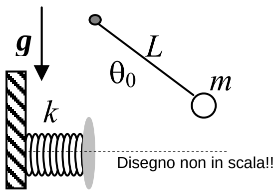
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 10/07

1. Una massa puntiforme m = 10 Kg è legata ad una corda inestensibile di lunghezza L = 9.8 m fissata ad un piolo infisso su un piano verticale. Inizialmente la massa si trova ferma in una posizione tale che la corda forma con la verticale un angolo θ_0 = 60 gradi. [Trascurate ogni forma di attrito nel moto della massa]

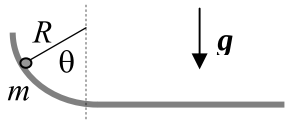


   a) Ad un dato istante la massa viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla (il suo movimento avviene, ovviamente, su un tratto di circonferenza di raggio L, essendoci il vincolo della corda). Quanto vale il lavoro L_C compiuto dalla corda sulla massa? [Considerate come posizione finale della massa quella per cui la corda è diretta lungo la verticale]
   L_C = …………………………………… = ... J 0 [la forza esercitata dalla corda è sempre ortogonale allo spostamento della massa!]

   b) Quanto vale in modulo la velocità v della massa quando questa passa per la verticale?
   v = …………………………………… = ... m/s $(2gL(1-\cos\theta_0))^{1/2}$ = 9.8 m/s [viene dal bilancio energetico, ovvero dal teorema dell'energia cinetica, $\Delta E_K = (m/2)v^2 = L_P = mgL(1-\cos\theta_0)$, come si evince dalla geometria]

   c) Se, come in figura, una molla di costante elastica $k = 1.0\times10^3$ N/m è disposta orizzontalmente in modo tale che la massa colpisca un suo estremo quando si trova in posizione "verticale", quanto vale la compressione massima Δx subita dalla molla? [L'altro estremo della molla è vincolato ad una parete rigida; supponete che l'intero movimento della molla nella sua compressione avvenga in direzione orizzontale e che il diametro della molla sia trascurabile]
   Δx = …………………………………… = ... m $(2mgL(1-\cos\theta_0)/k)^{1/2}$ = 0.98 m
   [viene dal bilancio energetico, notando che alla massima compressione la massa è ferma. Si ha allora: $\Delta E_K = -(m/2)v^2 = L_{ELA} = -(k/2)\Delta x^2$, da cui la soluzione ricordando anche quanto stabilito nella soluzione del punto precedente]

2. Una massa m = 2.0 Kg si muove su un percorso che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 1.0 m ed è disposta su un piano verticale come in figura. L'arco di circonferenza è seguito da un tratto piano orizzontale. Inizialmente la massa si trova ferma sul punto più alto dell'arco e quindi viene lasciata muoversi con velocità iniziale nulla. Il tratto piano presenta un coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.50. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Supponendo che l'arco presenti un attrito trascurabile, quanto vale da distanza d che la massa percorre sul tratto orizzontale prima di fermarsi?
   d = …………………………………… = ……… m R/μ_D = 2.0 m [si ottiene dal bilancio energetico : il lavoro della forza di attrito, $L_A = -mg\mu_D d$, è uguale alla variazione di energia meccanica, che, essendo la massa ferma sia all'inizio che alla fine, vale $\Delta U_G = -mgR$]

   b) Ora considerate, invece, il caso in cui l'arco di circonferenza presenti anch'esso attrito, con lo stesso coefficiente μ_D = 0.50. Quanto vale il lavoro L compiuto dalla forza di attrito quando la massa si sposta dal punto più alto al punto più basso dell'arco? [Suggerimenti: parametrizzate la posizione della massa sull'arco usando l'angolo θ indicato in figura; esprimete la forza di attrito in funzione di questo angolo, individuate la direzione dello spostamento, e ricordate **bene** l'espressione del lavoro di forze disomogenee; può farvi comodo rammentare che $\int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta$]
   L = …………………………………… = ……… J $\int_{spost} \mathbf{F_A} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{spost} mg\cos\theta\, \mu_D ds = -\int_{spost} mg\cos\theta\, \mu_D ds = -mg\mu_D \int_{-\pi/2}^{0} \cos\theta\, R\, d\theta = -mg\mu_D R \sin(\pi/2) = -mg\mu_D R$ = - 9.8 J [si è scritto lo spostamento infinitesimo sull'arco $ds = R\, d\theta$! Occhio ai segni e agli estremi di integrazione : il lavoro deve essere negativo !]

   c) Quanto vale la distanza d' percorsa sul piano orizzontale in queste condizioni (cioè in presenza di attrito anche lungo l'arco)?
   d' = …………………………………… = ……… m $R/\mu_D - R$ = 1.0 m [come per il punto a), ma stavolta occorre considerare anche il lavoro L' : $-mg\mu_D d' + L' = -mgR$, da cui : $mg\mu_D d' = mgR - mg\mu_D R$]

3. Un semplice modello "classico" per l'atomo di idrogeno prevede che esso sia composto da un elettrone, di carica $q = -e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $m = 9.0\text{x}10^{-31}$ kg, che ruota con velocità uniforme e costante attorno ad un protone dotato di carica $Q = e = 1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $M = 1.6\text{x}10^{-27}$ kg.

   a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale $R = a_0 = 5.0\text{x}10^{-11}$ m, quanto vale l'**energia cinetica** E_{K0} dell'elettrone? [Trascurate ogni effetto dovuto alla gravità, ed usate il valore $\kappa = 9.0\text{x}10^{9}$ Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica]

   E_{K0} = ……………………………. = ... J $(m/2)v^2 = (m/2)\kappa e^2/(\mu R) \sim \kappa e^2/(2a_0) = 2.3\text{x}10^{-18}$ J [la forza elettrica, di modulo $F_e = \kappa e^2/R^2$, è la causa fisica che fornisce l'accelerazione centripeta, $a_C = v^2/R$, all'elettrone in rotazione uniforme. Notate che nel sistema di due elementi che si sta considerando l'accelerazione centripeta deve essere considerata come accelerazione **relativa** dell'elettrone rispetto al protone (che non è specificato sia fisso nello spazio!), cioè deve essere $F_e = \mu a_C$, con μ **massa ridotta** del sistema, che vale $1/\mu = 1/m + 1/M$. Tuttavia, a causa della grande differenza di massa tra protone ed elettrone, si ha $1/\mu \sim 1/m$, da cui la soluzione]

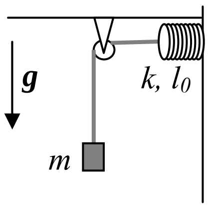
   b) A causa di una perturbazione esterna (che non specifichiamo!), il raggio dell'orbita diventa $R' = 2a_0 = 1.0\text{x}10^{-10}$ m. Quanto vale il lavoro L_E compiuto dalle forze di natura elettrica nel corso del processo? [Può farvi comodo ricordare la seguente regolina di integrazione indefinita per una variabile ξ generica ($n \neq -1$): $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]

   L_E = ……………………………. = ... J $\int_R^{R'} \kappa(-e^2)/r^2 \, dr = \kappa e^2[1/r]_R^{R'} = \kappa (e^2/a_0)(1/2-1) = -\kappa e^2/(2a_0) = -E_{K0} = -2.3\text{x}10^{-18}$ J   [dalla definizione di lavoro per una forza (conservativa) non uniforme!]

   c) Quanto vale la variazione di **energia totale** ΔE nel processo di cui alla domanda precedente?

   ΔE = ……………………………. = ... J $-L_E + \Delta E_K = E_{K0} + E_K' - E_{K0} = E_K' = \kappa (e^2/4a_0) = E_{K0}/2 = 1.1\text{x}10^{-18}$ J   [si ottiene sommando le variazioni di energia cinetica ed elettrica: $\Delta E = \Delta E_K + \Delta U_E = \Delta E_K - L_E$; il valore dell'energia cinetica E_K' per l'orbita con raggio R' si calcola facilmente in analogia con quanto visto alla risposta alla domanda a), utilizzando sempre l'approssimazione $\mu \sim m$]

4. Una massa $m = 4.9\text{x}10^{-1}$ kg è attaccata all'estremità di una fune inestensibile di massa trascurabile che passa attorno ad una puleggia di **raggio e massa trascurabili**, che può ruotare **senza attrito** attorno al suo asse, il quale è imperniato su un supporto vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. L'altro capo della corda è attaccato ad una molla, di massa trascurabile e costante elastica $k = 49$ N/m, il cui altro estremo è vincolato ad una parete rigida indeformabile; l'asse della molla è in direzione orizzontale, così come il tratto della fune che collega la molla con la puleggia. La figura rappresenta schematicamente il problema. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Quanto vale l'elongazione Δ_0 della molla in condizioni di equilibrio?

   Δ_0 = …………………………………= ……… m $mg/k = 9.8\text{x}10^{-2}$ m   [la tensione della fune vale, in modulo e in condizioni di equilibrio, $T = mg$. Questa tensione deve essere equilibrata dalla forza elastica della molla, $|F_e| = k\Delta_0$, da cui la soluzione]

   b) Immaginate ora di prendere in mano la massa ed abbassarne la quota di un tratto $\Delta z = -9.8$ cm a partire dalla posizione di equilbrio sopra determinata (il segno negativo si riferisce ad un asse Z diretto verticalmente verso l'alto). All'istante $t_0 = 0$ lasciate andare la massa con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v con cui la massa ripassa per la posizione di equilibrio?

   v' = …………………………………....~ .... m/s $(2g\Delta z-(k/m)(\Delta_0^2-(\Delta_0-\Delta z)^2))^{1/2} \sim 0.98$ m/s   [per la conservazione dell'energia meccanica, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} + \Delta U_G = (m/2)v'^2 - mg\Delta z + (k/2)\Delta_0^2 - (k/2)\Delta_M^2$, dove $\Delta_M = \Delta_0 - \Delta z$ (infatti è l'elongazione della molla, a causa dell'inestensibilità della fune, è stata aumentata inizialmente di un valore pari a $\underline{\Delta z}$ – fate attenzione ai segni : il segno negativo è necessario per tenere conto dell'orientazione del sistema di riferimento indicata nel testo]

   c) In quale istante t la massa ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio?

   t = ……………………………………. ~ .... s $\pi/(2\omega) = \pi/(2(k/m)^{1/2}) \sim 1.5\text{x}10^{-1}$ s   [il moto è armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$; il periodo vale $T = 2\pi/\omega$ e la massa ripassa per la posizione di equilibrio (per la prima volta) dopo $T/2$]