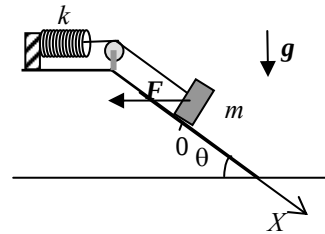


Nome e cognome:

Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un blocchetto **puntiforme** di massa $m = 5.0$ kg può scorrere su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il blocchetto è attaccato, tramite una corda inestensibile di massa trascurabile, a una molla di costante elastica $k = 49$ N/m il cui altro estremo è vincolato ad muretto fisso, rigido e indeformabile. La figura rappresenta schematicamente il sistema considerato (la piccola puleggia attorno a cui passa la corda ha massa trascurabile e **non** partecipa alla dinamica del sistema). Supponete trascurabile ogni forma di attrito. Per la soluzione del problema dovete usare il riferimento (asse X) indicato in figura: esso è diretto come il piano inclinato e orientato verso il basso. Inoltre, esso è centrato nella posizione che sarà identificata nel seguito dell'esercizio. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per l'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



- a) Inizialmente una forza esterna F di direzione orizzontale, verso come in figura e modulo incognito, è applicata al blocchetto. In queste condizioni il sistema è in **equilibrio** e la molla è alla propria **lunghezza di riposo**. Quanto vale il modulo F della forza esterna? [Notate che la lunghezza di riposo L_0 della molla non si conosce, ma è comunque diversa da zero]

$F = \dots \sim \dots$ N $mg \tan \theta \sim 28$ N [per l'equilibrio lungo il piano inclinato deve essere $mg \sin \theta = F \cos \theta$, da cui la soluzione; notate che, nelle condizioni specificate (molla a lunghezza di riposo), non ci sono altre forze attive lungo la direzione considerata]

- b) Supponete ora che la forza esterna F venga rimossa in modo istantaneo: come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del blocchetto in queste condizioni? **Dovete** usare il riferimento stabilito prima, centrandolo, cioè ponendo la sua origine, nella posizione di cui al punto precedente, quella in cui **la molla si trova alla propria lunghezza di riposo**. [Non usate valori numerici per questa risposta, ma limitatevi a scrivere una **funzione** della posizione generica x del blocchetto, nella quale compaiano i simboli letterali con cui si identificano le grandezze note del problema]

$a(x) = \dots$ $g \sin \theta - (k/m)x$ [sul blocchetto agiscono la componente “attiva” della forza peso, che fornisce un'accelerazione $g \sin \theta$ positiva, cioè diretta verso il basso, e la tensione della corda, che comparirà con un segno negativo essendo diretta verso l'alto (per $x > 0$, la molla si allunga rispetto alla lunghezza di riposo e quindi la tensione della corda tende a far “risalire” il blocchetto sul piano inclinato). La forza elastica è proporzionale alla elongazione (o compressione) della molla. Per la scelta dello zero dell'asse di riferimento, è evidente che l'elongazione (o compressione) è pari a x . Poiché la corda “trasferisce” la forza della molla sul blocchetto, si ha la soluzione]

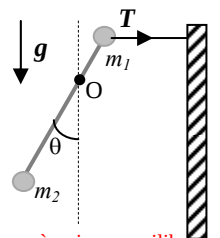
- c) In seguito alla rimozione della forza esterna F , si osserva che il blocchetto prende a scendere lungo il piano inclinato (immaginate che la sua lunghezza sia tale che il blocchetto non raggiunge la base del piano inclinato), finché a un certo istante si ferma. Quanto vale la distanza d che esso percorre sul piano inclinato prima di fermarsi?

$d = \dots = \dots$ m $2mg \sin \theta / k = 1.0$ m [viene dal bilancio energetico o conservazione dell'energia meccanica, che si ha per l'assenza di attriti: $0 = \Delta U_{ELA} + \Delta U_G = (k/2)d^2 - mgd \sin \theta$, dove abbiamo notato che $\Delta E_K = 0$ perché è fermo all'inizio e all'istante considerato. Lo stesso risultato si può ottenere in modo più complicato e “contoso” risolvendo l'equazione del moto. Infatti il moto del blocchetto è armonico e dà luogo a oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio $x_{EQ} = mg \sin \theta / k$ (si ottiene ponendo pari a zero l'accelerazione). La semiampiezza A delle oscillazioni, determinata dalle condizioni iniziali, vale in modulo $A = x_{EQ} - x_0 = x_{EQ}$, dove abbiamo notato che inizialmente il blocchetto si trova nella posizione $x_0 = 0$ (per come abbiamo costruito il riferimento!). L'arresto avverrà dunque nella posizione $x_{EQ} + A = 2x_{EQ}$, che conduce allo stesso risultato trovato con il bilancio energetico]

