ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 18/07

1. Un'asta di massa M = 10.0 kg, lunghezza L = 3.00 m e sezione di area A = 10.0 cm^2, è realizzata con un materiale disomogeneo.

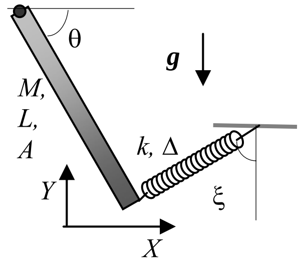
a. Sapendo che, detta x la distanza da un estremo dell'asta, la densità di massa varia in funzione di x secondo la legge $\rho(x) = \rho_0\, x^2/L^2$, quanto vale il coefficiente ρ_0?

ρ_0 = ... = ... kg/m^3 $ML^2/(S\ \int_0^L x^2 \mathrm{d}x) = 3M/(SL) =$ 1.00x10^4 kg/m^3 [per definizione di densità di massa, deve essere $M = \int_{VOL} \rho(x)\, \mathrm{d}V = \int_0^L \rho(x)\, S\mathrm{d}x = \int_0^L \rho_0 x^2\ (S/L^2)\ \mathrm{d}x = \rho_0 (S/L^2) \int_0^L x^2\ \mathrm{d}x = \rho_0\ SL/3$, dove l'elemento di volume è stato scritto come $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ coerentemente con la geometria lineare del sistema]

b. A quale distanza x_{CM} misurata rispetto all'estremo x = 0 dell'asta si trova il suo centro di massa?

x_{CM} = ... = ... m $(\int_0^L x\ \rho(x)\ S\ \mathrm{d}x)/M = \rho_0\ S\ L^2/(4M) = (3M/(SL))(\ S\, L^2/(4M)\ ) = 3L/4 =$ 2.25 m

c. Supponete ora che questa asta possa ruotare **senza attrito** su un piano verticale e attorno ad un perno passante per il suo estremo x = 0. Supponete anche che all'altro estremo dell'asta sia attaccata una molla, di massa trascurabile e costante elastica k = 30.0 N/m e che l'altro estremo della molla sia vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. La figura rappresenta la situazione di equilibrio, che si verifica quando la molla è diretta **ortogonalmente** all'asta, mentre l'asta forma un angolo θ = 60 gradi rispetto all'orizzontale. Quanto vale l'allungamento Δ della molla in queste condizioni? [Usate il valore numerico g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Δ = ... = ... m $Mg\ x_{CM}\cos\theta\ /\ (kL) = 3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k) =$ 2.45 m [viene dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto al perno di rotazione, notando che le forze che danno un momento non nullo sono la forza peso Mg, applicata al baricentro e quindi con un braccio $x_{CM}\cos\theta$ rispetto al perno, e la forza elastica, di modulo $k\Delta$ e braccio L , essendo diretta ortogonalmente all'asta]

d. Quanto valgono, in queste condizioni di equilibrio, le componenti "orizzontali" e "verticali", rispettivamente N_X ed N_Y, della reazione vincolare esercitata dal perno sull'asta? [Usate il sistema di riferimento XY indicato in figura e state attenti a esprimere bene le componenti delle forze!]

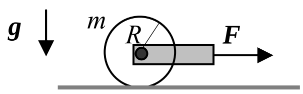
N_X = ... ~ .... N $-k\Delta\sin\xi = -k\Delta\sin\theta = -\,k\sin\theta\ \ (3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k)) = -\ 3Mg\ \sin\theta\cos\theta\ /\ 4 \sim$ - 31.8 N

