

Arduino improved e correnti parassite

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 2 - FF, 4 aprile 2016)

Questa nota ha un doppio scopo: da un lato, essa presenta alcune tematiche tipiche dell'acquisizione dati (con Arduino) e propone alcune possibili soluzioni a problemi comuni in questo ambito, dall'altra tratta dell'esperienza pratica sulle correnti parassite, il cui svolgimento può trarre beneficio dall'applicazione di tali soluzioni. Alcuni dei contenuti di questa nota potrebbero essere ritenuti "avanzati" rispetto alle conoscenze e alle ambizioni di un ordinario corso di Laboratorio 2. Di conseguenza, essi saranno trattati mantenendo, dove possibile, un carattere introduttivo. Tuttavia si sottolinea come trattare, anche in forma introduttiva, tali contenuti possa essere estremamente stimolante e ricco di possibili conseguenze, per cui si raccomanda la lettura attenta e partecipe di questa nota.

I. SEGNALE/RUMORE, CAMPIONE DI MISURE, TEMPO DI MISURA

È comune che, in fisica e in tutte le altre discipline scientifiche, vengano eseguite misure su sistemi costruiti in laboratorio. Almeno virtualmente, tali sistemi possono essere controllati, cioè, per esempio, costruiti ciclicamente. Infatti è comune che un esperimento possa essere ripetuto tante volte in maniera automatica, cioè che la misura possa essere eseguita in modo ripetitivo.

La conseguenza, che differenzia concettualmente le misure "osservative" da quelle "di laboratorio", è che si rende disponibile un *campione di misure*, ovvero che la stessa misura può essere eseguita per un *tempo maggiore*. Questo può comportare un ovvio aumento del rapporto segnale/rumore, fino a rendere intelligibili delle informazioni che altrimenti resterebbero mascherate dal rumore.

Per fare un esempio banale e non del tutto calzante, tutti sappiamo che, quando un filo "volante" viene collegato all'ingresso di un oscilloscopio, lo schermo mostra un rumore, con componenti anche ad alta frequenza, che indica una variazione della d.d.p. raccolta dal canale di ingresso dell'oscilloscopio. Se lo stesso filo viene collegato a un tester digitale, generalmente, non si osserva sul display alcuna variazione della lettura. Il motivo è semplice: il tester ha una *banda passante* molto limitata, cioè si comporta da integratore con un tempo di integrazione lungo rispetto al segnale catturato, che quindi viene "mediato a zero" (se alternato, come in genere è il rumore ad alta frequenza). Invece la banda passante elevata dell'oscilloscopio (50 MHz, per i nostri strumenti) permette di eseguire misure su tempi molto più rapidi, in cui alcune componenti ad alta frequenza, quelle minori della banda passante, non fanno in tempo a essere mediate a zero. Riferendo, se si dà alla misura un tempo sufficientemente lungo per essere eseguita, essa permette di annullare, o limitare, gli effetti di alcuni tipi di rumore, in particolare quelli alternati ad alta frequenza. Questo comporta un ovvio aumento del rapporto segnale/rumore, ma, naturalmente, impedisce di seguire la dinamica temporale dei segnali su una scala più rapida del tempo di integrazione.

Occorre subito chiarire che, nella realtà, esistono quasi

sempre dei limiti per l'estensione temporale delle misure: a parte l'ovvia conseguenza di dover aspettare a lungo per ottenere il risultato, acquisire un campione di misure, o aumentare il tempo di misura, significa accrescere la sensibilità nei confronti delle fluttuazioni che avvengono a tempi lunghi. Queste fluttuazioni hanno spesso a vedere con un *drift* delle condizioni sperimentali, per esempio legato a variazioni di temperatura o della configurazione meccanica, e in genere si sviluppano con tempi caratteristici dell'ordine delle decine o centinaia di secondi. Il loro carattere di inevitabilità, e le molteplici cause fisiche che possono determinarle, hanno spinto a individuarle come una tipologia di rumore, detto qualche volta *flicker noise* o rumore $1/f$, proprio a indicare che il suo contributo diventa sempre più grande a mano a mano che la frequenza della misura, cioè l'inverso del tempo di misura, tende a zero. Naturalmente esistono molte strategie che consentono di mitigare gli effetti di questa tipologia di rumore, ma indubbiamente la sua presenza deve essere tenuta in debita considerazione.

II. ESEMPI DI ACQUISIZIONE IMPROVED CON ARDUINO

Qui di seguito esaminiamo alcuni esempi di strategie di improvement del rapporto segnale/rumore, o comunque del grado di dettaglio delle misure, realizzate con Arduino. L'esperienza di riferimento è quello dell'*oscillatore smorzato* rLC , in cui si richiede di campionare nel tempo il segnale $V_C'(t)$, rappresentativo della d.d.p. presente, istante per istante, tra le armature del condensatore. In questa nota faremo riferimento alle misure svolte nella precedente esperienza pratica definendole "standard".

L'esperimento possiede naturalmente un carattere *ripetitivo*. Infatti la realizzazione delle condizioni iniziali e la misura si ripetono *periodicamente* nel tempo, grazie all'impiego del generatore di forme d'onda che fornisce un'onda quadra a una certa frequenza f_G . Dunque la misura può essere condotta in tanti intervalli di tempo, di durata massima $T_G/2 = 1/(2f_G)$ (i semiperiodi in cui l'onda quadra è nella sua semionda negativa e il diodo è in interdizione), che si ripetono con un periodo $T_G = 1/f_G$.

L'acquisizione tramite Arduino è *sincronizzata* attraverso il segnale TTL prodotto dal generatore: quindi sono disponibili tutti gli ingredienti necessari per implementare strategie di acquisizione in grado di sfruttare la ripetitività dell'esperimento.

Benché gli improvements discussi in questa nota non abbiano un carattere cruciale, nel senso che di fatto essi non permettono necessariamente sostanziali miglioramenti delle performance dell'esperimento rispetto all'impiego della strategia "standard", essi permettono di ovviare, almeno virtualmente, ad alcuni limiti che abbiamo già avuto modo di sottolineare.

Nel seguito, allora, mostreremo tre strategie finalizzate a (i) mediare su diversi cicli di acquisizione, (ii) allungare il tempo complessivo di acquisizione, (iii) aumentare artificialmente il sampling rate. In linea di principio, queste strategie potrebbero facilmente essere combinate tra loro, ma, visti gli scopi dell'esperienza, questo non viene eseguito.

A. Media e deviazione standard (harmaverage)

La prima, e più ovvia, strategia di acquisizione improved è quella che prevede di ottenere, dalla ripetizione periodica della misura, i valori della media e della deviazione standard dei dati registrati (la d.d.p. V_C' e il tempo t). I miglioramenti attesi con questo approccio sono sostanzialmente i seguenti:

- il processo di media permette di attenuare gli effetti delle fluttuazioni stocastiche del segnale (gli eventuali errori sistematici, per esempio dovuti a problemi del convertitore analogico/digitale di Arduino, non possono essere attenuati da questo processo);
- la possibilità di calcolare la deviazione standard nel campione di misure consente di stimare in maniera più accurata l'errore (stocastico) delle misure.

Entrambi questi improvements possono tradursi in un miglioramento del rapporto segnale/rumore: la media, infatti, attenua il rumore, e il rumore, inteso come fluttuazione stocastica, è determinato in maniera più accurata.

La realizzazione pratica di questa strategia è abbastanza immediata. Lo sketch di Arduino, disponibile in rete con il nome `harmaverage.ino`, è molto simile a quello già impiegato nella acquisizione "standard"; lo script di Python (`harmaverage_v1.py`) contiene invece delle modifiche necessarie a trasferire su arrays i dati letti in ogni ciclo di acquisizione, per poi eseguire il calcolo della media e della deviazione standard e la loro registrazione su un unico file.

Il numero di misure N_{cycle} su cui viene eseguita la media può essere impostato nello script, che consente anche di stabilire l'intervallo temporale nominale Δt di campionamento. Lo script produce un file con *quattro* colonne, che riportano nell'ordine t , σ_t , V_C' , $\sigma_{V_C'}$, dove con σ intendiamo la *deviazione standard* delle corrispondenti misure

sull'intero campione acquisito: i tempi sono misurati in unità di μs , le d.d.p. in unità arbitrarie di digitalizzazione (digit).

Come già affermato, la strategia consente di determinare l'incertezza stocastica delle misure, identificata con la deviazione standard sperimentale. Questa procedura può dare origine a un importante problema. Sappiamo già, sulla base delle esperienze svolte in precedenza, che la deviazione standard sperimentale sul valore della d.d.p. digitalizzata da Arduino può essere minore della sensibilità della misura (il singolo digit). Di conseguenza, specie se il campione di acquisizioni su cui si fa la media è relativamente piccolo, si possono ottenere deviazioni standard *nulle*. Oltre a non avere significato fisico, questa circostanza rende *impossibile* eseguire best-fit con il metodo del minimo χ^2 : infatti la definizione del χ^2 prevede una divisione per la deviazione standard, che dunque in questo caso comporta una divergenza.

Per evitare questo tipo di problemi, lo script di Python contiene un ciclo che analizza il valore di $\sigma_{V_C'}$ (e anche di σ_t) per verificare la presenza di zeri: se esistenti, questi vengono *arbitrariamente* rimpiazzati dal valore medio della deviazione standard sull'intero campione.

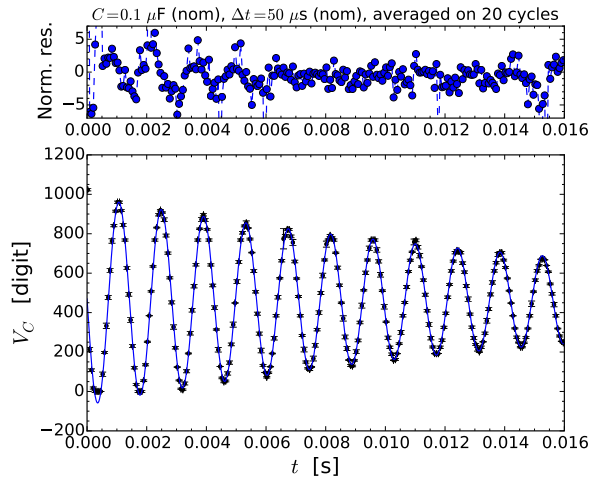


Figura 1. Esempio di dati acquisiti eseguendo la media su $N_{cycle} = 20$ cicli, per la scelta di C e Δt (nominali) indicati nel titolo: il pannello superiore mostra il grafico dei residui normalizzati, quello inferiore i dati, corredati delle barre di errore individuate attraverso deviazione standard del campione di misure, e il best-fit. I principali risultati sono $\omega = (4420.73 \pm 0.15)$ rad/s, $\tau = (17.40 \pm 0.02)$ ms, $\chi^2/\text{ndof} = 14991/251$. Il fit è stato eseguito lasciando liberi i parametri $A, \tau, \omega, \phi, V_{bias}$ (si veda la nota riguardante l'oscillatore smorzato *rLC*) e usando l'opzione `absolute_sigma = True`, decisamente consigliata visto il carattere stocastico delle incertezze impiegate.

La Fig. 1 mostra un esempio dei risultati: in questo caso la media è stata eseguita su 20 cicli. Non si discutono qui i risultati del best-fit (riportato con una linea continua nel pannello inferiore), poiché essi non sono rilevanti per la nostra discussione. Si sottolinea, però, che,

rispetto ai tipici best-fit dei dati acquisiti con il metodo “standard”, l’accordo appare migliore, come evidenziato dalla scala verticale del grafico dei residui normalizzati mostrato nel pannello superiore.

Questa osservazione conduce a supporre che l’incertezza convenzionale $\delta V'_C = \pm 1$ digit usata nell’approccio “standard” costituisca una sottostima delle effettive barre di errore. Se ne può concludere che l’incertezza della misura non è determinata solo da quella della digitalizzazione con Arduino (per questa, l’incertezza convenzionale appena citata rappresenta una sovrastima), ma anche dalle fluttuazioni di operazione del circuito dell’oscillatore, che contribuiscono a determinare la deviazione standard sul campione di misure.

B. Aumento della durata di acquisizione (harmlong)

Un noto limite di Arduino è nella scarsa disponibilità di memoria RAM. Nell’esperienza dell’oscillatore armonico smorzato, questo implica una limitata durata complessiva dell’acquisizione, che qui indichiamo con ΔT . Essendo registrabili solo 256 punti, si ha infatti $\Delta T = 256 \times \Delta t$. Usando per esempio $\Delta t = 50 \mu\text{s}$ nominali, $\Delta T \approx 13$ ms nominali. Nella realtà, il processo di conversione analogico/digitale operato dal microcontroller di Arduino prende del tempo, qui indicato come Δt_{conv} , che vale tipicamente tra 10 e 15 μs . Dunque l’intervallo temporale effettivo tra due campionamenti successivi, $\Delta t_{eff} = \Delta t + \Delta t_{conv}$ è maggiore del valore nominale, come anche la durata complessiva dell’acquisizione. In ogni caso, essa può risultare inferiore al tempo di smorzamento τ , almeno per alcune scelte sperimentali, per cui la singola acquisizione “standard” può non essere sufficiente a registrare dati sull’intero tempo di smorzamento.

Il carattere ciclico dell’esperimento permette di ovviare facilmente a questa limitazione. Infatti è sufficiente eseguire ciclicamente le acquisizioni facendole partire, rispetto all’istante di trigger, cioè all’istante in cui l’onda quadra passa alla semionda negativo, con un certo ritardo T_{delay} . Quindi i vari “blocchi” di acquisizione possono essere “incollati” l’un l’altro, in modo da ottenere un unico file che copre un intervallo temporale $\Delta T_{long} = N_{cycle} \Delta T$, con N_{cycle} numero dei cicli impiegati nella misura.

A questo scopo, lo sketch, disponibile in rete con il nome di **harmlong.ino**, è costruito in modo da eseguire in automatico $N_{cycle} = 4$ cicli di acquisizione. La prima acquisizione, che corrisponde a quella delle misure “standard”, parte con un ritardo praticamente nullo rispetto all’istante di trigger. Al termine di questa acquisizione, il tempo complessivo impiegato viene registrato da Arduino in una variabile intera e usato come ritardo T_{delay} per far partire la seconda acquisizione. Il processo viene poi ripetuto altre due volte. Lo script di Python, denominato **harmlong_v1.py**, provvede a registrare i dati dei quattro blocchi e a incollarli tra loro in un unico file composto, che copre l’intervallo temporale nominale $\Delta T_{long} = 4\Delta T$.

Come ricordate, Arduino può introdurre un ritardo via software attraverso i due comandi `delay()`; e `delayMicroseconds()`; che accettano come argomento degli interi rappresentativi del ritardo rispettivamente in ms e in μs . Nell’applicazione qui considerata, il ritardo dovrebbe essere determinato in unità di μs , allo scopo di ottenere che i blocchi successivi di acquisizione partano “esattamente” quando devono. Purtroppo, però, il comando `delayMicroseconds()`; funziona in modo regolare solo per ritardi inferiori a 16383 μs , che non sono sufficienti per i nostri scopi. Pertanto lo sketch impartisce il ritardo generato in unità di ms, approssimando il ritardo effettivamente necessario per la partenza dei blocchi di acquisizione successivi. Questo comporta una distribuzione non uniforme degli intervalli effettivi di campionamento. Di conseguenza, lo script usato per questa applicazione *non* fornisce la deviazione standard degli intervalli di campionamento effettivi Δt_{eff} , per cui l’incertezza sulla misura dei tempi deve essere indicata arbitrariamente, sulla base dei risultati ottenuti nelle acquisizioni “standard” (qualche μs è una ragionevole stima).

La Fig. 2 mostra un esempio dei risultati: si vede chiaramente come l’intervallo temporale complessivo della misura sia nettamente maggiore (quattro volte maggiore) rispetto a quello ottenuto nell’acquisizione “standard”. Esso copre una durata maggiore rispetto al tempo di smorzamento dell’oscillatore, realizzando un improvement che, in questo caso, si riferisce all’accresciuta capacità di seguire il processo di smorzamento. Infatti il decadimento esponenziale dell’ampiezza può essere seguito più agevolmente, almeno dal punto di vista “visivo”. Naturalmente, a causa della loro bassa ampiezza e della scarsa sensibilità del digitalizzatore, a tempi lunghi sono chiaramente visibili gli effetti della digitalizzazione (dati separati da un digit).

C. Aumento del sampling rate (harmint)

Alcune esperienze pratiche condotte in precedenza hanno indicato che esiste un limite minimo per l’intervallo di campionamento nominale Δt . Anche velocizzando il processo tramite “overclock” del microcontroller, come eseguito in questa esperienza, la digitalizzazione diventa instabile, e fornisce risultati potenzialmente erronei, se si sceglie un Δt sensibilmente inferiore a 50 μs .

D’altra parte, la misura dei tempi è un’operazione che può generalmente essere eseguita con grande accuratezza. Infatti, all’interno di Arduino è presente un orologio “al quarzo” che lavora a una frequenza nominale di 16.000 MHz. Questo orologio fornisce impulsi di *clock* che distano temporalmente, tra loro, per 62.5 ns. Poiché la misura dei tempi viene eseguita *contando* (deterministicamente, cioè in un modo non affetto da rumore analogico) questi impulsi, tale intervallo di tempo costituisce il limite di accuratezza fondamentale delle misure di tempo. Occorre rimarcare, però, che nella realtà l’intervallo di tempo “base” è un multiplo di questo valore (nella

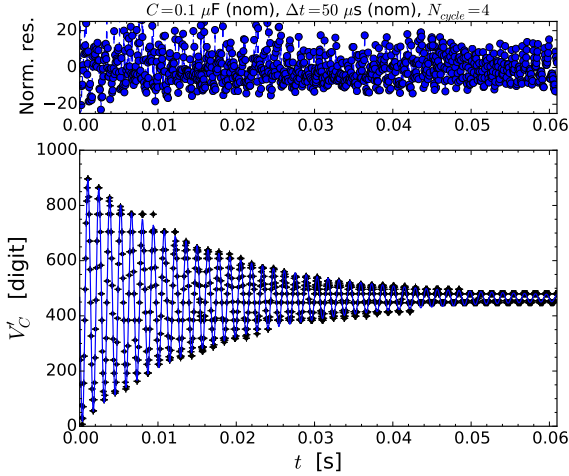


Figura 2. Esempio di dati acquisiti incollando quattro blocchi consecutivi di acquisizione, in modo da coprire un intervallo temporale complessivo esteso. La scelta di C e Δt nominali è indicata nel titolo: il pannello superiore mostra il grafico dei residui normalizzati, quello inferiore i dati, corredati delle barre di errore (scelte convenzionalmente come $\delta V'_C = \pm 1$ digit e $\delta t = \pm 2.5 \mu s$, valore ottenuto dalla standard deviation di Δt in una acquisizione “standard” effettuata immediatamente prima). I principali risultati sono $\omega = (4505.7 \pm 0.7) \text{ rad/s}$, $\tau = (17.12 \pm 0.02) \text{ ms}$, $\chi^2/\text{ndof} = 4.4 \times 10^5/1019$. Il fit è stato eseguito come descritto nella didascalia di Fig. 1.

nostra configurazione, esso dovrebbe essere o il doppio o il quadruplo, la specifica non è chiaramente ottenibile dai datasheets). In ogni caso, l’accuratezza nella misura dei tempi offerta da Arduino è molto migliore rispetto ai $50 \mu s$ che rappresentano il nostro limite di intervallo di campionamento.

In queste condizioni è facile individuare e realizzare una strategia che consente, grazie al carattere ciclico dell’esperimento, di ottenere intervalli di campionamento effettivi che possono scendere ben sotto i $50 \mu s$. Allo scopo è sufficiente realizzare una acquisizione composta di tanti blocchi successivi, come nel caso esaminato in precedenza. Per ogni blocco, l’intervallo di campionamento è fisso e vale, nel nostro caso, $\Delta t = 50 \mu s$ nominali. Quindi si fa in modo che il primo blocco parta, praticamente, in contemporanea con il trigger, mentre i blocchi successivi partono con un ritardo pari al primo a Δt_{int} , il secondo a $2\Delta t_{int}$, e così via. Nello sketch disponibile in rete, Δt_{int} è fisso a $10 \mu s$ nominali.

Questa modalità di acquisizione si chiama talvolta *interleaved*: essa fu introdotta già nei primi oscilloscopi digitali commercializzati negli anni ’80 dalla ditta svizzera LeCroy (in particolare, una sua variante era presente nel modello 9400, dove consentiva sampling rates fino a 5 GSa/s pur in presenza di un digitalizzatore da 100 MSa/s).

Lo sketch costruito per questo scopo, disponibile in rete con il nome `harmint.ino`, è ottimizzato per l’intervallo di campionamento nominale $\Delta t = 50 \mu s$ e prevede

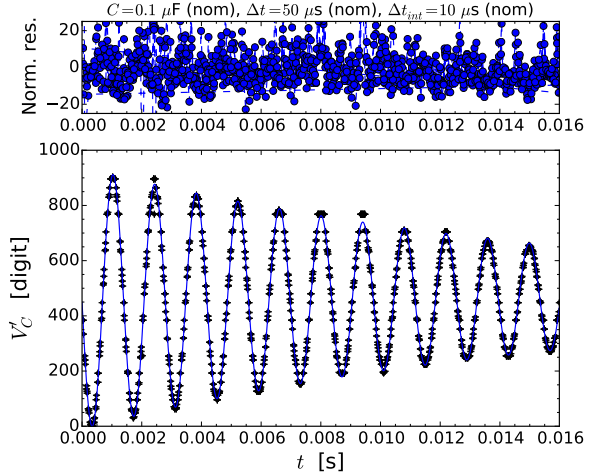


Figura 3. Esempio di dati acquisiti in modalità *interleaved*, cioè incollando quattro blocchi consecutivi di acquisizione realizzati imponendo un ritardo rispetto al trigger che aumenta con uno step $\Delta t_{int} = 10 \mu s$, in modo da avere una risoluzione temporale effettiva dell’ordine di $10 \mu s$. La scelta di C e Δt nominali è indicata nel titolo: il pannello superiore mostra il grafico dei residui normalizzati, quello inferiore i dati, corredati delle barre di errore (scelte convenzionalmente come $\delta V'_C = \pm 1$ digit e $\delta t = \pm 2.5 \mu s$, valore ottenuto dalla standard deviation di Δt in una acquisizione “standard” effettuata immediatamente prima). I principali risultati sono $\omega = (4505.2 \pm 0.7) \text{ rad/s}$, $\tau = (17.13 \pm 0.02) \text{ ms}$, $\chi^2/\text{ndof} = 4.8 \times 10^5/1019$. Il fit è stato eseguito come descritto nella didascalia di Fig. 1.

quattro blocchi di acquisizione che partono il primo praticamente in contemporanea con il trigger, e i successivi con ritardi $\Delta t_{int} = 10 \mu s$. Lo script Python di gestione, disponibile in rete con il nome `harmint_v1.py`, è una variante di quello discusso in sezione precedente. Esso costruisce un unico file da $256 \times 4 = 1024$ righe e due colonne (al solito, t in μs e V'_C in digit). Anche in questo caso lo script non individua la deviazione standard degli intervalli di campionamento effettivi Δt_{eff} che, a causa della presenza del ritardo di digitalizzazione Δt_{conv} , inevitabilmente fluttuante, non sono regolari.

La Fig. 3 mostra un esempio dei risultati: si vede chiaramente come la densità temporale dei punti acquisiti sia maggiore (quattro volte maggiore) rispetto all’acquisizione “standard”. L’improvement realizzato in questo caso è quindi nella capacità di acquisire il segnale con una migliore risoluzione temporale, che, almeno in linea di principio, può essere utile per ottenere best-fit più accurati.

D. Quadro riassuntivo

In sintesi, le denominazioni di sketch e script, gli scopi e le principali caratteristiche delle strategie di acquisizione improved disponibili sono riassunte in Tab. I.

Tabella I. Quadro riassuntivo delle strategie di acquisizione improved disponibili.

Nome sketch	Nome script	Scopo	File prodotto	Colonne del file
<code>harmaverage.ino</code>	<code>harmaverage_v1.py</code>	media su N_{cycle} cicli con calcolo di σ_t e $\sigma_{V'_C}$ da deviazione standard sperimentale	256 righe × 4 colonne	t [μs], σ_t [μs], V'_C [digit], $\sigma_{V'_C}$ [digit]
<code>harmlong.ino</code>	<code>harmlong_v1.py</code>	ΔT esteso ($\Delta T_{long} = 4\Delta T$) (4 blocchi di acquisizione consecutivi)	1024 righe × 2 colonne	t [μs], V'_C [digit]
<code>harmint.ino</code>	<code>harmint_v1.py</code>	modalità interleaved con $\Delta t_{int} = 10 \mu s$, $\Delta t = 50 \mu s$ (fissati, nominali)	1024 righe × 2 colonne	t [μs], V'_C [digit]

III. BEST-FIT E OUTLIERS

Prima di procedere con l'applicazione delle strategie di acquisizione qui presentate all'esperienza pratica sulle correnti parassite, è utile soffermarsi su un'altra tipologia di possibile miglioramento nell'analisi dati, che riguarda specificamente il best-fit. Per le nostre considerazioni facciamo riferimento ai dati di Fig. 1, che sono stati acquisiti mediando su 20 cicli e usando come barre di errore le deviazioni standard sul campione di misure.

Il grafico dei residui normalizzati e il valore del χ^2 ottenuto nel best-fit (citato in didascalia) sono una chiara indicazione che l'accordo tra dati e best-fit non è ancora ottimale. Risulta evidente che esistono dei dati che si discostano in maniera sensibile dalle previsioni. Tali discrepanze possono essere interpretate come legate a errori di tipo sistematico, che ovviamente non sono affetti dal processo di media, oppure dal fatto che il campione di misure ($N_{cycle} = 20$) è troppo piccolo per permettere di individuare la deviazione standard della *parent distribution*.

In alcuni casi, la presenza di errori sistematici, legati al comportamento di Arduino, può essere validata con buona confidenza. Per esempio, il primo punto del set di misure, che generalmente ha un valore molto alto, prossimo al massimo valore digitalizzato, può essere interpretato come dovuto alla presenza di *spikes* di corrente, e quindi di d.d.p.. Questi possono essere legati alla brusca variazione delle condizioni di funzionamento dell'oscillatore conseguente al rapido passaggio dalla semionda positiva a quella negativa dell'onda quadra, che genera un disturbo che si sovrappone alla lettura della d.d.p.. In altri casi, gli spikes possono essere dovuti all'accoppiamento del segnale di ingresso con disturbi impulsivi presenti in laboratorio. Inoltre, in altre acquisizioni può risultare evidente il (noto) comportamento erraneo di Arduino come usato nelle nostre condizioni sperimentali, che consiste in una sorta di "ritardo" nell'aggiornare la lettura digitalizzata, in particolare quando essa si trova in prossimità dei valori 256, 512, 768 digit.

Purché ci sia la ragionevole certezza che l'origine di

queste discrepanze è di carattere sistematico (certezza che qui immaginiamo, *arbitrariamente*, di avere), un modo comunemente accettato per limitare gli effetti delle discrepanze è rappresentato dalla cosiddetta rimozione degli *outliers*. Un outlier può essere definito come un dato sperimentale che si discosta per più di un certo valore (arbitrariamente scelto) rispetto alla previsione del best-fit. Naturalmente:

- la rimozione degli outliers deve essere motivata;
- essa deve essere sempre *dichiarata*;
- essa deve riguardare solo la procedura di best-fit (il grafico dei dati sperimentali *deve* riportare sempre tutti i punti acquisiti);
- gli outliers rimossi dal best-fit *devono* essere indicati nel grafico.

Nella routine di minimizzazione di default in Python, non esistono opzioni per la rimozione degli outliers. Tuttavia la grande potenza di Python permette di includere in uno script le istruzioni che permettono di:

1. eseguire un primo best-fit su tutti i dati disponibili;
2. individuare i dati che si discostano in valore assoluto per più di una certa soglia;
3. sovrapporre il grafico degli outliers a quello dei dati sperimentali, facendo in modo che gli uni siano ben distinguibili dagli altri;
4. eseguire un nuovo best-fit sul set di dati senza gli outliers;
5. eventualmente iterare la procedura.

La Fig. 4 mostra un esempio dei risultati. I dati impiegati sono gli stessi di Fig. 1, ma dal best-fit sono stati rimossi i dati lontani per più di tre barre di errore (scelta arbitraria) dal best-fit eseguito considerando l'intero set di dati. Gli outliers sono rappresentati con pallini rossi. L'effetto della loro rimozione è evidente nel grafico dei

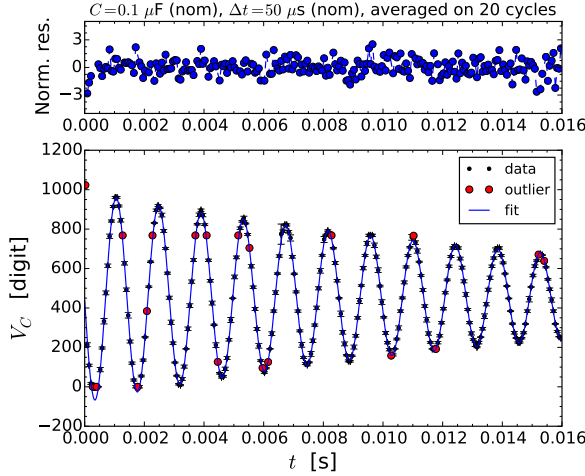


Figura 4. Stessi dati di Fig. 1 trattati con il metodo degli outliers, qui definiti arbitrariamente come i punti distanti per oltre 3 barre di errore dalla previsione del best-fit. Gli outliers sono indicati con pallini rossi nel pannello inferiore, mentre il pannello superiore mostra il grafico dei residui normalizzati. I principali risultati del best-fit sono $\omega = (4420.2 \pm 0.2)$ rad/s, $\tau = (17.55 \pm 0.05)$ ms, $\chi^2/\text{ndof} = 186/230$. Il fit è stato eseguito come descritto nella didascalia di Fig. 1.

residui normalizzati, in cui i “picchi” visibili nel pannello superiore di Fig. 1 sono scomparsi.

Questa procedura porta inevitabilmente a una diminuzione del χ^2 : per i dati dell’esempio si ottiene $\chi^2_{rid} = 0.81$. Supponendo (arbitrariamente) che gli outliers abbiano origine prevalentemente sistematica, e che le incertezze usate nel best-fit siano di origine prevalentemente stocastica (esse sono date dalla deviazione standard sperimentale), si può, per la prima volta in questo anno di corso, azzardare un *test del χ^2* e affermare, sulla base delle tabelle, che la significatività del best-fit è superiore all’80% (solo in meno del 20% dei casi si otterrebbe un χ^2 minore).

Infine, per poter affermare di aver esplorato ogni possibilità, il best-fit ai dati di Fig. 4 (dunque con la rimozione degli outliers) è stato anche compiuto propagando su V'_C l’incertezza sui tempi, σ_t . Lo scopo di questa operazione è quello di considerare nell’incertezza della procedura del minimo χ^2 anche le barre di errore sulla misura dei tempi. I risultati del best-fit non cambiano oltre le barre di errore, ma il χ^2 si riduce ulteriormente (in questo esempio si ottiene $\chi^2/\text{ndof} = 167/230$).

IV. CORRENTI PARASSITE

Questa sezione della nota si occupa dell’esperienza sulle *correnti parassite*. In questa esperienza, oggetti di materiali diversi e di differenti forme e dimensioni vengono inseriti nel core dell’induttore; il segnale $V'_C(t)$ viene registrato e vengono eseguiti best-fit, allo scopo di verifi-

care l’eventuale dipendenza su ω e, soprattutto, τ della presenza del materiale nel core.

Poiché devono essere eseguiti dei raffronti, è opportuno impiegare sempre la stessa strategia di acquisizione. Negli esempi riportati in seguito, la strategia scelta è quella *averaged*: non c’è alcun motivo per questa scelta, e siete invitati, nella vostra esperienza pratica, a scegliere autonomamente la strategia che ritenete migliore.

A. Breve background modellistico

La presenza di materiale all’interno del core dell’induttore comporta diversi effetti, che non possono essere modellati con precisione distinguendoli l’uno dall’altro. In una visione molto grossolana, gli effetti attesi possono essere ricondotti a due fenomeni, che qui sono elencati in ordine di rilevanza pratica:

1. l’eventuale variazione dell’intensità del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ nel materiale, dovuta alle sue “proprietà magnetiche”;
2. la formazione di correnti parassite e i conseguenti effetti in termini di “schermatura” del campo di induzione magnetica nel materiale e di dissipazione.

La corrente che fluisce nell’induttore è responsabile, secondo l’approccio delle equazioni di Maxwell, della creazione di un campo magnetico $\vec{H}$ che, a causa della forma degli avvolgimenti, sarà particolarmente intenso nel core dell’induttore stesso. In determinate condizioni, che qui supponiamo soddisfatte per i nostri scopi, esiste una relazione lineare tra $\vec{B}$ e $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (1)$$

con μ_0 permeabilità magnetica del vuoto e $\mu_r = \chi_M + 1$ permeabilità relativa del mezzo considerato (χ_M è detta suscettività magnetica).

La definizione di coefficiente di auto-induzione, o induttanza, per il nostro induttore recita $L = \Phi_S(\vec{B})/I$, dove il flusso del campo di induzione magnetica è calcolato sulla sezione S dell’induttore, e I è l’intensità della corrente che attraversa l’avvolgimento. A parità di corrente, L viene a dipendere da μ_r : supponendo che l’intero volume del core sia riempito di materiale e supponendo valida l’Eq. 1, L è atteso dipendere linearmente da μ_r .

I materiali impiegati nell’esperienza comprendono (leghe di) alluminio e (leghe di) ferro. Nel primo caso si è in presenza di un mezzo *paramagnetico*. Per i materiali paramagnetici (e anche per quelli diamagnetici), si ha $|\chi_M| \ll 1$ (in particolare, $\chi_{M,Al} \sim 10^{-5}$), per cui $\mu_r \simeq 1$. Di conseguenza, l’eventuale effetto del paramagnetismo (o del diamagnetismo, nel caso di mezzi diamagnetici) è del tutto trascurabile.

Per i materiali ferrosi, però, si può avere $\mu_r \gg 1$, anche fino a valori dell’ordine delle centinaia o migliaia. Dunque l’effetto della presenza di un mezzo *ferromagnetico* dovrebbe essere eclatante nelle nostre misure. In

una visione molto naïf, L dovrebbe aumentare di ordini di grandezza quando nel core vengono inseriti pezzi di (lega di) ferro, come si fa nell'esperienza pratica. Poiché nell'oscillatore armonico smorzato si ha $\omega = \sqrt{1/(LC) - 1/\tau^2}$, l'incremento di L dovrebbe risultare immediatamente visibile in una sensibile diminuzione di ω .

Anticipiamo da subito che questa sensibile diminuzione (dove per "sensibile" si intende di almeno un ordine di grandezza) non si osserva nell'esperienza pratica. Il motivo è collegato alla presenza delle cosiddette *correnti parassite*, o di *Foucault*, o, ancora, *eddy currents*.

La legge di Faraday stabilisce che

$$\oint \vec{E}^* \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}, \quad (2)$$

dove $\vec{E}^*$ è il campo elettrico indotto e la circuitazione è eseguita lungo una linea chiusa che fa da perimetro alla sezione S su cui è calcolata la variazione temporale del flusso del campo di induzione magnetica. Il segno meno presente al secondo membro, ovvero la cosiddetta *legge di Lenz*, significa che le correnti elettriche indotte si muovono in maniera tale da creare un campo magnetico indotto il cui flusso ha una variazione temporale opposta rispetto a quella del campo di induzione magnetica prodotto dalla corrente che circola nell'induttore. In soldoni, e tenendo conto della situazione sperimentale della quale ci occupiamo, le correnti indotte producono un campo magnetico la cui variazione nel tempo è opposta a quella del campo magnetico dovuto alla corrente che circola nell'induttore.

Gli oggetti che, nell'esperienza pratica, infiliamo nel core dell'induttore sono tutti conduttori, chi più e chi meno in funzione del materiale di cui sono fatti e anche dei dettagli costruttivi (se sono pieni, laminati, profilati, tagliati, o altro). Dunque essi sicuramente sostengono, più o meno facilmente a seconda di materiale e geometria, le correnti indotte, che, in questo contesto, prendono proprio il nome di correnti parassite. Esse hanno, in linea di principio, la stessa direzione della corrente che scorre nell'induttore. Per Faraday, ovvero Lenz, il loro verso deve però essere opposto a quest'ultima. Allora, all'interno del mezzo, ovvero all'interno della superficie su cui scorrono le correnti parassite, il campo di induzione magnetica prodotto dalla corrente che circola nell'induttore viene *schermato* a causa delle correnti parassite, cioè la sua intensità si riduce rispetto a quanto si avrebbe in assenza delle correnti parassite. Per questo motivo l'effetto che la presenza del materiale ha su L è meno banale di quanto ci si potrebbe aspettare: in particolare, anche in presenza di materiali ferrosi l'aumento di L non può raggiungere i valori attesi sulla base della conoscenza, o della stima, di μ_r .

Questo effetto di schermatura è sicuramente rilevante. Tuttavia esso non è il principale effetto legato alla presenza delle correnti parassite. Infatti esse sono collegate principalmente a fenomeni *dissipativi*, che sono dovuti alla circostanza che il materiale in cui scorrono le correnti

parassite è un (ordinario) conduttore, e pertanto le correnti parassite incontrano una *resistenza*, il che equivale a dire che c'è un fenomeno dissipativo.

Nel nostro oscillatore armonico, la dissipazione è associata al tempo di smorzamento τ la cui riduzione testimonia proprio del verificarsi di dissipazione.

Riassumendo e semplificando per quanto possibile, la presenza del materiale nel core dell'induttore produce, in ordine decrescente di importanza:

- la diminuzione di τ dovuta alla dissipazione prodotta dalle correnti parassite;
- un aumento di ω a causa della diminuzione di τ nella $\omega = \sqrt{1/(LC) - 1/\tau^2}$;
- un'eventuale diminuzione di ω in caso di materiale ferromagnetico e del conseguente aumento di L ;
- un eventuale aumento di ω dovuto all'effetto di schermatura del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ nel materiale, provocato dalle correnti parassite.

La relazione tra tutti questi fenomeni e come essi dipendano dal materiale e dalle forma e dimensioni degli oggetti infilati nel core è un argomento difficile da prevedere: la misura diretta delle caratteristiche (ω e τ) dell'oscillatore armonico smorzato nelle varie condizioni costituisce quindi un'utile evidenza sperimentale di quanto predetto.

B. Risultati sperimentali

I risultati sperimentali sono stati acquisiti usando la modalità *averaged*, cioè le acquisizioni sono state mediate su $N_{cycle} = 20$ cicli in modo da ottenere un campione di misure, di cui sono state estratte la media e la deviazione standard, quest'ultima presa come rappresentativa delle barre di errore σ_t e σ_{V_C} . I best-fit sono stati eseguiti con la rimozione degli outliers, regolando in questo caso la soglia di esclusione a 5 barre di errore allo scopo di mantenere un numero decente di dati sperimentali nel best-fit. Inoltre nei best-fit è stata eseguita la propagazione dell'incertezza sulla misura dei tempi. In tutti i casi è stato impiegato $C = 0.1 \mu\text{F}$, con tolleranza 10%, e si sono usati i due avvolgimenti dell'induttore in serie ($L \simeq 0.5 \text{ H}$, ovviamente in assenza di materiale nel core). L'intervallo di campionamento nominale è stato regolato a $\Delta t = 50 \mu\text{s}$.

Naturalmente questa scelta (di strategia di acquisizione, di best-fit, e di valori dei componenti) non è obbligatoria: nell'esperienza pratica potete sicuramente fare altre scelte.

La Fig. 5 mostra alcuni esempi delle misure eseguite ponendo diversi oggetti nel core dell'induttore. Al solito, le figure riportano il grafico dei residui normalizzati nel pannello in alto, e i dati sperimentali con il best-fit (gli outliers sono identificati da pallini rossi) nel pannello in basso.

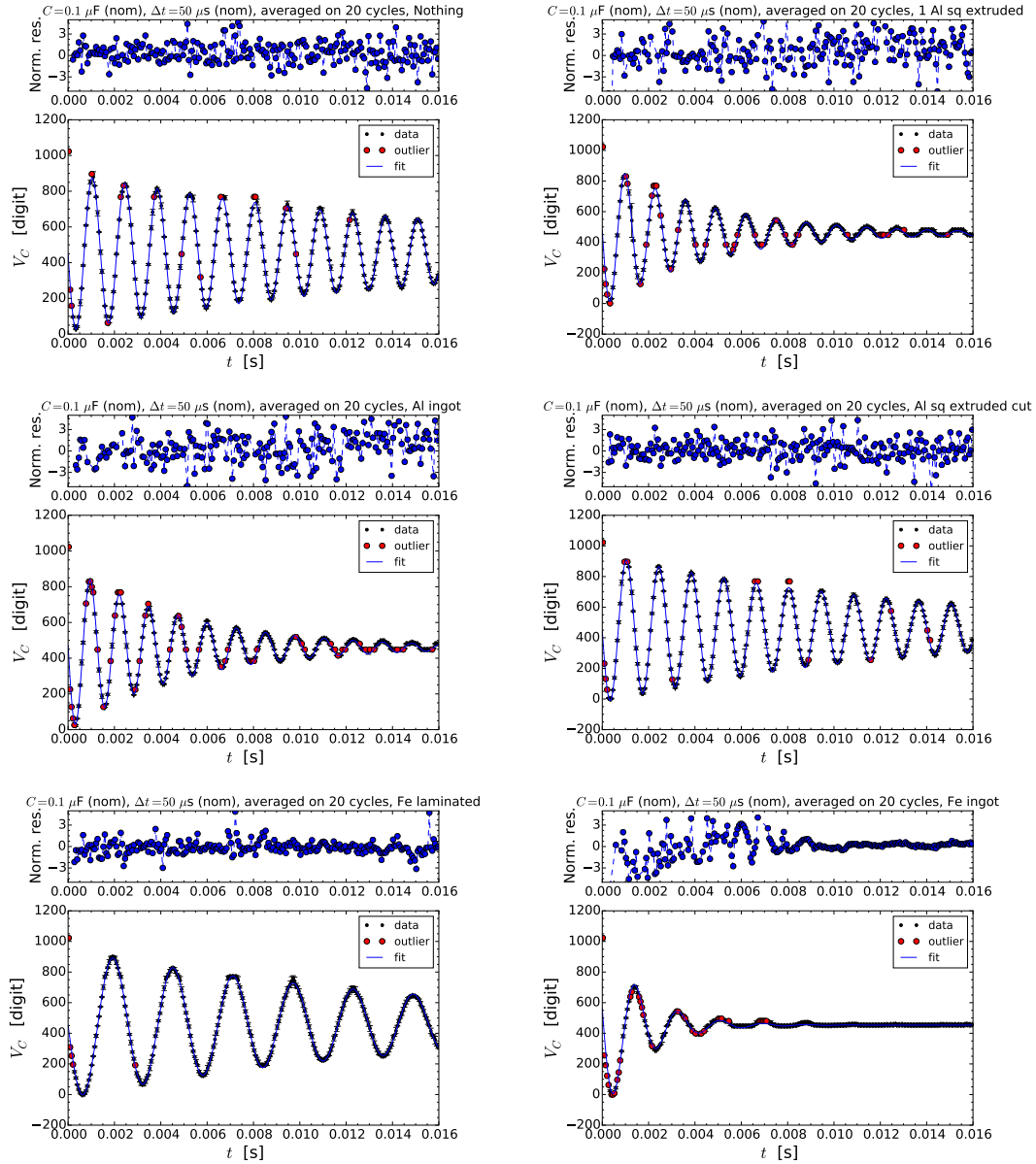


Figura 5. Esempi di misure in presenza di diversi oggetti nel core dell'induttore, come indicato nel titolo dei grafici. La descrizione delle figure e i risultati dei best-fit sono riportati nel testo e in Tab. II.

Si vede chiaramente come i risultati diano luogo a diverse casistiche, che esamineremo dopo aver presentato i principali risultati dei best-fit. Per il momento accontentiamoci di rimarcare alcuni aspetti:

- infilare nel core dell'alluminio non è sufficiente a modificare sensibilmente i risultati: nel caso del profilato segato in longitudinale (indicato con Al sq extruded cut nella figura), l'oscillatore armonico si comporta in maniera simile a quando il core è vuoto (Nothing, in figura);
- tuttavia, nel caso del pieno di alluminio (Al ingot, in figura) e anche del profilato a forma quadrata (1

Al sq extruded, in figura) si osserva una sensibile riduzione del tempo di smorzamento τ ;

- infilando del ferro, poi, si osserva certamente un aumento dello pseudoperiodo di oscillazione, cioè una *diminuzione* della frequenza ω , in particolare nel caso del materiale laminato (Fe laminated, in figura);
- infine, infilando del ferro pieno (Fe ingot, in figura) si ottiene un andamento sensibilmente smorzato.

Possiamo quindi inferire che il comportamento dell'oscillatore in presenza di materiale nel core dell'induttore dipenda dal tipo di materiale, ma anche dalla forma e

Tabella II. Principali risultati dei per diverse scelte degli oggetti infilati nel core dell'induttore.

Mat	Forma	ω [rad/s]	τ [ms]	χ^2/ndof	L [H] ($\pm 10\%$)
niente	-	4473.0 ± 0.4	17.50 ± 0.05	372/235	0.50
Al	pieno	4977.3 ± 0.7	5.05 ± 0.01	667/201	0.40
Al	1 profilato	4816.7 ± 0.8	4.52 ± 0.01	708/211	0.43
Al	2 profilati	4824.1 ± 0.6	5.81 ± 0.01	644/236	0.43
Al	3 profilati	4813.7 ± 0.5	6.01 ± 0.01	707/233	0.43
Al	6 profilati	4809.7 ± 0.6	5.96 ± 0.01	589/235	0.43
Al	profilato segato	4482.5 ± 0.4	13.70 ± 0.04	328/235	0.50
Al	lamine	4474.1 ± 0.4	16.81 ± 0.04	392/240	0.50
Fe	1 lamina	4009.0 ± 0.3	11.54 ± 0.03	364/235	0.62
Fe	2 lamine	3819.2 ± 0.3	12.19 ± 0.03	344/238	0.68
Fe	3 lamine	3701.5 ± 0.3	12.62 ± 0.04	435/239	0.73
Fe	4 lamine	3623.4 ± 0.4	13.39 ± 0.04	399/243	0.76
Fe	5 lamine	3551.4 ± 0.3	13.85 ± 0.04	351/246	0.79
Fe	laminato	2423.3 ± 0.4	16.13 ± 0.08	181/246	1.7
Fe	pieno	3405 ± 2	1.72 ± 0.01	391/215	0.84

dalle dimensioni dell'oggetto infilato, il che è in accordo con quanto previsto in precedenza.

La Tab. II riporta i principali risultati dei best-fit, incluso il valore di L dedotto dalla $\omega = \sqrt{1/(LC) - 1/\tau^2}$, che si suppone valida per tutti i casi esaminati. Viste le piccole incertezze per i parametri dei best-fit, l'incertezza su L è dominata dalla tolleranza su C . Ovviamente, però, essendo usato sempre lo stesso condensatore, le eventuali variazioni di L anche minori rispetto all'incertezza sono significative.

Si osserva come nel caso dell'alluminio i valori di ω ottenuti siano sempre maggiori del valore registrato in assenza di materiale. Questo suggerisce che l'induttanza non aumenti. Nell'ambito dell'ampia incertezza con cui essa è determinata, si osserva come L assuma il suo valore minimo (per il materiale Al) quando viene infilato il lingotto pieno (sezione quadrata di circa $36 \times 36 \text{ mm}^2$). Questa è una conferma dell'effetto di schermatura del campo di induzione magnetica dovuto alle correnti parassite.

Nel caso di impiego dei profilati cavi a sezione quadrata, infilati eventualmente uno nell'altro, si vede come L assuma un valore costante (entro l'ampia incertezza già menzionata). Dunque un solo profilato è sufficiente a sostenere correnti parassite tali da esercitare un forte effetto di schermatura. Infatti infilando ulteriori profilati (di dimensioni trasversali via via decrescenti) non si hanno variazioni di particolare rilievo in L .

Le correnti parassite sono poi evidentemente collegate a una sensibile diminuzione di τ . È interessante notare che il τ più basso (per il materiale Al), ovvero l'effetto dissipativo comparativamente più rilevante, si ha quando si impiega un singolo profilato. Questo può tentativamente essere interpretato come dovuto alla maggiore resistivi-

tà del materiale, conseguente al processo di profilatura tramite estrusione. L'aumento della resistività può infatti spiegare l'incremento degli effetti dissipativi. Non è chiaro (ma potete formulare ipotesi) perché infilando ulteriori profilati si osservi un incremento di τ , cioè una diminuzione degli effetti dissipativi.

Per l'oggetto costituito da tante lamine di Al unite tra loro con nastro adesivo, l'oscillatore si comporta in maniera molto simile a quando non c'è alcun materiale nel core. Per esercitare i loro effetti, le correnti parassite devono scorrere su un circuito chiuso, cioè devono richiudersi "su se stesse". Per una singola lamina, si può ipotizzare che questo sia più difficile da ottenere. Mettendo tante lamine a contatto meccanico, di norma la conduzione elettrica è molto scarsa (l'alluminio ha uno strato di ossido superficiale, per avere contatto elettrico occorre premere con forza in modo da rimuovere meccanicamente questo strato). In altre parole, nel pacco di lamine di alluminio le correnti parassite sono fortemente impedito: rispetto alla situazione senza materiale infilato, si osserva un debole aumento degli effetti dissipativi, ma non c'è nessuna evidenza di cambiamenti significativi di ω (e dunque di L).

Simili conclusioni possono essere tratte per il profilato di alluminio segato per lungo: anche qui le superfici a contatto sono attese presentare una resistenza tale da interrompere, almeno parzialmente, il flusso delle correnti parassite. Questo spiega perché gli effetti riscontrati, sia su τ che su ω , siano molto meno rilevanti che non per il profilato "intero" (non segato).

Infilando del ferro, invece, si osserva generalmente una diminuzione di ω , accompagnata da un aumento di L che va anche ben al di là dell'ampia incertezza associata al suo valore. Usando lamine di ferro, si osservano effet-

ti dissipativi comparativamente molto meno rilevanti che con l'oggetto di ferro pieno. Anche in questo caso si osserva un andamento simile a quello riscontrato per i profilati di alluminio: aggiungendo più lamine (appoggiate l'una sull'altra), si ottiene un aumento di τ , che suggerisce una riduzione degli effetti dissipativi. Allo stesso tempo, si vede come ω diminuisca. La sua diminuzione potrebbe causare una riduzione della forza elettromotrice indotta per effetto Faraday (ricordate che la derivata temporale al secondo membro di Eq. 2 implica che ω vada a moltiplicare), e quindi delle correnti parassite e dei conseguenti effetti dissipativi.

In ogni caso, la presenza delle lamine di ferro provoca un aumento di L . Le lamine impiegate hanno uno spessore nominale di 0.5 mm (e una larghezza paragonabile alla dimensione trasversale del core dell'induttore, che vale circa 36 mm). L'aggiunta di ogni singola lamina provoca quindi il riempimento di circa $1/72$ della sezione del core con materiale ferromagnetico. In effetti, L aumenta con il numero di lamine infilate nel core, ma questo aumento non è lineare, probabilmente a causa dell'effetto di schermatura del campo $\vec{B}$ prodotto dalle correnti parassite (seppur deboli vista la geometria laminare del materiale). Inoltre, per il materiale delle lamine ci si aspetta (da altre misure sperimentali) $\mu_r > 10^2$, per cui l'incremento di L dovrebbe essere più brusco di quanto osservato. Di nuovo, la spiegazione della discrepanza può essere ricollegata all'effetto di schermatura di $\vec{B}$ dentro il materiale.

Il valore di L aumenta nel caso dell'oggetto costituito da tante lamine di ferro sovrapposte e tenute assieme con viti e dadi. Questo oggetto è praticamente costituito da circa 25 lamine del tipo prima descritto, per cui quasi la metà della sezione dell'induttore viene riempita di materiale ferromagnetico. In queste condizioni, L aumenta di un fattore 1.5 (abbondante) rispetto all'assenza di materiale nel core. In contemporanea, τ diminuisce di poco. Questo può essere spiegato con l'interruzione delle linee di corrente parassite, operato dall'isolamento elettrico tra le lamine (che sono verniciate).

Infine, usando il pieno di ferro a sezione quadrata (di dimensioni circa $20 \times 20 \text{ mm}^2$) si ha un forte smorzamento, che permette di osservare solo pochi pseudo-periodi di oscillazione. In queste condizioni, L assume il suo massimo valore in assoluto, risultando oltre 3 volte maggiore del valore misurato in assenza di materiale. Entrambi queste osservazioni possono essere spiegate con le caratteristiche del materiale, dotato di un rilevante μ_r ma anche di una grande resistività.

V. TRASFORMATI DI FOURIER E FFT

Quest'ultima sezione della nota riguarda un argomento estremamente profondo dal punto di vista della matematica e incredibilmente ricco in termini di conseguenze. Di questo argomento si dà qui solo un breve cenno, rimandando per approfondimenti, dimostrazioni e chiarimenti

agli altri corsi. Infatti dell'argomento in questione, che riguarda la *trasformata di Fourier* dei segnali acquisiti, a noi in questa sede interessa solo l'aspetto numerico, cioè la cosiddetta *FFT* (Fast Fourier Transform), o, meglio *DFT* (Discrete Fourier Transform), che rappresenta un metodo per il calcolo della trasformata di Fourier a partire da dati acquisiti per punti discreti. Applicheremo questo metodo a qualche segnale registrato sperimentalmente in specifiche condizioni, e dall'analisi della FFT trarremo delle semplici conseguenze, in vista di ulteriori sviluppi che affronteremo in una prossima esperienza pratica.

Per essere estremamente grossolani e animati da senso pratico, possiamo vedere la trasformata di Fourier come un'estensione del concetto di *serie* di Fourier che già abbiamo incontrato e utilizzato nel nostro corso. Abbiamo in particolare già mostrato come una generica funzione *periodica* di frequenza angolare ω possa essere espressa come serie di (tante) funzioni seno e coseno, ognuna di frequenza angolare $k\omega$, con k intero. I pesi della somma li abbiamo definiti *coefficienti* dello sviluppo in serie di Fourier, e, all'epoca, abbiamo anche stabilito una regola per la loro determinazione.

La trasformata di Fourier rappresenta in pratica l'applicazione dello stesso concetto a funzioni *non periodiche*, ma dipendenti dal tempo secondo un andamento "qualsiasi". Detta $g(t)$ una tale funzione, si ha che la sua trasformata di Fourier è

$$\tilde{g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(j2\pi ft) dt, \quad (3)$$

dove $j = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria e con $f = \omega/(2\pi)$ indichiamo una frequenza.

Scriviamo qui di seguito qualche commento all'Eq. 3, rimandando, al solito, ad altri testi e altri corsi per ulteriori precisazioni di carattere formale e sostanziale:

- l'operatore trasformata di Fourier lega la dipendenza della funzione a due variabili indipendenti *una coniugata dell'altra*. Per noi, qui, queste variabili sono il tempo t e la frequenza f , legate dalla semplice relazione dimensionale $t = 1/f$.
- Paragonata alla serie di Fourier di cui abbiamo già discusso, la trasformata di Fourier presenta alcune differenze formali: in primo luogo, al posto della serie si ha un integrale, volendo in conseguenza del fatto che la funzione non è periodica e che quindi devono essere considerati infiniti contributi di frequenza. Inoltre, per ragioni prevalenti di praticità matematica, al posto delle espressioni di seno e coseno si preferisce qui usare l'espressione di Eulero, cioè l'esponenziale immaginario che contiene in sé i seni e i coseni.
- Esiste un operatore inverso, detto *antitrasformata* di Fourier, che, in pratica, si ottiene sostituendo nella Eq. 3 f con t e cambiando segno all'argomento dell'esponenziale.

Nella pratica, la funzione $\tilde{g}(f)$ così definita indica le componenti che rappresentano il peso dei contributi a frequenza f nella ricostruzione della $g(t)$. Usando un altro linguaggio, si può dire che $\tilde{g}(f)$ rappresenta lo *spettro* (la parola spettro ha a che fare con la dipendenza dalla frequenza) delle componenti di Fourier a frequenza angolare f della $g(t)$ considerata. Tale spettro è, per sua definizione, complesso. Tralasciando commenti, pur interessantissimi, di carattere formale e concettuale, se si è interessati a conoscere l'*ampiezza* di questi coefficienti ci si può limitare a calcolare il *modulo* della Eq. 3. Lo spettro così ottenuto, cioè il grafico di $|\tilde{g}(f)|$, rappresenta la (densità) dell'ampiezza delle componenti a diverse frequenze che, sovrapposte fra loro, danno la $g(t)$. Questo spettro non è necessariamente normalizzato, per cui nel seguito non daremo alcuna importanza al “valore numerico” della grandezza $\tilde{g}(f)$.

Dal punto di vista matematico, l'espressione di Eq. 3 è ricchissima di conseguenze e implicazioni, sia nella fisica classica che in quella quantistica (e relativistica). Tuttavia, come al solito, la fisica non è la patria degli integrali, e neanche delle derivate, e il calcolo esplicito dell'integrale che compare nella definizione può essere affrontato solo per casi “modello”, quelli che interessano la soluzione di semplici, o semplicissimi, esercizi.

Esistono dei validi strumenti numerici che permettono di eseguire il calcolo in maniera discreta, cioè partendo da una $g(t)$ definita per punti, che per esempio rappresenta una misura. Questi strumenti, uno dei quali è appunto la FFT, sono presenti in tutti i software di analisi dati, compreso, ovviamente (e con diverse implementazioni che qui non discuteremo), Python.

Qui applicheremo la FFT per calcolare la trasformata di Fourier della $V_C'(t)$ del nostro oscillatore. In particolare, essendo le nostre misure *reali* ed essendo noi interessati a verificare l'*ampiezza* in *unità arbitrarie* dei coefficienti di Fourier come definita sopra, il comando di Python che useremo sarà `abs(numpy.fft.rfft(V))`, dove V rappresenta l'array di dati della nostra misura e `abs` indica l'operazione di calcolo del modulo dell'array complesso prodotto dalla FFT. Questo comando genererà un nuovo array, che graficheremo in funzione di $\omega = 2\pi f$. L'uso di ω invece che f consente infatti un più immediato raffronto con i risultati dei best-fit discussi in precedenza.

Prima di procedere, facciamo qualche chiarimento sulla FFT, o DFT, così come essa è implementata in Python. Il problema principale da risolvere riguarda la scala di f , cioè quanto valgono il minimo e il massimo valore delle f , e quindi delle ω , da usare come asse orizzontale per il nostro grafico. Infatti, se l'Eq. 3 non dà alcuna indicazione sulla presenza di limiti in f , il calcolo numerico (discreto) impone delle regole precise.

Senza entrare nei dettagli, le regole principali sono le seguenti:

1. la FFT funziona al meglio, cioè senza la necessità di applicare artifici particolari, se l'array di partenza, quello che rappresenta la $g(t)$ (in forma discreta,

per punti), cioè quello che abbiamo definito V , è composto da 2^n punti, con n intero.

2. Nell'implementazione da noi usata, l'array trasformato è fatto da $2^{n-1} + 1$ punti. Negli esempi, useremo arrays di partenza costituiti da $2^{11} = 2048$ punti: la FFT sarà allora rappresentata da arrays reali di 1025 punti. Il punto “in più”, quello che rende dispari questa espressione, si riferisce al valore per $\tilde{g}(f = 0)$, che nel nostro caso assume un valore sensibilmente diverso da zero per la presenza del bias (V_{bias}) necessario per far lavorare Arduino con d.d.p. positive.
3. Lo spettro di Fourier ottenuto parte sempre da $f = 0$ e si estende fino a $f_{max} = 1/(2\Delta t_{eff})$, dove, per noi, Δt_{eff} rappresenta l'intervallo temporale effettivo tra due campionamenti successivi.
4. La risoluzione in frequenza dello spettro ottenuto, cioè la distanza Δf (in unità di f) tra due punti consecutivi dello spettro, è ovviamente pari a $f_{max}/(2^{n-1})$. Poiché l'intervallo complessivo di durata dell'acquisizione è $\Delta T = 2^n \Delta t_{eff}$, si ha anche $\Delta f = 1/\Delta T$. Visto che l'intervallo di campionamento effettivo Δt_{eff} è, nelle nostre condizioni, fluttuante per la presenza del tempo di conversione analogico/digitale Δt_{conv} , nella pratica ci serviremo proprio della misura di ΔT per stabilire la scala in frequenza dei nostri spettri.

Osservate che la risoluzione in frequenza Δf è migliore quanto più grande è il numero di punti che costituiscono l'array originario. Negli esempi riportati qui nel seguito, è stato impiegato uno sketch (disponibile in rete con il nome di `harmextralong.ino` assieme allo script di gestione, `harmextralong_v1.py`) realizzato modificando lo sketch `harmlong.ino`, discusso in precedenza, allo scopo di ottenere acquisizioni da 2048 punti (8 blocchi consecutivi da 256 punti incollati l'un l'altro). Inoltre negli esempi è stato impiegato un intervallo di campionamento nominale $\Delta t = 50 \mu s$.

La Fig. 6 mostra alcuni esempi: nel pannello superiore sono rappresentati gli spettri di Fourier per tre diverse acquisizioni (senza materiale nel core dell'induttore, in presenza del pieno di alluminio e del pieno di ferro), nel pannello inferiore sono rappresentati gli spettri di Fourier delle funzioni ottenute dai best-fit dei dati di partenza. Si può notare come in quest'ultimo caso gli spettri siano “più regolari”: infatti la rumorosità dei dati originari, in particolare nella regione a tempi molto lunghi in cui sono ben visibili gli effetti del campionamento (si veda anche Fig. 2 e si tenga presente che qui la durata complessiva dell'acquisizione è doppia, dato che i punti sono 2048 invece di 1024), produce effetti poco piacevoli negli spettri FFT, che sono invece rimossi usando come array da trasformare quello ottenuto dai best-fit.

Nei tre casi considerati, i best-fit forniscono i seguenti risultati per ω e τ : $\omega_{Nothing} = (4474.2 \pm 0.4) \text{ rad/s}$, $\tau_{Nothing} = (17.3 \pm 0.1) \text{ ms}$; $\omega_{Al} = (4994 \pm 3) \text{ rad/s}$,

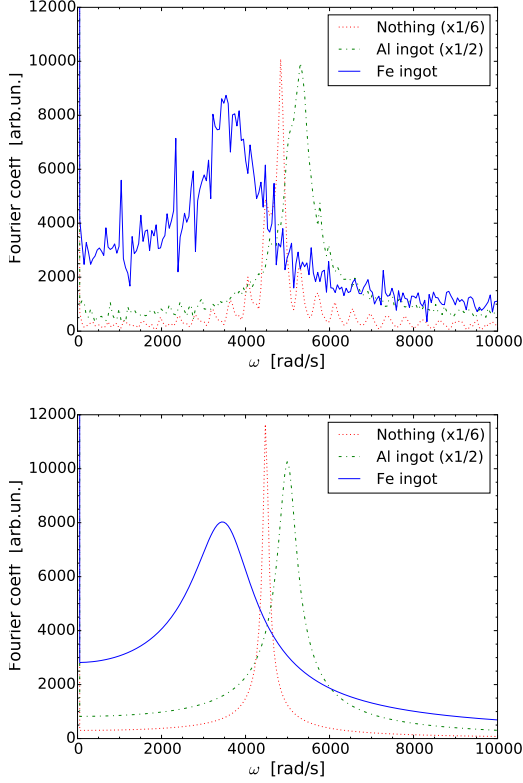


Figura 6. Spettri FFT per alcune misure eseguite nell'esperienza pratica, condotte in assenza di materiale nel core, oppure in presenza dei pieni di alluminio e ferro, come indicato in legenda. I fattori moltiplicativi riportati in legenda sono stati impiegati per chiarezza di rappresentazione. Il pannello superiore si riferisce a spettri FFT ottenuti direttamente dalle misure, eseguite come discusso nel testo. Quello inferiore si riferisce a spettri FFT eseguiti sui best-fit ai dati sperimentali. Le unità dell'asse verticale sono arbitrarie e non hanno alcun significato fisico diretto.

$\tau_{Al} = (4.85 \pm 0.07)$ ms; $\omega_{Fe} = (3488 \pm 11)$ rad/s, $\tau_{Fe} = (1.42 \pm 0.03)$ ms. È immediatamente evidente, specie se si guardano gli spettri ottenuti dai best-fit, che i coefficienti determinati tramite FFT *riportano quantitativamente* informazioni relative a ω e τ dell'oscillatore.

In particolare, gli spettri, che hanno un'evidente forma a campana più o meno asimmetrica a seconda dei casi, sono:

- piccati in corrispondenza dei valori della *frequenza di risonanza* ω trovati con i best-fit, o nelle loro vicinanze;
- “larghi” in misura inversamente proporzionale al *tempo di smorzamento* τ ;
- relativamente “alti” in misura grosso modo inversamente proporzionale alla loro larghezza (si

notino i fattori moltiplicativi usati per le varie rappresentazioni, scritti nelle legende).

Ora, quanto qui riportato a proposito della FFT può essere considerato un semplice giochino, abbastanza fine a se stesso. Questo è in parte vero, ma c'è un messaggio che vale la pena sottolineare e ricordare. L'esecuzione dello spettro FFT permette di ottenere un'analisi *nel dominio delle frequenze* a partire da dati registrati *nel dominio del tempo*. In una prossima esperienza, analizzeremo l'oscillatore armonico *RLC* smorzato in presenza di una forzante sinusoidale. I dati, che saranno interpretati scrivendo l'equazione del circuito usando le impedenze complesse, cioè il metodo dei fasori che mostra tutta la sua potenza nelle analisi nel dominio delle frequenze, condurranno a risultati molto simili a quelli qui trovati.

In particolare, misurando una grandezza rappresentativa dell'oscillazione forzata a regime e per diverse frequenze, produrremo spettri che hanno la forma di una campana asimmetrica, sono piccati alla frequenza di risonanza dell'oscillatore ($\omega = \sqrt{1/(LC) - 1/\tau^2}$), hanno una larghezza (che definiremo in termini matematici come fwhm, cioè full-width at half-maximum) inversamente proporzionale a τ . Come vedremo nell'esperienza pratica, l'altezza al picco degli spettri registrati non mostrerà la dipendenza che qui abbiamo trovato, cioè non diminuirà necessariamente all'aumentare della larghezza. Infatti, la diminuzione nell'altezza del picco che si osserva in Fig. 6 ha a che vedere con la circostanza che parte dell'energia dell'oscillatore viene dissipata dalle correnti parassite che scorrono negli oggetti inseriti nel nucleo. Nell'esperienza pratica, invece, lasceremo vuoto il nucleo, per cui non potremo apprezzare la variazione in altezza del picco.

Dunque avremo modo di confermare in maniera diretta, attraverso un esperimento dedicato, che la FFT gioca il ruolo di “trasferire” le informazioni acquisite sperimentalmente da un dominio all'altro. Naturalmente potremo anche “tornare indietro”: eseguendo l'anti-trasformata di Fourier (FFT) dei dati sperimentali che acquisiremo nella prossima esperienza, potremo, volendo, ricostruire l'andamento temporale dell'oscillatore smorzato partendo dalle misure spettrali.

Non sempre questa possibilità di operare sperimentalmente in un dominio o nell'altro è accessibile, anzi, non lo è quasi mai. Questo fa capire quale possa essere la rilevanza del metodo FFT, che è effettivamente enorme in tantissimi ambiti. Infine, che questi ambiti siano davvero tantissimi può essere intuito anche tenendo presente che la definizione di trasformata di Fourier data in Eq. 3 può essere applicata a tutte le coppie di variabili *coniugate* che possono essere individuate nei vari problemi. In altre parole, oltre a fare FFT di grandezze dipendenti dal tempo allo scopo di ottenere spettri in funzione della frequenza, è possibile applicare il metodo per passare da un qualsiasi spazio al suo coniugato, o reciproco, come per esempio per passare dalla posizione al “vettore d'onda”.

Quindi fate tesoro del giochino che qui abbiamo presentato, perché con grande probabilità potrà tornarvi utile in moltissime situazioni future.