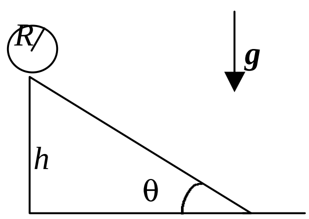
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 13, 18/3/2005

1. Una pattinatrice artistica su ghiaccio, che ha massa m = 50 Kg, fa una veloce piroetta in senso antiorario. Si trascuri l'attrito tra i pattini ed il ghiaccio.
   a) Nella configurazione iniziale, la pattinatrice tiene le braccia lungo il corpo ed il suo corpo può essere approssimato (con molta fantasia!) con un cilindro verticale **omogeneo**, di altezza h e raggio R = 0.2 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Quanto vale il momento di inerzia I della pattinatrice in queste condizioni?
   I = …………………………………... = ……… Kg m^2 $m R^2 / 2$ = 1.0 Kg m^2 [è un cilindro che ruota attorno al suo asse!]
   b) Sapendo che la pattinatrice compie f = 8.0 rotazioni al secondo, quanto valgono il modulo del suo momento angolare L e la sua energia cinetica E_K?
   L = …………………………………... ~ ……… Kg m^2/s $I\,\omega = I\,2\pi f$ ~ 50 Kg m^2/s
   E_K = …………………………………... ~ ……… J $I\,\omega^2/2 = I\,(2\pi f)^2/2$ ~ 1262 J
   c) Mentre sta ruotando, la pattinatrice allarga le braccia fino a disporle in direzione orizzontale. In questa nuova configurazione, essa può essere approssimata come un cilindro verticale omogeneo di massa m_C = 45 Kg in rotazione, che rappresenta come prima il suo corpo; le braccia tese, in vece, possono essere rappresentate come un'asta **omogenea** orizzontale, di massa m_B = 5.0 Kg e lunghezza d = 1.6 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo punto medio. A questo punto, quindi, il sistema (di massa complessiva m) è costituito da due elementi omogenei, il cilindro verticale e l'asta orizzontale, che ruotano solidali attorno allo stesso asse. Il momento di inerzia complessivo I' può essere quindi determinato sommando i momenti di inerzia del cilindro e dell'asta. Quanto vale I'?
   I' = …………………………………... ~ ……… Kg m^2 $m_C R^2 / 2 + m_B d^2 / 12$ ~ 2.0 Kg m^2
   [ricordate l'espressione del momento di inerzia per un'asta che ruota attorno al suo punto medio!]
   d) Considerando come istante iniziale del processo quello in cui la pattinatrice piroetta a braccia lungo il corpo e come istante finale quello in cui ha le braccia orizzontali, cosa si può affermare si conservi durante il processo?
   ✗ ☐ Il momento angolare   ☐ L'energia cinetica   ☐ Entrambe   ☐ Nulla
   Spiegazione sintetica della risposta: ……………………………………………… non agiscono momenti di forza esterni al "sistema" pattinatrice, e quindi il momento angolare si conserva
   e) Quanto vale la frequenza di rotazione f' al termine del processo?
   f' = …………………………………... ~ ……… rotazioni al secondo $f\ I\ /\ I'$ ~ 4.0 rot/s
   [dalla conservazione del momento angolare!]
   f) E quanto vale il lavoro lav che la pattinatrice deve compiere per cambiare la sua configurazione? [Si suppongano trascurabili le possibili variazioni di energia potenziale gravitazionale]
   lav = …………………………………... ~ ……… J $I'\,(2\pi f')^2/2 - E_K$ ~ 631 J   [la variazione dell'energia cinetica è pari al lavoro – interno – compiuto dalla pattinatrice.]

2. Un cilindro di massa m e raggi R si trova in quiete sulla sommità di un piano inclinato di altezza h (vedi figura) scabro. Ad un dato istante esso viene lasciato libero di scendere lungo il piano inclinato, e si osserva che compie un moto di **rotolamento senza strisciare**. Il momento di inerzia del cilindro per una rotazione attorno al suo asse vale I. Notate anche che, essendo il cilindro **omogeneo**, il suo centro di massa giace sull'asse.



   a) Disegnate in figura il diagramma delle forze rilevanti per il problema.
   b) Se sussiste la condizione di rotolamento senza strisciamento, che rapporto deve esserci tra velocità del centro di massa del cilindro, v_{CM} , e velocità angolare di rotazione ω? Quanto deve valere il lavoro L_A delle forze di attrito che si sviluppano tra generatrice del cilindro e piano inclinato?
   v_{CM} = ……………………………..…….. ωR
   L_A = ……………………………..…….. 0 [non c'è moto relativo!]

c) Detta v_{CM}' la velocità del centro di massa quando il cilindro raggiunge la base del piano inclinato, quanto vale l'energia cinetica E_K' in questa posizione? [Tenete conto della rotazione del cilindro!]
$E_K' =$ ……………………………………..…….. $mv_{CM}'^2/2 + I\, v_{CM}'^2/(2R^2)$
errori di stampa corretio grazie a Silvia - 14/4/05

d) Quanto vale v_{CM}'? [Suggerimento: applicate principi di bilancio energetico]
$v_{CM}' =$ ……………………………………..…….. $(2mgh / (m + I / R^2))^{1/2}$ [da $E_K' = mgh$!]

