ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 15/07

1. Avete tre masse puntiformi, m_1 = 1.25 Kg, m_2 = 750 g, m_3 = 250 g, che si trovano nelle seguenti posizioni spaziali (espresse vettorialmente e riferite ad un dato sistema cartesiano): $\mathbf{r_1}$ = (- 20, 40, - 40) cm; $\mathbf{r_2}$ = (20, 0, -40) cm; $\mathbf{r_3}$ = (40, 20, 0) cm.
   a) Qual è, vettorialmente, la posizione del centro di massa $\mathbf{r_{CM}}$?
   $\mathbf{r_{CM}}$ = (……….,…….,……..) m $\Sigma_i m_i \mathbf{r_i} / (\Sigma_i m_i)$ = (0, 0.24, - 0.35) m

   b) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = ………………………………... = …….. kg m^2 $\Sigma_i m_i \rho_i^2$ = 0.33 Kg m^2 , dove ρ_i è la distanza **geometrica** tra le masse e l'asse di rotazione, cioè calcolata considerando le sole componenti sul piano XY ortogonale all'asse Z

   c) Quanto vale il **momento di inerzia** I' per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per la massa** m_1?
   I' = ………………………………... = …….. kg m^2 $\Sigma_i m_i \rho_i^2$ = 0.34 Kg m^2 , dove ρ_i è la distanza **geometrica** tra le masse (solo le masse m_2 ed m_3!) e l'asse di rotazione

2. Avete una barretta sottile di materiale disomogeneo, di sezione S , lunghezza totale l e densità di massa $\rho(x)$ che varia lungo l'asse secondo la legge $\rho(x) = \alpha x^2$, dove x è la distanza da un estremo e α è una costante opportunamente dimensionata in modo che $\rho(x)$ si misuri in kg/m^3 (α si deve evidentemente misurare in kg/m^5).
   a) Tenendo conto che la densità dipende **solo** da x, come potete esprimere una **densità lineare di massa** $\lambda(x)$, con dimensioni di una massa per unità di lunghezza (kg/m)?
   $\lambda(x)$ = ……………………….. $\rho(x) S = (\alpha S) x^2$ [notate che questo passaggio, cioè la definizione di una densità lineare di massa, è utilissimo per rendere il problema praticamente unidimensionale, come vedremo in seguito]

   b) Quanto vale la massa m della barretta?
   m = ……………………….. $\int\lambda(x)\,dx = (\alpha S) \int x^2\,dx = (\alpha S)(l^3/3)$ [ricordate che la "primitiva" di x^n è $x^{n+1}/(n + 1)$, e che l'integrale va esteso tra 0 e l]

   c) Qual è la coordinata x_{CM} del centro di massa? (Supponete di disporre la barretta lungo l'asse X di un sistema di riferimento cartesiano, con la sua origine coincidente con l'origine del sistema)
   x_{CM} = ……………………….. $(\int\lambda(x)\,x\,dx)/m = (\alpha S/m) \int x^3\,dx = (\alpha S/m)(l^4/4) = (3/4)\,l$

   d) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = ………………………….. $\int\lambda(x)\,x^2\,dx = (\alpha S) \int x^4\,dx = (\alpha S)(l^5/5)$

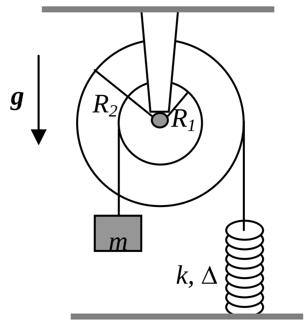
   e) Quanto vale il **momento di inerzia** I_{CM} per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per il centro di massa**?
   I_{CM} = ………………………….. $\int\lambda(x)(x - x_{CM})^2\,dx = \int\lambda(x)(x - x_{CM})^2\,dx = (\alpha S)\{\int x^2 (x - 3\,l/4)^2\,dx\} = (\alpha S)\{\int x^2 (x^2 - 3\,l\,x/2 + 9\,l^2/16)\,dx\} = (\alpha S)\{\int x^4\,dx - (3\,l/2)\int x^3\,dx + (9\,l^2/16)\int x^2\,dx\} = I - (3\,l/2)\,m\,x_{CM} + (9\,l^2/16)\,m = I + m(-(9\,l^2/8) + (9\,l^2/16)) = I - (9/16) m\,l^2$

   f) Provate a "generalizzare" il risultato precedente, cioè a trovare un legame tra I ed I_{CM} che coinvolga la massa del corpo, m, e la distanza D tra l'asse a cui si riferisce il momento di inerzia I e il centro di massa:
   I = ………………………….. $I_{CM} + m D^2$, dove D nel nostro caso (per la nostra scelta del sistema di riferimento), coincide con x_{CM}; talvolta si dà il nome di teorema di Huygens-Steiner, o "degli assi paralleli", ad una relazione simile a quella trovata