- d) Quanto vale l'accelerazione a del blocchetto quando questo si ferma (avendo percorso la distanza d)? [Indicate anche il segno rispetto al riferimento usato]

$a = \dots = \dots$ m/s² $g \sin \theta - (k/m)d = -g \sin \theta = -4.9$ m/s² [notate che il blocco **non** si ferma nella sua posizione di equilibrio, ma subito dopo essersi fermato risale verso l'alto, dato che il moto è armonico. Notate anche che questa accelerazione è opposta rispetto a quella che si ha all'inizio. Infatti posizione iniziale e finale corrispondono ai due estremi dell'oscillazione]

2. Un sistema è formato da un'asta rigida di **massa trascurabile** di lunghezza $L = 1.0$ m alle cui estremità si trovano due masse puntiformi $m_1 = m_2 = m = 0.50$ kg. Come mostrato in figura, questa sorta di manubrio è impennato in un punto (indicato con O in figura) che dista $L_1 = L/4$ rispetto all'estremo in cui si trova la massa m_1 ; esso può quindi ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio nella configurazione di figura (l'angolo vale $\theta = \theta_0 = \pi/6$) da una fune inestensibile attaccata per un capo alla massa m_1 e per l'altro capo ad una parete rigida verticale. [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) \sim 0.87$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]



- a) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune?

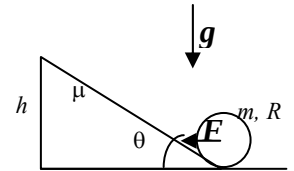
$T = \dots \sim \dots$ N $g(3m_2 - m_1) \sin \theta_0 / \cos \theta_0 = 2g \tan \theta_0 \sim 5.8$ N [il sistema è in equilibrio traslazionale e rotazionale (attorno al polo O). Per soddisfare quest'ultima condizione, occorre che sia nulla la somma vettoriale dei momenti delle forze esterne, che sono dovute alle sole forze peso che agiscono sulle masse. Tenendo conto in modo opportuno dei segni e dei bracci delle forze, deve essere $0 = TL_1 \cos \theta_0 + m_2 g(L - L_1) \sin \theta_0 - m_1 g L_1 \sin \theta_0$, da cui la soluzione. Notate che la stessa soluzione deve anche ottenersi considerando il sistema come un corpo rigido, individuandone il centro di massa (che è a metà della lunghezza dell'asta) e supponendo la forza peso complessiva applicata al centro di massa]

- b) Ad un certo istante la fune viene improvvisamente tagliata e il sistema si mette a ruotare: quanto vale la sua velocità angolare ω nell'istante in cui l'asta assume una direzione verticale? [Considerate trascurabile ogni forma di attrito]

$\omega = \dots \sim \dots$ rad/s $(8g(1 - \cos \theta_0)/(5L))^{1/2} \sim 1.4$ rad/s [poiché sul sistema non agiscono forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Trattando il sistema delle due masse come un corpo rigido, si ha subito che il momento di inerzia (rispetto al polo considerato) vale $I = m_1 L_1^2 + m_2 (L - L_1)^2 = 5mL^2/8$. Si ha quindi $\Delta E_K = I \omega^2 / 2 = 5mL^2 \omega^2 / 16$. La variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta al fatto che la massa m_1 “si alza” di un tratto $|L_1(1 - \cos \theta_0)|$ mentre la massa m_2 “si abbassa” di un tratto $|(L - L_1)(1 - \cos \theta_0)|$. Tenendo

conto dei segni in modo opportuno si ottiene $\Delta U_G = m_1 g L_1 (1 - \cos \theta_0) - m_2 g (L - L_1) (1 - \cos \theta_0) = m g (1 - \cos \theta_0) (2L_1 - L)$, da cui la soluzione. Anche in questo caso notate che lo stesso risultato si ottiene considerando la variazione di quota del centro di massa (e la massa complessiva del sistema)]

3. Un cerchione di bicicletta di massa $m = 1.0$ kg e raggio $R = 20$ cm si trova a salire lungo un piano inclinato (fisso ed indeformabile), che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, a causa di una forza **costante ed uniforme** di modulo $F = 20$ N e direzione orizzontale, applicata al suo asse come rappresentato schematicamente in figura. Il piano inclinato è **scabro** e presenta un coefficiente di attrito statico $\mu = 0.80$; si osserva che il moto del cerchione è di **rotolamento puro**, cioè la sua superficie non slitta sul piano. Tutte le altre possibili forme di attrito sono trascurabili. [Per la soluzione, modellate il cerchione come un anello molto sottile dotato di raggi di massa trascurabile (tutta la massa m si trova alla stessa distanza R rispetto all'asse di rotazione). Nella risposta numerica usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) \sim 0.87$]

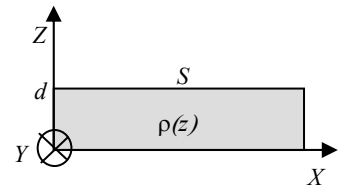


- a) Quanto vale, in modulo, la forza di attrito statico F_A che permette il rotolamento puro nelle condizioni del problema? Sulla base della descrizione del problema e dei valori numerici forniti, la situazione considerata è fisicamente possibile? Discutete!