N_Y = ... ~ .... N $Mg\ -\ k\Delta\cos\xi = Mg\ -\ k\Delta\cos\theta = Mg\ -\ k\cos\theta\ (3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k)) = Mg(1\ -\ 3\cos^2\theta\ /\ 4) \sim$ 42.9 N [si ottiene dall'equilibrio delle forze agenti sull'asta; per le proiezioni della forza elastica $k\Delta$ lungo le direzioni X ed Y, può fare comodo riferirsi all'angolo ξ di figura e notare che, per la geometria, si ha $\xi = \theta$]

e. Supponete ora che, ad un dato istante, la molla si spezzi **istantaneamente**: l'asta non è più in equilibrio e comincia a ruotare attorno al perno. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **lineare** a (cioè riferita al moto di traslazione, per intenderci quella che si misura in m/s^2) che possiede l'estremo $x = L$ dell'asta subito all'inizio del suo moto?

a = ... ~ .... m/s^2 $\alpha\, L = \tau L/I = Mgx_{CM}\cos\theta L/I = Mg(3L/4)\cos\theta L/(S\rho_0 L^3/5) = 15\ MgL^2\cos\theta\ /\ (12ML^2) = (5/4)g\cos\theta = (5/8)g =$ 6.12 m/s^2 [infatti il moto **di rotazione** dell'asta ha luogo a causa del momento della forza peso, $\tau = Mgx_{CM}\cos\theta$, che non è più bilanciato dalla momento della forza della molla. L'equazione cardinale per le rotazioni dice che $\tau = I\ \alpha$, dove il momento di inerzia (vedi sopra per il calcolo dell'integrale) vale $I = \int \rho_0\ (S/L^2)\ x^2\ x^2\ \mathrm{d}x = \rho_0\ S\ L^3/5$ = ; da qui, tenendo anche conto della risposta al punto a), si ricava il valore di $\alpha = (5/4)g\cos\theta/L$. D'altra parte la geometria del sistema indica che l'accelerazione **lineare** dell'estremo dell'asta è $a = \alpha L$, da cui il risultato]

2. Un cilindro omogeneo di massa m = 10 kg e raggio R = 10 cm è poggiato su un piano orizzontale scabro, caratterizzato da un certo coefficiente di attrito statico μ_S. Il cilindro rotola **senza attrito** attorno ad un mozzo passante per il suo asse geometrico, che è collegato rigidamente ad un giogo (vedi figura); mozzo e giogo



hanno massa trascurabile. Il cilindro è inizialmente fermo e, all'istante $t_0 = 0$, viene applicata al giogo una forza $F = 30$ N costante e diretta orizzontalmente.

a) Supponendo che il cilindro, sotto l'azione della forza, si muova di moto di **rotolamento puro** (cioè che la sua superficie laterale non strisci sul piano di contatto), quanto vale l'accelerazione a del suo centro di massa? [Fate attenzione a considerare *tutte* le forze che agiscono sul sistema, incluse quelle che provocano la rotazione del cilindro! Se non avete voglia di ricalcolarvelo, ricordate che il momento di inerzia per un cilindro omogeneo di massa m e raggio R in rotazione attorno al suo asse è $I = mR^2/2$]

a = ……………………………………… = ... m/s^2 $F/(m+I/R^2) = (2/3)\ F/m = 2.0$ m/s^2 [si ottiene considerando che c'è una forza di attrito **statico** F_A al punto di contatto tra generatrice del cilindro e piano orizzontale; questa forza, che si oppone al moto incipiente di strisciamento, produce un momento delle forze $F_A R$ rispetto al polo di rotazione. Per la legge cardinale del moto di rotazione, si ha $I\alpha = F_A R$. Per la condizione di rotolamento puro, deve essere $\alpha = a/R$, per cui l'equazione del moto traslazionale per il centro di massa si scrive: $ma = F - F_A = F - Ia/R^2$, da cui, risolvendo, esce la soluzione]

b) Quanto vale la velocità angolare di rotazione ω del cilindro all'istante $t_1 = 10$ s?

ω = ……………………………………… = ... rad/s $a\ t_1 / R = (2/3)Ft_1/(mR) = 2.0\text{x}10^2$ rad/s [per ovvia conseguenza di quanto derivato nella soluzione al punto precedente]

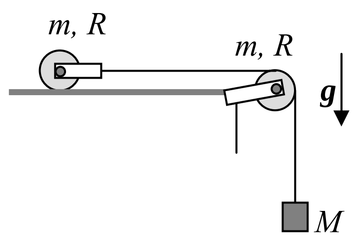
c) Quanto vale il lavoro L compiuto dalla forza F dall'istante iniziale all'istante t_1? [Suggerimento: cercate di ragionare in termini di bilancio energetico ...]

L = ……………………………………… = ... J $(m/2)v^2 + (I/2)\omega^2 = (m/2)(\omega R)^2 + (mR^2/4)\ \omega^2 = (3/4)(mR^2)\ \omega^2 = 3.0\text{x}10^3$ J [per il bilancio energetico, $L = \Delta E_K$; notate che, nell'espressione precedente, v indica la velocità del centro di massa all'istante t_1 , che, per il rotolamento puro, vale $v = \omega R$]

d) Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico μ_S affinché sia possibile il moto di rotolamento puro del cilindro nelle condizioni del problema considerato?

$\mu_S \geq$ ……………………………………… $I\alpha / (mgR) = Ia/(mgR^2) = 0.10$ [viene ricordando che il valore **massimo** della forza di attrito che agisce sulla generatrice del cilindro è $N\mu_S = mg\mu_S$]

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa $m = 5.0\text{x}10^{-1}$ kg e raggio $R = 10$ cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione (attorno al proprio asse) con attrito trascurabile; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare senza attrito attorno al proprio asse, la fune termina con una massa $M = 1.0$ kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune non slitta sulla gola della puleggia. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Inizialmente il rullo è tenuto fermo da una causa esterna che poi viene rimossa ed il rullo si mette quindi in movimento. Quanto vale la velocità v_{CM} che possiede il suo centro di massa dopo uno spostamento $\Delta s = 5.0$ m? [Si intende che si deve dare una risposta tenendo conto della condizione di rotolamento puro del rullo e del fatto che la fune non slitta sulla puleggia]

v_{CM} = ……………………………………… = ………… m/s $(Mg\Delta s/(m+M/2))^{1/2} = 7.0$ m/s [per il bilancio energetico, che, tenendo conto dell'inestensibilità della fune, del moto di rotolamento puro e del non slittamento fra fune e puleggia, si scrive: $Mg\Delta s = (m/2)v_{CM}^2 + (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 + (I/2)\omega^2 = v^2_{CM}(m/2+M/2+I) = v^2_{CM}(m/2+M/2+I/R^2) = v^2_{CM}(m/2+M/2+m/2)$, dove si è anche sfruttato che, per un cilindro omogeneo in rotazione attorno al suo asse, si ha $I = (m/2)R^2$]

b) Quanto vale la forza di attrito F_A che si esercita tra piano orizzontale e rullo in condirzioni di rotolamento puro?

F_A = ……………………………………… = ………… N $(mg/2)(M/(M+2m)) = 1.2$ N [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa M, nelle condizioni del problema si hanno le seguenti equazioni del moto: $ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_A R$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2 R - T_1 R$; $Ma = Mg - T_2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha = a/R = \alpha_{PULEGGIA}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt occorrente affinché il rullo compia lo spostamento Δs?

Δt =……………………………………… ~ ………… s $v_{CM}/a_{CM} = v_{CM}/(F_A R^2/I) = mv_{CM}/(2F_A) = (2\Delta s(M+2m)/(Mg))^{1/2} \sim 1.4$ s [il moto del centro di massa del rullo si svolge con accelerazione $a_{CM} = \alpha_{RULLO}R = F_A R^2/I = 2g((M/m)/(4+M/m))\ I$, dove abbiamo fatto uso della soluzione al quesito precedente. Questa accelerazione è costante ed uniforme, da cui la soluzione]