3. L'elica di un ventilatore può essere schematizzata come un'asta sottile omogenea, di massa m = 120 g, e lunghezza l = 20 cm, che ruota su un piano orizzontale attorno ad un perno che passa per il suo punto medio..
   a) Quanto vale il momento di inerzia I dell'elica? [Suggerimento: può farvi comodo ricordare che il momento di inerzia per un'asta sottile che ruota attorno ad un perno passante per un suo estremo è $I' = ml^2/3$, da cui, applicando il "teorema degli assi paralleli"…]
   I = ……………………………….. = …….. kg m^2 $I' - m(l/2)^2 = m\, l^2{}_1/12$ = 4.0x10^{-4} kg m^2

   b) Supponendo che l'elica sia messa in rotazione **senza attriti** da un motore di potenza costante W e sapendo che, dopo essere partita da ferma, essa raggiunge una velocità angolare ω = 20 rad/s in un intervallo di tempo Δt = 10 s, quanto vale W?
   W = ……………………………….. = …….. W $I\,\omega^2 / (2\,\Delta t)$ = 8x10^{-3} W [il lavoro del motore, che vale $W\Delta t$, viene convertito in energia cinetica, che vale $I\omega^2/2$]

4. Due dischi omogenei di identico spessore e raggio diverso, R_1 ed $R_2 = 2R_1$, sono montati faccia a faccia, concentrici e solidali l'un l'altro. Due corde inestensibili e di massa trascurabile sono avvolte attorno alle superfici laterali dei due dischi, e le condizioni sono tali che queste corde non slittano sulle superfici laterali quando il sistema costituito dai due dischi ruota, **senza attrito**, attorno ad un perno passante per l'asse dei due dischi. L'intero sistema dei due dischi è appeso ad un solaio indeformabile, come rappresentato in figura dove si dà una vista frontale del tutto (è la situazione tipica di una "carrucola a doppio raggio"). La corda avvolta attorno al disco di raggio R_1 termina con una massa puntiforme m, mentre la corda avvolta al disco di raggio R_2 è attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k vincolata al pavimento (vedi figura). [Il problema non ha valori numerici, e quindi dovete dare le risposte in funzione dei parametri letterali noti]



   a) Sapendo che il disco di raggio R_1 ha momento di inerzia I_1 e supponendo che i dischi siano **omogenei** e fatti **dello stesso materiale**, quanto vale I_2? [Considerate momenti di inerzia per rotazioni rispetto all'asse dei dischi, ricordate che, dal testo del problema, $R_2 = 2R_1$, e notate che la densità di massa è la stessa nei due casi]
   I_2 = …………………………………… $I_1\, R_2^4/R_1^4 = 16\, I_1$ [detta ρ la densità, incognita, e scegliendo al solito l'elemento di volume d$V = 2\pi h r$dr, con h spessore del disco (lo stesso per i due dischi), si ha, per un disco di raggio R generico, $I = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi h\rho R^4/4$, da cui la risposta]

   b) Quanto vale all'equilibrio l'allungamento Δ della molla?
   Δ = …………………………………… $mgR_1/(kR_2) = mg/(2k)$ [per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse dei dischi, dovute alla forza peso mg e alla forza elastica $k\Delta$]

   c) Immaginate ora di prendere in mano il corpo puntiforme, e di spostarlo dalla sua posizione di equilibrio verso il basso per un tratto $L=2\Delta$ per poi lasciarlo andare con **velocità iniziale nulla**; esso, come vi suggerisce il buon senso, si sposterà verso l'alto. Quanto vale la velocità angolare ω dei dischi quando il corpo ripassa per la posizione di equilibrio (quella determinata al punto precedente)? [Ricordate che il moto avviene con attriti trascurabili!]
   ω = …………………………………… $((2mgL+k((\Delta+L)^2-\Delta^2))/(mR_1^2+I_1+I_2))^{1/2} = (4mg\Delta + 8k\Delta^2) / (mR_1^2+17I_1) = 4(mg)^2/(k(mR_1^2+17I_1))$ [per la conservazione dell'energia meccanica, somma della cinetica della massa e dei dischi, gravitazionale della massa ed elastica della molla: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = (m/2)v^2+(I_1/2)\omega^2 +(I_2/2)\omega^2 - mgL - (k/2)((\Delta+L)^2-\Delta^2)$; notate che, nell'espressione precedente, v indica la velocità del corpo puntiforme quando passa per l'equilibrio, che, poiché la corda non slitta, vale $v = \omega R_1$]