ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 31/07

1. Un condensatore ad armature piane parallele è formato da due armature di superficie S = 10 cm^2 separate da una distanza d = 0.10 mm. La regione tra le armature è riempita completamente da un materiale dielettrico con costante relativa (**incognita**) ε_R. Il condensatore si trova inizialmente in condizioni completamente cariche (il processo di carica è stato completato in precedenza), e la differenza di potenziale tra le armature vale V_0 = 100 V. [Ricordate che l'effetto di un dielettrico polarizzabile è quello di "schermare" il campo prodotto dalle cariche libere!]
   a) Come si esprime la capacità C del condensatore in funzione dell'incognita ε_R e dei parametri geometrici del problema? [Trascurate gli "effetti ai bordi". Nota: qui non dovete dare una risposta numerica, ma solo scrivere, o calcolarvi, l'espressione della capacità]
   C = …………………………………... $\varepsilon_0\ \varepsilon_R S/d$ [o lo ricordate o lo calcolate come a lezione]

   b) Per scaricare il condensatore usate cortocircuitate le sue armature attraverso una resistenza R = 1.0 Mohm ed osservate che il "tempo caratteristico di scarica" vale τ = 8.8 ms. Quanto vale la costante dielettrica relativa ε_R del dielettrico? [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]
   ε_R = ………………………………….. = ……... $d\ \tau / (\varepsilon_0\ S\ R) = 100$ [viene da $\tau = RC$]

   c) Quanto vale l'energia totale U_J dissipata dalla resistenza per effetto Joule durante l'**intero** processo di scarica?
   U_J = ………………………………….. = ……... J $U_E = CV_0^2 / 2$ = 8.8x10^{-5} J [viene dal bilancio energetico: la resistenza dissipa tutta l'energia inizialmente accumulata nel condensatore, che vale $CV_0^2/2$]

   d) Quanto varrebbe il tempo di scarica τ' se utilizzaste la stessa resistenza R di cui sopra e aveste due condensatori (identici a quello considerato) in parallelo?
   τ' = ………………………………….. = ……... s 2τ = 17.6 ms [viene da $\tau' = RC'$, e $C' = 2C$ per il collegamento in parallelo dei condensatori]

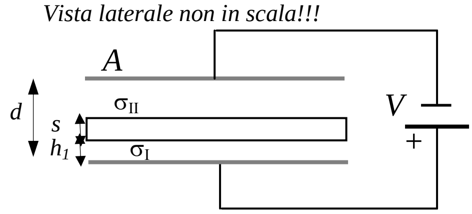
   e) Come si esprime l'andamento temporale $E(t)$ del campo elettrico presente tra le armature? [Ricordate come si esprime il campo in un condensatore ad armature piane e parallele e tenete conto del processo "transiente", la scarica del condensatore, che stiamo considerando]
   $E(t)$ = ………………………………….. $V(t)/d = V_0^{\varepsilon-\tau/\tau} / d$

2. Due piastre di materiale conduttore, che hanno spessore **trascurabile** ed area A = 1.0 m^2 sono poste parallelamente l'una di fronte all'altra ad una distanza pari a d = 10 cm. Ad un dato istante, le due piastre, inizialmente **scariche**, vengono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 100 V. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto e supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**]

a. Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore per portare il sistema all'equilibrio (cioè perché le cariche elettriche si distribuiscano in modo opportuno sulle due piastre)?
   L = ………………………………… = ……….. J $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0\ A/d)\ V_0^2/2$ = 4.4x10^{-7} J [il lavoro è pari alla energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale, all'equilibrio, $CV_0^2/2$; la capacità C si esprime come $\varepsilon_0\ A/d$, da cui la soluzione]

b. Supponete ora che nello spazio (vuoto) tra le piastre venga si trovi una lastra conduttrice **scarica**, di area A identica a quella delle piastre e spessore s = 2.0 cm. La configurazione è descritta schematicamente in figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza h_1 = 1.0 cm dalla lamina "inferiore". Quanto valgono, all'equilibrio, le densità di carica superficiale σ_I e σ_{II} sulle due facce della lastra indicate in figura (rispettivamente quella inferiore e superiore, nel disegno)?

Vista laterale non in scala!!!

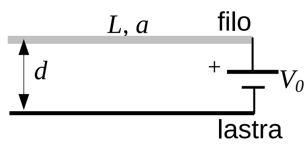


   σ_I= ………………………………… = ……….. C/m^2 $-\varepsilon_0 V_0/(d-s)$ =-1.1x10^{-10} C/m^2

σ_{II}= …………………………………… = ……….. C/m^2 $-\sigma_I$ =1.1x10^{-10} C/m^2 [detti E_1 ed E_2 i campi nella regioni compresa tra lamina inferiore e lastra e tra lastra e lamina superiore, per Gauss deve essere $\sigma_I = - E_1\varepsilon_0$ (il segno negativo viene dal fatto che il versore rilevante è antiparallelo al campo!); per la neutralità della lastra deve essere $\sigma_{II} = - \sigma_I$; d'altra parte per Gauss deve anche essere $E_2 = \sigma_B/\varepsilon_0 = E_1$. Sfruttando la definizione di differenza di potenziale, detta $h_2 = d - s - h_1$ la distanza tra faccia superiore della lastra e lamina superiore, deve allora essere $V_0 = E_1h_1+E_2h_2 = E_1(d\text{-}s)$, da cui la soluzione]

c. Quanto vale la capacità *C'* del sistema considerato (costituito cioè dalle due piastre e dalla lastra)?
C' = …………………………………… = ……….. pF σ_{II} A/V_0 =$\varepsilon_0 A/(d\text{-}s)$ = 1.1x10^{-12} F = 1.1 pF [dalla definizione di capacità, essendo $Q = \sigma_{II}$ A la carica presente sull'armatura (positiva, per definizione) del condensatore]

3) Un sistema è costituito da un lungo e sottile filo elettrico (lunghezza L = 1.0 m, raggio a = 1.0 mm) posto parallelamente ad una grande e sottile lastra di materiale conduttore e mantenuto ad una distanza d = 1.0 cm rispetto a questa. Un generatore di differenza di potenziale V_0 = 22 V è collegato al filo e alla lastra; il polo positivo è collegato al filo: la figura mostra una vista laterale schematica del sistema. [Per la soluzione tenete conto della simmetria dovuta al fatto che il filo è molto lungo e sottile; usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]

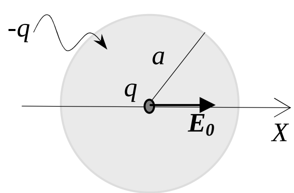


Disegno non in scala!!!

a) Quanto vale la carica Q che si distribuisce sul filo in condizioni di equilibrio elettrostatico? [Può farvi comodo ricordare che $\int (1/r)dr = \ln(r)$ e sapere che $\ln(9) \sim 2.2$]
Q = …………………………………… ~ ……… C $V_0\ 2\ \pi\ \varepsilon_0\ L/(\ln((d\text{-}a)/a))$ ~ 5.5x10^{-10} C [applicando Gauss ad un cilindro coassiale al filo 1, scelta dovuta alla simmetria cilindrica del filo, si ha che il campo generato dal filo in funzione della distanza r dall'asse del filo stesso si esprime come $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 L\ r)$; d'altra parte per la presenza del generatore deve essere $V_0 = - \int_{d-a}^{a} E(r)dr$, da cui il risultato]

b) Ad un dato istante il generatore viene scollegato e rimpiazzato da un resistore elettrico di resistenza R = 80 kohm. Dopo quanto tempo τ il filo viene ad avere una carica elettrica trascurabile? [Date una stima del tempo caratteristico di scarica del sistema]
τ = ……………………………………....~ ……. s$RC = RQ/V_0 = R\ 2\ \pi\ \varepsilon_0\ L/(\ln((d\text{-}a)/a))$ ~ 2.2x10^{-9} s [quello indicato è il tempo caratteristico di scarica del condensatore attraverso la resistenza data, calcolato tenendo conto che $C = Q/V_0$ per definizione (la carica accumulata è stata determinata nella risposta precedente). Dato che l'andamento temporale della carica è esponenziale decrescente, una risposta più appropriata indicherebbe un intervallo temporale pari a *qualche* volta il valore τ che abbiamo calcolato (ad esempio, dopo circa 5τ la carica può essere considerata trascurabile a tutti gli effetti pratici]

4) In un modello atomico molto semplificato (che assomiglia al cosiddetto modello di Thomson), si può supporre che la carica q del nucleo sia concentrata in un punto, e che la carica della nube elettronica sia delocalizzata formando una **sfera** con densità di carica **uniforme** e raggio a.



a. Supponendo di considerare l'atomo di idrogeno e sapendo che a = 5.0x10^{-2} nm, quanto vale la densità volumica di carica ρ della nube elettronica? [Usate il valore e = 1.6x10^{-19} C per la carica elementare]
ρ = …………………………. = ... C/m^3 $-3e/(4\pi a^3)$ = - 3.1x10^{11} C/m^3 [essendo la distribuzione uniforme si ha semplicemente $\rho = -q/V$, con $q = e$ e $V = (4/3)\pi a^3$ volume della sfera]

b. Immaginate ora che il sistema considerato venga posto in un campo elettrico esterno uniforme e costante diretto nel verso positivo dell'asse X di un sistema di riferimento (con l'origine nel centro della distribuzione sferica di carica negativa, come rappresentato in figura) e di modulo E_0. Imponendo che la distribuzione di carica negativa (la nube elettronica) resti **fissa** nello spazio e che mantenga la sua forma sferica omogenea, come si scrive la posizione x_{EQ} in cui si viene a trovare all'equilibrio il nucleo (il protone)? [Non occorre una risposta numerica per questa domanda; per i pignoli: si supponga che l'intensità del campo applicato sia tale da non "separare" le cariche di segno opposto che costituiscono l'atomo]
x_{EQ} = ... $4\pi a^3\varepsilon_0\ E_0\ /\ e$ [all'equilibrio deve essere $qE_0 + qE_{INT} = 0$. Il campo interno E_{INT} è quello generato dalla distribuzione di carica e dipende da x in modo lineare. Infatti, scegliendo una superficie di Gauss sferica di raggio x generico centrata nell'origine, si ha $E_{INT}4\pi x^2 = Q_{INT}/\varepsilon_0 = \rho 4\pi x^3/(3\varepsilon_0)$, da cui $E_{INT} = \rho\ x/(3\varepsilon_0)$, che conduce alla soluzione]