Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 10, 23/12/2004

1. Avete tre masse puntiformi, m_1 = 1.25 Kg, m_2 = 750 g, m_3 = 250 g, che si trovano nelle seguenti posizioni spaziali (espresse vettorialmente e riferite ad un dato sistema cartesiano): $\boldsymbol{r_1}$ = (- 20, 40, - 40) cm; $\boldsymbol{r_2}$ = (20, 0, -40) cm; $\boldsymbol{r_3}$ = (40, 20, 0) cm.
   a) Qual è, vettorialmente, la posizione del centro di massa $\boldsymbol{r_{CM}}$?
   $\boldsymbol{r_{CM}}$ = (…………,………,………) m

   b) Quanto vale il **momento di inerzia** *I* per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse *Z* del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = ………………………………….. = ……… Kg m^2

   c) Quanto vale il **momento di inerzia** *I'* per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse *Z* ma passante **per la massa** m_1?
   I' = ………………………………….. = ……… Kg m^2

2. Avete una barretta sottile di materiale disomogeneo, di sezione *S* , lunghezza totale *l* e densità di massa $\rho(x)$ che varia lungo l'asse secondo la legge $\rho(x) = \alpha\, x^2$, dove *x* è la distanza da un estremo e α è una costante opportunamente dimensionata in modo che $\rho(x)$ si misuri in Kg/m^3 (α si deve evidentemente misurare in Kg/m^5).
   a) Tenendo conto che la densità dipende **solo** da *x*, come potete esprimere una **densità lineare di massa** $\lambda(x)$, con dimensioni di una massa per unità di lunghezza (Kg/m)?
   $\lambda(x)$ = …………………………

   b) Quanto vale la massa *m* della barretta?
   m = …………………………

   c) Qual è la coordinata x_{CM} del centro di massa? (Supponete di disporre la barretta lungo l'asse *X* di un sistema di riferimento cartesiano, con la sua origine coincidente con l'origine del sistema)
   x_{CM} = …………………………

   d) Quanto vale il **momento di inerzia** *I* per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse *Z* del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = ……………………………

   e) Quanto vale il **momento di inerzia** I_{CM} per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse *Z* ma passante **per il centro di massa**?
   I_{CM} = ……………………………

   f) Provate a "generalizzare" il risultato precedente, cioè a trovare un legame tra *I* ed I_{CM} che coinvolga la massa del corpo, *m*, e la distanza *D* tra l'asse a cui si riferisce il momento di inerzia *I* e il centro di massa:
   I = ……………………………

3. Avete un sottile anello circolare fatto di un materiale **omogeneo** con densità di massa ρ (in questo caso è ovviamente uniforme). Indicate con *r* il raggio dell'anello, con Δr la sua "larghezza" (cioè il suo spessore in direzione radiale) e con Δs la sua "altezza" (cioè il suo spessore in direzione assiale).
   a) Quanto vale, in prima approssimazione, il volume ΔV dell'anello?
   $\Delta V \sim$ …………………………

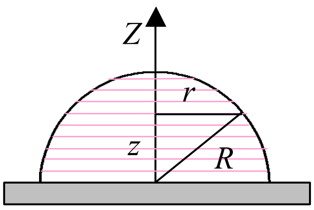
   b) Quanto vale, in prima approssimazione, la massa Δm dell'anello?
   $\Delta m \sim$ …………………………

   c) Supponete ora di avere tanti di questi **anelli**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δr **molto** piccolo, ed immaginate di infilarli tutti uno dentro l'altro in modo che i loro centri

coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di un **disco** omogeneo di raggio R. Quanto vale la massa $\Delta m'$ di questo disco?
$\Delta m'$ = …………………………

d) Quanto vale il momento di inerzia ΔI di questo disco per una rotazione attorno al suo asse?
ΔI = …………………………

e) A questo punto, supponete di avere tanti di questi **dischi**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δs **molto** piccolo, ed immaginate di impilare dischi di raggio via via decrescente tutti uno sopra l'altro in modo che i loro centri coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di una **semisfera** omogenea di raggio R. Se dal punto di vista operativo decidete di impilare i dischi lungo l'asse Z, partendo, con il disco di raggio R, dal piano $z = 0$, qual è la relazione (puramente geometrica) tra raggio $r(z)$ del disco e quota z a cui questo disco si trova (vedi figura)?
$r(z)$ = …………………………



f) Quanto vale la massa $\Delta m''$ di questa semisfera?
$\Delta m''$ = …………………………

g) E ora che siamo "esperti" di calcolo di integrali di volume, quanto vale il momento di inerzia I per la semisfera in rotazione attorno all'asse Z?
I = …………………………..

h) Ragionando come sopra, quanto vale la coordinata z_{CM} del centro di massa?
z_{CM} = …………………………..