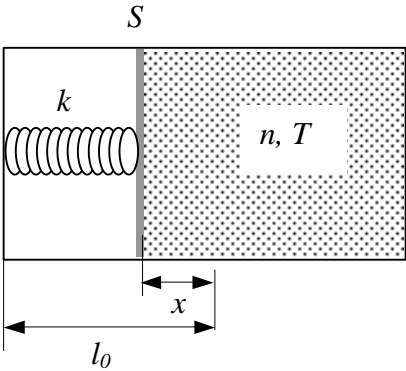


1. Una mole di gas perfetto biatomica, che inizialmente si trova nelle condizioni definite dalle variabili di stato  $P_0 = 2.00 \times 10^5$  Pa,  $V_0 = 2.00$  l subisce una "strana" trasformazione che segue la legge  $PT^2 = \text{costante}$ . [Notate che in questa trasformazione pressione, volume e temperatura variano tutte e tre, e ci disinteressiamo del meccanismo fisico che eventualmente la realizza!]
  - a) Quanto vale la temperatura iniziale  $T_0$ ? [Prendete  $R = 8.31$  J/(K mole) come valore della costante dei gas perfetti]
 
$$T_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ K} \quad P_0 V_0 / (nR) = 48.1 \text{ K} \quad [\text{legge dei gas perfetti}]$$
  - b) Sapendo che alla fine della trasformazione il gas si trova alla pressione  $P_1 = 8.00 \times 10^5$  Pa, quanto valgono la temperatura  $T_1$  e il volume  $V_1$ ?
 
$$T_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ K} \quad T_0 (P_0 / P_1)^{1/2} = 24.1 \text{ K}$$

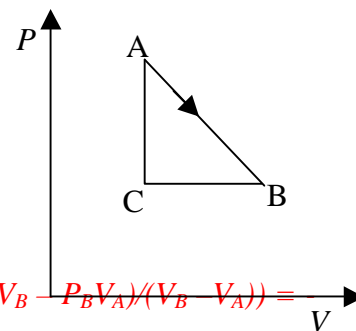
$$V_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ K} \quad nRT_1/P_1 = nRT_0P_0^{1/2}/P_1^{3/2} = V_0(P_0/P_1)^{3/2} = 0.250 \text{ l}$$
  - c) Come si esprime la legge che lega pressione  $P$  e volume  $V$  per la trasformazione considerata?
 
$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad P^3 V^2 = \text{costante} = P_0^3 V_0^2 \quad [\text{si ottiene combinando la legge data con la legge dei gas perfetti}]$$
  - d) Quanto vale il lavoro  $L$  fatto o subito dal gas?
 
$$L = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ J} \quad \int_{V_0}^{V_1} P dV = P_0 V_0^{2/3} \int_{V_0}^{V_1} (1/V^{2/3}) dV = P_0 V_0^{2/3} 3 (V_1^{1/3} - V_0^{1/3}) = 3 P_0 (V_0^{2/3} V_1^{1/3} - V_0) = 3 P_0 V_0 ((P_0/P_1)^{1/2} - 1) = - (3/2) P_0 V_0 = - 600 \text{ J}$$
  - e) Quanto valgono variazione di energia interna  $\Delta U$  del gas e calore  $Q$  da esso scambiato durante la trasformazione? [Ricordate che, per un gas perfetto biatomico, si ha  $c_V = (5/2) R$ ]
 
$$\Delta U = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ J} \quad n c_V (T_1 - T_0) = n (5/2) R (T_1 - T_0) = n (5/2) R T_0 (1 - (P_0/P_1)^{1/2}) = (5/2) P_0 V_0 (1 - (P_0/P_1)^{1/2}) = - (5/6) L = 500 \text{ J} \quad [\text{con un po' di algebra!}]$$

$$Q = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ J} \quad L + \Delta U = L/6 = - 100 \text{ J}$$
2. Una quantità  $n$  di moli di un gas perfetto monoatomico è contenuta nel recipiente rappresentato in figura. Il recipiente è costituito da un cilindro di area di base  $S$  chiuso da un tappo di massa trascurabile scorrevole senza attrito. Al tappo è attaccata una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k$ ; notate che nella parte di recipiente in cui è contenuta la molla è stato fatto il vuoto, cioè sul tappo **non** agisce la pressione atmosferica. Inizialmente il sistema è in equilibrio, il gas si trova alla temperatura  $T_0$  e la molla si trova compressa per un valore  $x_0$  rispetto alla sua lunghezza di riposo  $l_0$ . Successivamente il gas viene riscaldato fino alla temperatura  $T_1$ . In corrispondenza del riscaldamento si osserva che la molla viene compressa ulteriormente, fino a raggiungere il valore  $x_1$ , con  $x_1 < x_0$ . [Si supponga che l'espansione del gas avvenga passando attraverso successivi stati di equilibrio]
 
  - a) Quanto valgono la pressione  $P_0$  del gas ed il volume  $V_0$  da lui occupato inizialmente?
 
$$P_0 = \dots\dots\dots \quad k x_0 / S \quad [\text{è la pressione dovuta alla forza della molla}]$$

$$V_0 = \dots\dots\dots \quad nRT_0/P_0$$
  - b) Come si scrive la relazione che lega la pressione  $P$  al volume  $V$  in questa trasformazione? [Suggerimento: usate la "geometria" del sistema!]
 
$$\dots\dots\dots \quad P = (k/S)x = (k/S)(V/S - l_0) = (k/S^2)V - kl_0/S$$
  - c) Quanto vale il lavoro  $L$  compiuto dal gas nella trasformazione?
 
$$L = \dots\dots\dots - L_{ELA} = - (k/2) (x_1^2 - x_0^2) \quad [\text{il lavoro del gas è opposto a } L_{ELA} \text{ compiuto dalla molla, che, sulla base delle leggi della meccanica, ha l'espressione appena scritta}]$$
  - d) Quanto vale il calore  $Q$  scambiato dal gas nella trasformazione? [Per un gas monoatomico, ricordate che è  $c_V = (3/2) R$ ]

$$Q = \dots\dots\dots L + \Delta U = - (k/2) (x_1^2 - x_0^2) + n(3/2)R (T_1 - T_0)$$

3. Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione ciclica "triangolare" rappresentata in figura. I punti A, B, C in figura corrispondono a valori delle variabili di stato  $P_A, V_A, T_A, P_B, V_B, T_B$ , e  $P_C, V_C, T_C$ , rispettivamente. Pressioni e volumi sono noti dal grafico, e valgono le seguenti relazioni:  $P_A = 2P_B$ ;  $V_B = 2V_A$ .



- a) Come si scrive la legge della trasformazione A→B, cioè la relazione che lega  $P$  e  $V$  in questo tratto? [Suggerimento: determinate la relazione funzionale basandovi su semplici considerazioni "geometriche" sulla figura riportata]

$$P = \dots\dots\dots ((P_B - P_A)/(V_B - V_A))V + ((P_A V_B - P_B V_A)/(V_B - V_A)) = (P_B/V_A)V + 3P_B \quad [\text{è l'equazione della retta che congiunge i punti A e C}]$$

- b) Quanto vale il lavoro  $L$  del gas nel ciclo? [Suggerimento: ricordate da cosa è rappresentato graficamente il lavoro in un ciclo termodinamico]

$$L = \dots\dots\dots (V_B - V_A)(P_A - P_B)/2 = P_B V_A/2 \quad [\text{è l'area del triangolo descritto dal ciclo}]$$

- c) Quanto valgono le temperature  $T_A, T_B$  e  $T_C$ ?

$$T_A = \dots\dots\dots P_A V_A/(nR) = P_A V_A/R = 2P_B V_A/R \quad [\text{legge dei gas perfetti con } n=1]$$

$$T_B = \dots\dots\dots P_B V_B/(nR) = P_B V_B/R = 2P_B V_A/R = T_A !!!$$

$$T_C = \dots\dots\dots P_C V_C/(nR) = P_B V_A/R = P_B V_A/R = T_A/2 \quad [\text{dato che } P_C = P_B \text{ e } V_C = V_A]$$

- d) Quanto vale il calore  $Q$  scambiato dal gas nei tratti A→B, B→C, C→A? Discutetene anche il segno. [Suggerimento: ricordate le espressioni di  $c_V = (3/2)R$  e  $c_P = (5/2)R$ ]

$$Q_{AB} = \dots\dots\dots nc_V(T_B - T_A) + L_{AB} = L + P_B(V_B - V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$$

$$Q_{BC} = \dots\dots\dots n c_P (T_C - T_B) = (5/2) (P_B V_A - P_B V_B) = -(5/2)P_B V_A < 0$$

$$Q_{CA} = \dots\dots\dots nc_V(T_A - T_C) = (3/2) (P_A V_A - P_B V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$$

- e) Quanto vale l'efficienza  $\eta$  di una macchina che funzioni secondo questo ciclo?

$$\eta = \dots\dots\dots L/(Q_{AB} + Q_{CA}) = 1/12 \quad [\text{dalla definizione di } \eta]$$

- f) Commentate su un possibile confronto con l'efficienza di una macchina di Carnot "paragonabile" (cioè che lavori tra le stesse temperature massima e minima):

$\dots\dots\dots$  sarebbe  $\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - T_C/T_A = 1/2$  e sarebbe giustamente maggiore di quella trovata per lo strano ciclo triangolare considerato

4. Sapete che la variazione di entropia  $dS$  per una "piccola" trasformazione **reversibile** in cui un gas scambia una quantità di calore  $dQ$  vale  $dS = dQ/T$ , dove  $T$  è la temperatura "istantanea" del gas (notate che stiamo supponendo trasformazioni che coinvolgono variazioni **infinitesime** delle quantità in gioco, immaginando che ad esse possano essere associate variazioni infinitesime "esatte" del calore, affermazione non del tutto corretta dato che il calore non è una variabile di stato). Considerate ora trasformazioni reversibili tra stati "distanti" e supponendo una mole di gas perfetto monoatomico.

- a) Quanto vale la variazione di entropia  $\Delta S$  per una trasformazione **adiabatica**?

$$\Delta S = \dots\dots\dots 0 \quad [\text{è } dQ = 0!!]$$

- b) Quanto vale la variazione di entropia  $\Delta S$  per una trasformazione **isocora** tra gli stati  $P_0 T_0$  e  $P_1 T_1$ ?

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{T_0}^{T_1} (nc_V dT)/T = (3/2) R \int_{T_0}^{T_1} (1/T) dT = (3/2) R \ln(T_1/T_0) = (3/2) R \ln(P_1/P_0) \quad [\text{dal primo principio è } dQ = dU = nc_V dT; \text{ facendo l'integrale viene il risultato}]$$

- c) Quanto vale la variazione di entropia  $\Delta S$  per una trasformazione **isobara** tra gli stati  $V_0 T_0$  e  $V_1 T_1$ ?

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{T_0}^{T_1} (nc_P dT)/T = (5/2) R \int_{T_0}^{T_1} (1/T) dT = (5/2) R \ln(T_1/T_0) = (5/2) R \ln(V_1/V_0) \quad [\text{dal primo principio stavolta è } dQ = dL + dU = nc_P dT; \text{ facendo l'integrale viene il risultato}]$$

- d) Quanto vale la variazione di entropia  $\Delta S$  per una trasformazione **isoterma** tra gli stati  $P_0 V_0 T_0$  e  $P_1 V_1 T_0$ ? [Suggerimento: notate che  $dU = 0$  ed esprimete  $dQ = PdV$ ]

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{V_0}^{V_1} PdV/T_0 = (nRT_0/T_0) \int_{V_0}^{V_1} (1/V) dV = R \ln(V_1/V_0) = R \ln(P_0/P_1) \quad [\text{vedi sopra}]$$