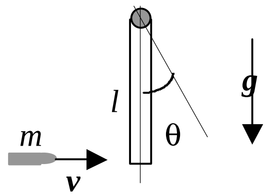
e) Come si scrivono le equazioni per la forza in direzione parallela al piano inclinato e per i momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione? [Suggerimenti: chiamate θ l'angolo del piano inclinato rispetto all'orizzontale, ricordatevi della forza di attrito F_A e tenete conto che, senza strisciamento, tra accelerazione lineare del centro di massa, a_{CM}, ed accelerazione angolare α del cilindro esiste la stessa relazione che c'è tra v_{CM} ed ω - vedi domanda b)]
Forze in direzione parallela: $m\, a_{CM} =$ ……………………………………..…….. $mg\sin\theta - F_A$
Momenti delle forze: $I\,\alpha =$ ……………………………………..…….. $I\, a_{CM} / R = F_A R$

f) Quanto vale a_{CM}?
$a_{CM} =$ ……………………………………..…….. $g \sin\theta / (1 + I /(m R^2))$ [dalla sol. del sistema scritto sopra – notate che questo valore è sempre minore dell'accelerazione nel caso di strisciamento, che sarebbe $g \sin\theta$!]

g) Quanto vale la forza di attrito F_A?
$F_A =$ ……………………………………..…….. $mg \sin\theta\, I / (I + m R^2)$ [dall'ultima delle due eq. del punto g)]

h) E quanto deve valere, al minimo, il coefficiente di attrito statico μ affinché si possa avere rotolamento senza strisciamento?
μ ……………………………………..…….. $\mathrm{tg}\theta\, I / (I + m R^2)$ [viene tenendo conto del valore di F_A sopra determinato e considerando che deve essere $F_A = \mu N$, con $N = mg\cos\theta$ modulo della reazione vincolare del piano inclinato]

3. Un'asta omogenea di massa M = 1.0 Kg e lunghezza l = 0.50 m è sospesa ad un perno collocato ad una sua estremità. L'asta può ruotare **senza attriti** attorno al perno, mantenendosi su un piano verticale. Un proiettile di massa m = 5.0 g e velocità (orizzontale) v = 200 m/s colpisce l'estremità dell'asta, come in figura, rimanendoci conficcato, quando l'asta stessa si trova **ferma** in posizione di equilibrio (cioè è disposta lungo un asse verticale, θ = 0 – vedi figura).



a) Quanto vale in modulo il momento angolare L_P del proiettile calcolato rispetto al perno di rotazione dell'asta nell'istante in cui il proiettile colpisce l'asta? [Suggerimento: ricordate la definizione di momento angolare rispetto ad un punto, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, con $\boldsymbol{r}$ vettore che congiunge il proiettile al perno di rotazione, e $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ quantità di moto del proiettile]
$L_P =$ ……………………………….. = …….. Kg m²/s mvl = 0.50 Kg m²/s

b) Sfruttando la conservazione del momento angolare, dovuta all'assenza di momenti delle forze esterni al sistema proiettile+asta, e sapendo che il momento di inerzia dell'asta è in questo caso $I = Ml^2/3$, quanto vale la velocità angolare ω_0 con cui l'asta avvia la sua rotazione subito dopo l'urto? [Attenzione: il proiettile rimane conficcato nell'asta, e quindi anch'esso ha un suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, benché molto piccolo]
$\omega_0 =$ ……………………………….. ~ …….. rad/s $L_P / (I + ml^2) \sim 5.9$ rad/s

c) L'asta comincia quindi a ruotare in senso antiorario, cioè l'angolo θ di figura tende ad aumentare. Quanto vale, in funzione di θ, il lavoro Λ fatto dalla forza peso che agisce sul centro di massa dell'asta? [Semplificazione: trascurate il lavoro della forza peso sul movimento del proiettile conficcato nell'asta – vi garantisco che l'approssimazione è ragionevole!]
$\Lambda =$ ……………………………………..…….. $Mgl\,(1 - \cos\theta)$

d) Quanto vale l'angolo massimo θ_{MAX} raggiunto dall'asta prima di arrestarsi?
$\theta_{MAX} =$ ………………………………~ …….. gradi $\arccos(1 - (I + ml^2)\, \omega_0^2 / (2Mgl))$
[uguagliando il lavoro della forza peso con l'energia cinetica iniziale dell'asta – se pensate di risolvere l'esercizio "alla rovescia", cioè a partire dalla misura di θ_{MAX}, vi potete rendere conto che questo sistema può servire per misurare indirettamente la velocità del proiettile]