$F_A = \dots \sim \dots$ N ($F \cos \theta - m g \sin \theta$)/2 ~ 6.2 N [considerando la direzione del moto, che è quella del piano inclinato, e prendendo il verso positivo puntato verso l'alto del piano, l'equazione del moto del centro di massa si scrive: $a_{CM} = (F/m) \cos \theta - g \sin \theta - (F_A/m)$, dove si sono debitamente proiettate le forze peso ed F e si è tenuto conto che la forza di attrito statico si oppone al moto (incipiente) di strisciamento del cerchione. L'equazione del moto rotazionale del cerchione attorno al suo asse si scrive $\alpha = F_A R / I$, dove si è tenuto conto del fatto che l'unica forza a produrre momento è la forza di attrito (statico, non essendoci strisciamento) che ha un braccio pari al raggio R del cerchione. D'altra parte nel rotolamento puro esiste una relazione (geometrica, cioè dovuta all'assenza di strisciamento) tra accelerazione del centro (di massa) del cerchione ed accelerazione angolare: $a_{CM} = \alpha R$. Si ottiene quindi un sistema di tre equazioni e tre incognite che, risolto per F_A , fornisce la soluzione. Notate inoltre che il momento di inerzia del cerchione, modellato secondo il suggerimento del testo, è $I = m R^2$]

Discussione: $\dots$ affinché la situazione considerata sia fisicamente possibile è necessario valutare se il coefficiente di attrito statico fornito nel testo è sufficientemente grande da produrre la forza di attrito considerata in precedenza. Si sa infatti che $F_{A,MAX} = \mu N$, dove N è il modulo della reazione vincolare esercitata dal piano sul cerchione. Per la geometria del problema, si ha $N = m g \cos \theta + F \sin \theta \sim 19$ N. Sostituendo i valori numerici del problema si vede che $F_{A,MAX} > F_A$ per cui la situazione considerata è fisicamente possibile

4. Una lastra di materiale non conduttore è “appoggiata” sul piano XY di un sistema di riferimento, come rappresentato in figura. La lastra è molto più “larga” di quanto non sia “alta”, in modo da poter trascurare gli “effetti ai bordi”: infatti la sezione di base vale $S = 1.0 \times 10^3$ cm², mentre lo spessore vale $d = 1.0$ cm. La lastra porta una distribuzione di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla quota z secondo la legge $\rho(z) = \rho_0 z^2 / d^2$, con $\rho_0 = 3.0 \times 10^{-5}$ C/m³. Si sa che il campo elettrico è nullo per $z \leq 0$.



Disegno non in scala!

- a) Quanto vale la carica Q portata dalla lastra al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria piana del problema!]

$Q = \dots = \dots$ C $\int_{\text{lastra}} dq = \int_{\text{lastra}} \rho(z) dV = (\rho_0 S / d^2) \int_0^d z^2 dz = (\rho_0 S / d^2) d^3 / 3 = \rho_0 S d / 3 = 1.0 \times 10^{-8}$ C [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria piana considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = S dz$, che corrisponde a suddividere la lastra in tante “lamine” sovrapposte]

- b) Quanto vale la differenza di potenziale ΔV tra faccia “superiore” e faccia “inferiore” della lastra (cioè tra i punti $z = d$ e $z = 0$)? [Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica nella lastra]

$\Delta V = \dots = \dots$ V $-\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d E(z) dz = -\int_0^d (\rho_0 / (3d^2 \epsilon_0)) z^3 dz = -\rho_0 d^2 / (12 \epsilon_0) = -28$ V [il campo interno alla lastra si determina in funzione di z usando Gauss su una superficie chiusa costituita da una lastra ideale di sezione S con una faccia in $z = 0$ (dove il campo è nullo!) e l'altra alla quota z generica. Sapendo che il campo è diretto lungo z e dipende solo da z (si trascurano gli “effetti ai bordi”), si ha allora $\Phi_{S, \text{chiusa}}(\mathbf{E}) = SE(z) = Q_{INT}(z) / \epsilon_0$. La carica interna alla superficie di Gauss in questione si trova integrando nel volume secondo quanto stabilito nella risposta alla domanda precedente]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/1/2012

Firma: