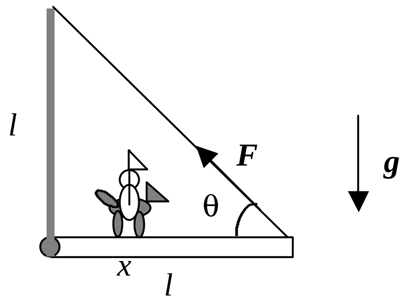
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 12, 17/3/2005

1. Un cavaliere medievale, di massa complessiva M = 500 Kg, percorre un ponte levatoio, di materiale omogeneo, lunghezza l = 5.00 m, e massa m = 100 Kg, che è incernierato senza attriti ad un suo estremo, mentre all'altro estremo è fissato tramite una catena inestensibile (di massa trascurabile) alle pareti del castello, in un punto che si trova ad una distanza verticale l = 5.00 m al di sopra del perno (vedi figura). Per lo svolgimento del problema, considerate il cavaliere (con cavallo e armatura) come un punto materiale.



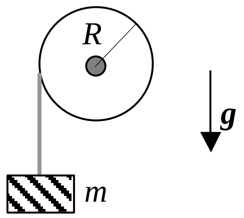
   a) Detta x la coordinata del cavaliere lungo il ponte levatoio, come si scrive la funzione $F(x)$ che rappresenta la dipendenza del modulo della tensione della catena con la posizione x?
   $F(x)$ = ……………………………………….. $(Mg\ x + mgl/2)/(l \sin\theta)$, essendo θ = 45 gradi l'angolo rappresentato in figura

   b) Sapendo che il carico massimo che la catena può sopportare prima di spezzarsi vale in modulo F' = 5000 N,quanto vale la coordinata x' a cui arriva il cavaliere prima che succeda il disastro?
   x' = …………………………………... = ……… m $F'l \sin\theta\ /\ (Mg) - ml\ /\ (2M)$ = 3.11 m
   [risolvendo l'equazione scritta sopra per x e considerando una forza pari a F']

   c) Tenendo conto che il ponte levatoio è ben approssimato da un'asta omogenea che ruota attorno ad un asse passante per una sua estremità, quanto vale **l'accelerazione angolare** α del ponte subito dopo la rottura della catena? [Se proprio non volete calcolarvelo, ricordate che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l vale $I = ml^2/3$]
   α = …………………………………... = ……… rad/s^2 $(mgl/2 + Mgx')/I$ = 21.2 rad/s^2
   [dalla legge del moto di rotazione di un corpo rigido, tenendo conto che, subito dopo la rottura della catena, i momenti delle forze sono solo quelli dovuti alla forza peso del ponte, applicata al suo centro di massa, e del cavaliere, applicata con un braccio pari a x']

   d) Il cavaliere comincerà a cadere verso il basso, ed il ponte a compiere una rotazione. Inizialmente (subito dopo la rottura della catena), quanto valgono in modulo le **accelerazioni lineari** A ed a rispettivamente del cavaliere e dell'estremità del ponte?
   A = …………………………………... = ……… m/s^2 g = 9.80 m/s^2 [è un grave in caduta libera!]
   a = …………………………………... = ……… m/s^2 $\alpha\ l$ = 106 m/s^2 [>> g !!]

2. Un corpo di massa m è sospeso, tramite una corda in estensibile di massa trascurabile, ad una carrucola. La carrucola è costituita da un disco sottile ed omogeneo, di raggio R, spessore s e densità di massa ρ; essa è disposta su piano verticale ed è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Nella soluzione, trascurate ogni forma di attrito, sia per la rotazione della carrucola che per il movimento della massa. .



   a) Disegnate in figura il diagramma delle forze rilevanti per il problema.

   b) Quanto vale il modulo del momento delle forze τ applicato alla carrucola?
   τ = ……………………………………..…….. $T\ R$, dove T è la tensione della corda (da calcolare!)

   c) Quanto vale il momento di inerzia I della carrucola?
   I = ……………………………………..…….. $\pi\rho s R^4/2$ [per un dsco omogeneo si ha $I = MR^2/2$, ed in questo caso la massa del disco si esprime come $M = \rho\ V$, con $V = \pi\ R^2\ s$ è il volume del disco]

   d) Se la corda è inestensibile e non slitta sulla carrucola, che relazione deve esistere tra l'**accelerazione angolare** α della carrucola e l'**accelerazione lineare** a della massa? Come si scrivono le eq. del moto angolare (della carrucola – supponete positiva una rotazione in senso orario) e lineare (della massa – supponete un asse di riferimento verticale e diretto verso il basso)?
   α = ……………………………………..…….. a/R
   moto angolare: ……………………………………..…….. $\alpha = \tau\ /\ I = T\ R\ /\ I$
   moto lineare: ……………………………………..…….. $a = g - T/m$

Francesco Fuso – tel 050 2214305 – e-mail: fuso@df.unipi.it – web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

e) E quanto valgono a ed α?

a = …………………………………..…….. $mgR^2 / (I + mR^2)$

α = …………………………………..…….. $mgR / (I + mR^2)$ [dalla soluzione del sistema di eq. scritto sopra]

f) Se si suppone che il moto (di discesa della massa e di rotazione della carrucola) sia iniziato all'istante t = 0, quanto valgono la velocità lineare v della massa, la velocità angolare ω della carrucola, lo spostamento lineare S della massa ed il **momento angolare** L della carrucola (in modulo) all'istante t generico?

v = …………………………………..…….. $a\,t = mgR^2\,t / (I + mR^2)$

ω = …………………………………..…….. $\alpha\,t = mgR\,t / (I + mR^2)$

S = …………………………………..…….. $at^2/2 = mgR^2\,t^2 / (2(I + mR^2))$ [moto unif. Accelerato]

L = …………………………………..…….. $I\,\omega = mgR\,t\,I / (2(I + mR^2))$

g) Quanto valgono le variazioni di energia potenziale della massa, ΔU , ed energia cinetica **dell'intero sistema** (massa + carrucola!) calcolate tra gli stessi istanti t e t = 0?

ΔU = …………………………………..…….. $- mgS$

ΔE_K = …………………………………..…….. $mv^2/2 + I\omega^2/2$

h) Verificate se si può affermare che "l'energia si conserva", cioè se il lavoro L_P fatto dalla forza peso (è L_P = - ΔU) è pari alla variazione di energia cinetica **complessiva** ΔE_K :

…………………………………..…….. sì , si verifica direttamente con qualche passaggio algebrico

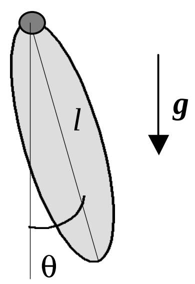
3. L'elica di un ventilatore può essere schematizzata come un'asta sottile omogenea, di massa m = 120 g, e lunghezza l = 20 cm, che ruota su un piano orizzontale attorno ad un perno che passa per il suo punto medio..

a) Quanto vale il momento di inerzia I dell'elica? [Suggerimento: può farvi comodo ricordare che il momento di inerzia per un'asta sottile che ruota attorno ad un perno passante per un suo estremo è $I' = ml^2/3$, da cui, applicando il "teorema degli assi paralleli"…]

I = ……………………………….. = …….. Kg m^2 $I' - m(l/2)^2 = m\,l^2{}_1/12$ = 4x10^{-4} Kg m^2

b) Supponendo che l'elica sia messa in rotazione **senza attriti** da un motore di potenza costante W e sapendo che, dopo essere partita da ferma, essa raggiunge una velocità angolare ω = 20 rad/s in un intervallo di tempo Δt = 10 s, quanto vale W?

W = ……………………………….. = …….. W $I\,\omega^2 / (2\,\Delta t)$ = 8x10^{-3} W [il lavoro del motore, che vale $W\Delta t$, viene convertito in energia cinetica, che vale $I\omega^2/2$]



4. Un ellissoide omogeneo di massa m e lunghezza l (vedi figura) può ruotare su un piano verticale attorno ad un perno passante per una sua estremità. Si suppongano trascurabili tutti gli attriti e si assuma pari ad I (noto!) il momento di inerzia.

a) A quale distanza d dal perno (misurata lungo l'asse dell'ellissoide disegnato in figura) si trova il centro di massa dell'ellissoide?.

d = …………………………………..…….. $l / 2$, per l'omogeneità e simmetria

b) Quanto vale, in funzione dell'angolo θ indicato in figura, il momento τ esercitato dalla forza peso rispetto al perno di rotazione?

t = …………………………………… $m\,g\,(d/2)\sin\theta$ [la forza perso è applicata al centro di massa!]

c) Quanto vale, sempre in funzione di θ, l'accelerazione angolare α dell'ellissoide? [segni!!!]

α = …………………………………..…….. $- \tau / I = - m\,g\,(d/2\,I)\sin\theta$

d) Se l'ellissoide viene spostato "di poco" dalla posizione di equilibrio stabile θ = 0 si osservano delle oscillazioni (è un pendolo che fa piccole oscillazioni!!). Quanto vale la loro pulsazione ω_{PO}?

ω_{PO} = …………………………………..…….. $(m\,g\,(d/2\,I))^{1/2}$ [ragionate per analogia con il caso di un pendolo costituito da una massa puntiforme legata ad una corda che fa piccole oscillazioni…]