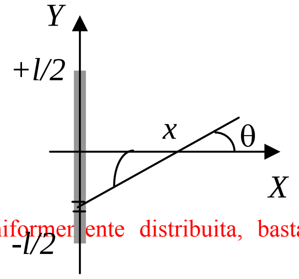
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 28/07



1. Un sottile bastoncino cilindrico, di lunghezza l e raggio R ($R<<l$), porta al suo interno una carica elettrica q **uniformemente distribuita**.
   a) Quanto vale la densità di carica **volumica** ρ del bastoncino? [Ricordate che, per definizione, λ è la carica Δq portata da un elemento di volume ΔV del cilindro]
   ρ = …………………………………….. $q/(\pi R^2 l)$ [essendo la carica uniformemente distribuita, basta dividere la carica totale per il volume del bastoncino]

   b) Quanto vale la densità di carica **lineare** λ del bastoncino? [Ricordate che, per definizione, λ è la carica Δq portata da un elemento di lunghezza Δl del cilindro, preso ovviamente lungo l'asse]
   λ = …………………………………….. q / l [notate che questo risultato si ottiene anche considerando la ρ determinata sopra e moltiplicandola per un volumetto $\Delta V = \pi R^2 \Delta l$, corrispondente ad un elementino di lunghezza Δl]

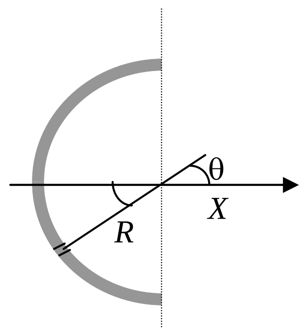
   c) Questa distribuzione di carica determina un campo elettrico $\boldsymbol{E}$. Considerando un punto che si trova sull'asse X del riferimento di figura (in cui il bastoncino è disposto lungo l'asse Y), a distanza x dall'asse del bastoncino, quanto valgono direzione e verso di $\boldsymbol{E}$? [Notate che l'asse X passa per il punto di mezzo del bastoncino, e dunque i punti che appartengono all'asse X sono dotati di "alta simmetria" rispetto al bastoncino, cioè alla distribuzione di carica]
   Direzione e verso (con spiegazione sintetica e aiutandovi con un disegnino): ……………………………………… la direzione è radiale per ragioni di simmetria: infatti ogni elementino del bastoncino posto "al di sopra" del punto medio genererà un contributo al campo le cui componenti non radiali saranno annullate, per sovrapposizione, dal contributo al campo dovuto all'elementino simmetrico; il verso dipende dal segno di q, essendo uscente se $q > 0$, entrante viceversa]

   d) Quanto vale in modulo il contributo infinitesimo dE al campo elettrico dovuto ad un elementino di bastoncino compreso tra le coordinate y ed y + dy? [Assimilate il bastoncino ad un segmento di lunghezza l, cioè esteso tra $-l/2$ e $+l/2$, ed usate la "relazione costitutiva" del campo elettrico, che dà il contributo dE al campo dovuto ad un elementino di lunghezza dy]
   dE = …………………………………….. $\kappa\,\lambda\, dy / (x^2 + y^2)$ con $\kappa = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, essendo $\lambda dy = dq$

   e) Quanto vale **la componente lungo l'asse X**, dE_X, del contributo infinitesimo al campo di cui sopra?
   dE_X = …………………………………….. $dE\cos\theta = dE\, x/(x^2 + y^2)^{1/2}$ [l'angolo θ è indicato in figura, e la trigonometria suggerisce il risultato riportato]

   f) Quanto vale in modulo il campo elettrico E generato dal bastoncino? [Esprimete solo l'espressione che sarebbe necessario calcolare; la soluzione, infatti, richiede un integrale un po' troppo ostico!]
   E = …………………………………….. $\int_{-l/2}^{l/2} \kappa\,\lambda\, x\, dy / (x^2 + y^2)^{3/2} = \kappa\,\lambda\, x \int_{-l/2}^{l/2} dy / (x^2 + y^2)^{3/2}$

   g) Supponete ora che il bastoncino sia piegato a formare una semicirconferenza di raggio $R = l/\pi$, come in figura. Quanto vale **la componente lungo l'asse X** , dE_X', del contributo infinitesimo al campo nel centro di curvatura della semicirconferenza? [Suggerimento: usate l'angolo θ generico indicato in figura]
   dE_X' = …………………………………….. $\kappa\,\lambda\, R\, d\theta \cos\theta / R^2$



   h) E quanto vale in questo caso il modulo del campo E' al centro di curvatura della semicirconferenza? [Stavolta potete eseguire il calcolo completo, dato che l'integrale coinvolto è ben più facile]
   E' = …………………………………….. $(\kappa\,\lambda / R) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = (\kappa\,\lambda / R)\, \sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\kappa\,\lambda / R$ [notate che, sempre per ragioni di simmetria, come potete facilmente dimostrare, il campo ha direzione radiale, cioè è diretto lungo l'asse X per la scelta del riferimento di figura; notate anche che il risultato non deve cambiare per altre scelte del riferimento angolare, cioè del modo in cui si misura l'angolo θ]

