusso in precedenza, a causa della simmetria del problema si ha semplicemente $I = Aj$, con A superficie sferica su cui si calcola il flusso. Poiché la corrente non cambia all'interno del sistema (essa è continua all'interfaccia e omogenea all'interno dei due materiali), possiamo scegliere tale superficie come vogliamo. Conviene prendere la superficie sferica che ha raggio infinitesimamente superiore a a , dove $j = E_1(r=a)/\rho_{C1} = Q_a/(4\pi\varepsilon_0\rho_{c1}a^2)$. Usando l'espressione di Q_a determinata sopra e ricordando che il raggio della sfera di raggio a (ovvero infinitesimamanete maggiore di a) è $4\pi a^2$ si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/6/2011 Firma: