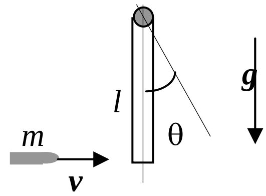
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 19/07

1. Un'asta omogenea di massa M = 1.0 kg e lunghezza l = 0.50 m è sospesa ad un perno collocato ad una sua estremità. L'asta può ruotare **senza attriti** attorno al perno, mantenendosi su un piano verticale. Un proiettile di massa m = 5.0 g e velocità (orizzontale) v = 200 m/s colpisce l'estremità dell'asta, come in figura, rimanendoci conficcato, quando l'asta stessa si trova **ferma** in posizione di equilibrio (cioè è disposta lungo un asse verticale, $\theta = 0$ – vedi figura).



   a) Quanto vale in modulo il momento angolare L_P del proiettile calcolato rispetto al perno di rotazione dell'asta nell'istante in cui il proiettile colpisce l'asta? [Suggerimento: ricordate la definizione di momento angolare rispetto ad un punto, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, con $\boldsymbol{r}$ vettore che congiunge il proiettile al perno di rotazione, e $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ quantità di moto del proiettile]
   L_P = ……………………………….. = …….. kg m^2/s mvl = 0.50 kg m^2/s

   b) Sfruttando la conservazione del momento angolare, dovuta all'assenza di momenti delle forze esterni al sistema proiettile+asta, e sapendo che il momento di inerzia dell'asta è in questo caso $I = Ml^2/3$, quanto vale la velocità angolare ω_0 con cui l'asta avvia la sua rotazione subito dopo l'urto? [Attenzione: il proiettile rimane conficcato nell'asta, e quindi anch'esso ha un suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, benché molto piccolo]
   ω_0 = ……………………………….. ~ …….. rad/s $L_P / (I + ml^2)$ ~ 5.9 rad/s

   c) L'asta comincia quindi a ruotare in senso antiorario, cioè l'angolo θ di figura tende ad aumentare. Quanto vale, in funzione di θ, il lavoro Λ fatto dalla forza peso che agisce sul centro di massa dell'asta? [Semplificazione: trascurate il lavoro della forza peso sul movimento del proiettile conficcato nell'asta – vi garantisco che l'approssimazione è ragionevole!]
   Λ = ………………………………..…….. $Mg(l/2)(1 - \cos\theta)$

   d) Quanto vale l'angolo massimo θ_{MAX} raggiunto dall'asta prima di arrestarsi?
   θ_{MAX} = ……………………………~ …….. gradi $\arccos(1 - (I + ml^2)\,\omega_0^2 / (\cancel{2}Mgl))$
   [uguagliando il lavoro della forza peso con l'energia cinetica iniziale dell'asta – se pensate di risolvere l'esercizio "alla rovescia", cioè a partire dalla misura di θ_{MAX}, vi potete rendere conto che questo sistema può servire per misurare indirettamente la velocità del proiettile]

2. Una pattinatrice artistica su ghiaccio, che ha massa m = 50 kg, fa una veloce piroetta in senso antiorario. Si trascuri l'attrito tra i pattini ed il ghiaccio.

   a) Nella configurazione iniziale, la pattinatrice tiene le braccia lungo il corpo ed il suo corpo può essere approssimato (con molta fantasia!) con un cilindro verticale **omogeneo**, di altezza h e raggio R = 0.2 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Quanto vale il momento di inerzia I della pattinatrice in queste condizioni?
   I = …………………………………... = ……… kg m^2 $m R^2 / 2$ = 1.0 kg m^2 [è un cilindro che ruota attorno al suo asse!]

   b) Sapendo che la pattinatrice compie f = 8.0 rotazioni al secondo, quanto valgono il modulo del suo momento angolare L e la sua energia cinetica E_K?
   L = …………………………………... ~ ……… kg m^2/s $I\omega = I\,2\pi f$ ~ 50 kg m^2/s
   E_K = …………………………………... ~ ……… J $I\omega^2/2 = I(2\pi f)^2/2$ ~ 1262 J

   c) Mentre sta ruotando, la pattinatrice allarga le braccia fino a disporle in direzione orizzontale. In questa nuova configurazione, essa può essere approssimata come un cilindro verticale omogeneo di massa m_C = 45 kg in rotazione, che rappresenta come prima il suo corpo; le braccia tese, in vece, possono essere rappresentate come un'asta **omogenea** orizzontale, di massa m_B = 5.0 kg e lunghezza d = 1.6 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo punto medio. A questo punto, quindi, il sistema (di massa complessiva m) è costituito da due elementi omogenei, il cilindro verticale e l'asta orizzontale, che ruotano solidali attorno allo stesso asse. Il momento di inerzia complessivo I' può essere quindi determinato sommando i momenti di inerzia del cilindro e dell'asta. Quanto vale I'?
   I' = …………………………………... ~ ……… kg m^2 $m_C R^2 / 2 + m_B d^2 / 12$ ~ 2.0 Kg m^2
   [ricordate l'espressione del momento di inerzia per un'asta che ruota attorno al suo punto medio!]

d) Considerando come istante iniziale del processo quello in cui la pattinatrice piroetta a braccia lungo il corpo e come istante finale quello in cui ha le braccia orizzontali, cosa si può affermare si conservi durante il processo?

X Il momento angolare L'energia cinetica Entrambe Nulla

Spiegazione sintetica della risposta: ………………………………………………… non agiscono momenti di forza esterni al "sistema" pattinatrice, e quindi il momento angolare si conserva

e) Quanto vale la frequenza di rotazione *f'* al termine del processo?

f' = …………………………………... ~ ……… rotazioni al secondo $f\ I\ /\ I'$ ~ 4.0 rot/s

[dalla conservazione del momento angolare!]

3. Un motore di potenza **costante** *W* mette in rotazione su un piano orizzontale un disco di momento di inerzia *I* e massa *m* inizialmente fermo (la rotazione avviene attorno all'asse del disco e ogni forma di attrito può essere **trascurata**). [Non avendo valori numerici, scrivete risposte in termini dei dati letterali del problema!]

a) Sapendo che il motore agisce per un intervallo di tempo Δt, quanto vale la velocità angolare ω raggiunta dal disco?

ω = …………………………………… $(2\ W\ \Delta t\ /I)^{1/2}$ [per il bilancio energetico, notando che il lavoro compiuto dal motore sul disco vale $W\Delta t$]

b) Dopo l'intervallo Δt il motore viene scollegato dall'asse del disco, che quindi rimane in moto **libero** di rotazione rispetto al suo asse. Dato che, come detto, gli attriti sono trascurabili, quanto vale in funzione del tempo *t* il momento angolare ***L****(t)* del disco? [Calcolatelo rispetto al centro del disco, indicatene modulo *L* e direzione, e state attenti ai trabocchetti!]

L(t) = …………………………………… $I\omega$ [è costante nel moto, dato che si deve conservare l'energia meccanica del disco!]

Direzione: …………………………………… lungo l'asse del disco (il verso dipende dal senso di rotazione, che non ho specificato]

c) Ad un dato istante, un corpo puntiforme di massa *m* cade dall'alto sul disco, colpendone un punto della sua circonferenza. In seguito all'urto, il corpo rimane conficcato nel disco, cioè l'urto è anelastico. Sapendo che subito prima dell'urto la velocità di caduta (verticale) del corpo puntiforme vale v_0 e che il raggio del disco è *R*, quanto vale la velocità angolare ω' del disco dopo l'urto? [Ovviamente si intende che il disco continua ad essere vincolato a ruotare attorno al suo asse e rispetto a questo asse dovete calcolare la velocità angolare; anche qui attenzione ai trabocchetti, e a ragionare bene in termini di conservazioni ...]

ω' = …………………………………… $L/(I+mR^2)$ [nell'urto si sviluppano forze interne, che danno un contributo nullo in termini di momenti delle forze; d'altra parte le sole forze esterne che possono agire sul disco passano per il suo asse, e pertanto hanno momento nullo rispetto al polo considerato. Quindi il momento angolare, in particolare la sua componente "verticale", dell'intero sistema deve conservarsi; poiché il moto del corpo prima dell'urto è verticale, il contributo a questa componente del momento angolare del sistema è nullo, e la componente verticale del momento angolare **del sistema** prima dell'urto è solo dovuta al disco, e vale *L*. Dopo l'urto il momento di inerzia **del sistema** diventa $I' = I+mR^2$ a causa della presenza della massa *m* sulla circonferenza. Il risultato esce allora dalla conservazione della componente verticale del momento angolare]