2. Una sfera di raggio R porta nel suo volume una carica elettrica Q.

a) Supponendo che la distribuzione della carica sia uniforme nel volume, quanto vale la distribuzione volumica di carica ρ?
ρ = …………………………………... $Q/V = 3Q / (4 \pi R^3)$

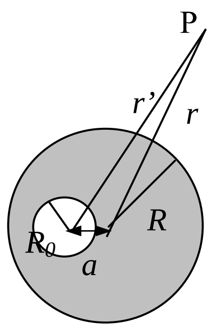
b) Sulla base dei ragionamenti di simmetria e geometria, commentate sulla dipendenza dalle coordinate spaziali e sulla direzione del campo ***E(r)*** generato dalla distribuzione di carica.
Dipendenza dalle coordinate spaziali: ……………………… il campo può dipendere solo dal modulo di *r* per ragioni di simmetria dat che c'è invarianza del sistema rispetto alle rotazioni angolari, sia quelle "della longitudine" che quelle della "latitudine" (cioè azimutali e zenitali)
Direzione: ……………………… il campo è diretto radialmente per ragioni di simmetria (ad esempio, il potenziale elettrostatico può solo dipendere da *r* e quindi le superfici equipotenziali sono sfere concentriche: il campo deve essere ortogonale rispetto a loro, cioè radiale)

c) Come si esprime il flusso del campo elettrico $\Phi(\boldsymbol{E})$ su una sfera di raggio *r* concentrica alla sfera assegnata?
$\Phi(\boldsymbol{E})$ = …………………………………... $4\pi r^2 E(r)$

d) Quanto vale in modulo il campo elettrico *E(r)* in un punto a distanza generica *r* dal centro della sfera? [Distinguete i due casi punto all'interno e all'esterno, cioè $r < R$ ed $r > R$, ed applicate il teorema di Gauss!]
E(r) = …………………………………... per $r < R$ $\rho r /(3 \varepsilon_0) = (r/\varepsilon_0)(Q/(4\pi R^3)$
E(r) = …………………………………... per $r > R$ $Q /(4\pi r^2 \varepsilon_0)$

e) Quanto vale il potenziale elettrico ϕ a cui si trova la superficie della sfera? [Considerate che il "potenziale" è la differenza di potenziale *V(r)* rispetto ad un punto di riferimento collocato all'infinito e che per convenzione il potenziale elettrico all'infinito si può porre pari a zero]
ϕ = …………………………………... $- \int_R^\infty Q /(4\pi\varepsilon_0 r^2)\, dr = Q/(4\pi \varepsilon_0 R)$ [dalla definizione di differenza di potenziale, scegliendo come percorso di integrazione un tratto radiale da *R* all'infinito]

f) E quanto vale il potenziale elettrico ϕ_0 al centro della sfera?
ϕ_0 = …………………………………... $\phi - \int_0^R (r/\varepsilon_0)(Q/(4\pi R^3)dr = \phi - Q/(8\pi \varepsilon_0 R) = Q/(8\pi \varepsilon_0 R)$
[avendo sfruttato l'additività del potenziale, cioè avendo spezzato in due l'integrale di linea che lo deficinisce, ed avendo usato il campo all'interno della sfera per il tratto che va dal centro alla superficie *R*]



g) Supponete ora che all'interno della sfera e decentrata rispetto al suo centro ci sia una "cavità" sferica di raggio $R_0 < R$, in cui non si trova carica elettrica: chiamate *a* la distanza del centro della cavità rispetto al centro della sfera (vedi figura). Supponendo che la densità di carica volumica rimanga la stessa ρ calcolata sopra, quanto vale la nuova carica totale *Q'* portata dalla sfera?
Q' = …………………………………... $\rho (4\pi R^3 /3 - 4\pi R_0^3 /3)$

h) E quanto vale, in queste condizioni, il modulo del campo *E'(r)* in un punto distante $r>R$ dal centro della sfera di raggio *R*? Chiamate *r'* la distanza tra il punto e il centro della sfera di raggio R_0. [Suggerimento: ricordate il principio di sovrapposizione e tenete conto che, per "annullare" una carica, è sufficiente sommare una carica di segno opposto]
E'(r) = …………………………………... $(1/(4\pi\varepsilon_0)) (Q/r^2 + Q''/r'^2)$, con $Q'' = - \rho\, 4\pi R_0^3 /3$, ***r*** ed ***r'*** versori rispettivamente della congiungente il centro della sfera di raggio *R* e della cavità di raggio R_0 con il punto in cui si vuole misurare ***E'***

Francesco Fuso – tel 050 2214305 – e-mail: fuso@df.unipi.it – web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida