Minute della lezione/esercitazione del giorno 20 Dicembre 2010

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

(Dated: version 1 - FF, December 28, 2010)

Queste pagine riportano spiegazioni, esercizi e discussioni fatte nella lezione del giorno 20 Dicembre 2010 (CIA), che vengono messe in rete, come promesso, a favore soprattutto degli studenti assenti in quella data. Il testo contiene diversi esercizi che coinvolgono molle e sistemi di masse e masse e sistemi di molle. Nel giorno 20 Dicembre è stato anche introdotto l'argomento delle forze di attrito, che per semplicità verrà riportato nelle minute della lezione del 22 Dicembre.

I. UNA MOLLA E DUE MASSE

La presenza di molle, e dunque l'esistenza di forze elastiche, si presta a essere integrata in numerosi esercizi nei quali si ha a che fare con diverse forze ed eventualmente diverse masse. L'esercizio qui proposto è un ottimo esempio di tale possibilità di complicare le situazioni aggiungendo una molla a una situazione fisica già studiata.

Supponete allora di avere un bel piano inclinato che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale e due corpi di massa m_1 e m_2 legati tra loro da una fune inestensibile e di massa trascurabile. Il corpo m_1 può scivolare con attrito trascurabile sul piano inclinato mentre il corpo m_2 è libero di muoversi in direzione verticale. La fune di collegamento passa su un perno solidale al piano inclinato e posizionato alla sua sommità (il piano è ovviamente è fisso e rigido) e scorre con attrito trascurabile su questo perno. La situazione, come descritto in Fig. 1, è molto simile a quella che abbiamo già studiato un po' di settimane fa, con l'importante variante, però, che stavolta c'è una molla, di massa trascurabile, lunghezza di riposo L_0 e costante elastica k, di cui un estremo è attaccato al corpo m_1 e l'altro estremo a un muretto solidale alla base del piano inclinato. L'asse della molla e il filo, nel tratto dal corpo m_1 al perno, sono paralleli all piano inclinato.

In questo problema vogliamo scrivere l'equazione del moto della massa m_1 e conoscerne la posizione di equilibrio x_{eq}.

Per lo svolgimento è innanzitutto necessario decidere quale o quali sistema o sistemi di riferimento si vogliono usare. Il moto di m_1 avviene lungo la direzione del piano inclinato, e quello di m_2 nella direzione verticale. Suggerisco allora di usare un sistema di riferimento che ha la direzione del piano ed è orientato verso l'alto per m_1 (lo chiameremo asse X) e un riferimento verticale che punta verso il basso per m_2. Notate che questa scelta dei versi permette subito di affermare che lo spostamento delle due masse è uguale, sia in modulo che in segno, a causa della inestensibilità della fune. Per ulteriore semplicità, centriamo l'asse di riferimento X (ci interessiamo di questo perché poi dovremo studiare il moto di m_1) alla base del piano inclinato, come indicato in figura.

Sul corpo m_1 agiscono, nella direzione rilevante per il moto, la componente attiva della forza peso, che punterà verso il basso (e quindi comparirà con un segno negativo), la tensione della fune, che sarà positiva, e la forza elastica, che sarà negativa o positiva a seconda che la molla sia estesa o compressa rispetto alla propria lunghezza di riposo. Sul corpo m_2 agirà la forza peso, con un segno positivo per la scelta del verso dell'asse, e la tensione della fune, con segno negativo per lo stesso motivo. Le tensioni delle funi saranno uguali in modulo ($T_1 = T_2$), e le accelerazioni a_1 e a_2 dei due corpi dovranno anche essere uguali tra loro per il ragionamento di prima sulla inestensibilità della fune e sulla scelta dei versi dei riferimenti.

Potremo allora mettere a sistema quattro equazioni:

$$a_1 = -g\sin(\theta) + \frac{T_1}{m_1} - \frac{k}{m_1}(L - L_0) \quad (1)$$

$$a_2 = g - \frac{T_2}{m_2} \quad (2)$$

$$a_1 = a_2 \quad (3)$$

$$T_1 = T_2 \, . \quad (4)$$

Dato che il numero di "incognite" è anche pari a quattro, il sistema può essere risolto. In particolare, si ottiene:

$$a_1 = -\frac{k}{m_1 + m_2}L + [\frac{k}{m_1 + m_2}L_0 - g\frac{m_1\sin(\theta) - m_2}{m_1 + m_2}] \, , \quad (5)$$

dove si noti che la somma di termini fra parentesi quadre è fatta di costanti. Per scrivere l'equazione del moto è sufficiente notare che, nel sistema di riferimento che si sta usando, è $L = x$, dove con x indichiamo la posizione (generica) della massa m_1 sul riferimento definito sopra[1]. Dunque, chiamando B il termine costante fra parentesi quadrate, l'equazione del moto diventa: $a_1 = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m_1+m_2}x(t) + B$. Il moto governato da questa equazione è chiaramente di tipo armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{k/(m_1 + m_2)}$; le oscillazioni della massa avvengono attorno alla posizione di equilibrio che si trova imponendo $a_1 = 0$, che dà luogo a $x_{eq} = B/\omega^2$, con B e ω definiti prima. La legge oraria del moto è ovviamente del tipo $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_{eq}$, con A e Φ da determinare sulla base delle condizioni iniziali del problema specifico[2]. Chiaramente, come per l'esercizio (già svolto qualche tempo fa) in cui non compariva la molla, l'equazione del moto trovata rimane valida anche per i valori "limite" dell'angolo θ, cioè $\theta = 0$ (la massa m_1 si muove sul piano) e $\theta = \pi/2$ (entrambe le masse si muovono in direzione verticale): potete provare da soli a vedere cosa succede in questi casi.

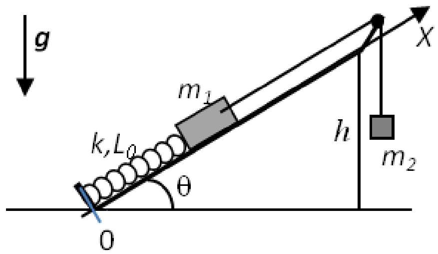

FIG. 1. Rappresentazione schematica del problema discusso nel testo.

II. SISTEMI DI MOLLE

Riprendiamo l'argomento che riguarda il comportamento di "sistemi" di molle esaminando esercizi in cui due molle agiscono su uno stesso punto materiale. La settimana scorsa si dimostrò che, per una massa m agganciata a due molle i cui estremi sono vincolati a muretti collocati in posizioni opposte alla massa (caso unidimensionale, moto lungo la direzione orizzontale), si ha moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, essendo k_1 e k_2 le costanti elastiche delle due molle. Questo risultato si può interpretare dicendo che il sistema delle due molle si comporta come un'unica molla con costante elastica "efficace" $k_{tot} = k_1 + k_2$ e la scorsa settimana si accennò al fatto che tale situazione corrisponde a configurare le due molle come se fossero in "parallelo" fra loro.

Qui vogliamo verificare questa affermazione, considerare configurazioni "in parallelo" e "in serie" e, inoltre, fare un po' di esercizio su argomenti di dinamica con molle in previsione della prova di verifica in itinere.

A. Molle in parallelo

Supponiamo di avere due molle (ovviamente di massa trascurabile) che hanno costanti elastiche k_A e k_B e lunghezze di riposo l_{0A} e l_{0B}, rispettivamente. Si ricorda che questi parametri sono quelli costruttivi delle molle considerate, e dunque dipendono dalla loro costruzione e non da come esse vengono usate. Immaginiamo che le due molle siano disposte su un piano verticale come rappresentato in Fig. 2(a). In particolare, i due estremi "in alto" delle molle sono agganciati saldamente allo stesso solaio rigido e indeformabile, e i due estremi "in basso" agiscono su un'unica massa puntiforme m. Notate che, con qualche sistema di guide e vincoli, si fa in modo che *entrambe le molle abbiano sempre la stessa lunghezza*. In altre parole, il moto della massa m viene vincolato in modo da avvenire solo lungo la direzione verticale (naturalmente vincoli e quant'altro non fanno attrito e hanno massa trascurabile, come per ogni buon esercizio di fisica generale, e le loro forze hanno direzione orizzontale, e quindi non ci interessano ai fini della soluzione che stiamo cercando...).

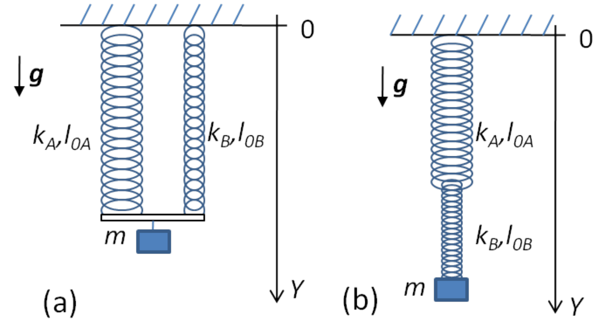

FIG. 2. Rappresentazione dei sistemi di molle in parallelo (a) e in serie (b) discussi nel testo. I disegni vanno ovviamente intesi come schematici e non in scala.

Scegliamo il riferimento indicato in figura come asse Y: esso è verticale, orientato verso il basso e centrato sul solaio. Indicheremo con y la coordinata (generica) della massa m rispetto a tale asse: possiamo supporre che y rappresenti anche la lunghezza (comune) delle due molle[3].

Notiamo che la configurazione realizzata è ben descritta dalla definizione di molle "in parallelo" e osserviamo che nella nostra costruzione, o modello, del sistema abbiamo posto una grandezza in comune tra le due molle, cioè la loro lunghezza che deve essere sempre la stessa per le due molle.

Consideriamo le forze che agiscono sulla massa m, limitandoci a quelle che hanno componente verticale (la direzione verticale è, come abbiamo affermato, quella rilevante per la dinamica). Sulla massa agiscono: la forza peso $m\vec{g}$ e la *somma* delle due forze elastiche. Notate che, in un sistema realistico, le due forze elastiche agiscono su punti differenti, però, supponendo che i vincoli funzionino impedendo ogni moto che non sia verticale (traslazionale!), possiamo tranquillamente sommare (vettorialmente) le due forze elastiche create dalle due molle per studiarne l'effetto complessivo. Inoltre per ognuna delle due molle si ha: $|\vec{F}_{ela,i}| = k_A(y - l_{0i})$, con i indice che vale A o B a seconda della molla considerata, dove si è supposto che le molle siano elongate rispetto alla lunghezza di riposo (altrimenti il segno della differenza tra coordinata e lunghezza a riposo potrebbe essere negativo, mentre il modulo di una forza deve essere per forza positivo!).

Scriviamo l'equazione del moto rispetto al riferimento considerato. Notando che la forza peso punta nel verso positivo dell'asse che vogliamo usare, e che sulla massa agisce la somma delle forze elastiche delle due molle A e B, si ha:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = g - \frac{k_A}{m}(y(t) - l_{0A}) - \frac{k_B}{m}(y(t) - l_{0B}) \ , \quad (6)$$

dove abbiamo correttamente considerato che, nel caso in cui la lunghezza delle molle sia maggiore della propria lunghezza di riposo, la forza elastica tende verso l'alto e quindi ha un segno negativo (occhio a controllare sempre!). Se raggruppiamo i termini costanti nell'equazione, possiamo scrivere:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{k_A + k_B}{m} y(t) + B \ , \tag{7}$$

con:

$$B = g + \frac{k_A l_{0A} + k_B l_{0B}}{m} \ . \tag{8}$$

L'equazione 7 ha chiaramente la forma dell'equazione del moto armonico. Dunque il moto è armonico e la sua pulsazione si trova estraendo la radice quadrata del termine (positivo, poi c'è un segno meno davanti) che moltiplica la funzione $y(t)$ al secondo membro, cioè: $\omega = \sqrt{(k_A + k_B)/m}$. Si vede chiaramente che, come nel caso della scorsa settimana, la costante elastica equivalente è $k_{tot} = k_A + k_B$[4].

Vediamo ora di rispondere ad alcune domande specifiche che si possono fare su questo problema:

1. Quanto vale la quota di equilibrio y_{eq}?
2. Supponendo che inizialmente la massa si trovi nella posizione $y_0 \neq y_{eq}$ e che da qui all'istante $t_0 = 0$ venga lasciata andare libera di muoversi con velocità iniziale nulla, come si scrive la legge oraria del moto $y(t)$?
3. In quale istante t_1 la massa ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio e quanto vale la sua velocità v_1 in questo istante?

La posizione di equilibrio è, per definizione, quella in cui $a = 0$. Imponendo $a = 0$ nella 7 si ottiene: $y_{eq} = mB/(k_A + k_B)$, ovvero, esplicitando B: $y_{eq} = mg/(k_A + k_B) + (k_A l_{0A} + k_B l_{0B})/(k_A + k_B)$: da un rapido controllo si vede che le dimensioni tornano (almeno quelle!). Inoltre nel caso (semplice) in cui le due molle siano identiche fra loro, entrambe con costante elastica k e lunghezza di riposo l_0, esce $y_{eq} = l_0 + mg/(2k)$, che è la posizione di equilibrio attesa per una molla di costante elastica efficace $2k$ e lunghezza di riposo $l_0 = l_{0A} = l_{0B}$.

Per scrivere la legge oraria occorre: (i) notare che, come già sottolineato, il moto è armonico; (ii) usare in modo opportuno le condizioni iniziali del problema date nel testo. Vista la forma della 7, il moto è armonico, cioè la massa compie delle oscillazioni armoniche che avvengono *attorno alla posizione di equilibrio* y_{eq} (che non ha coordinata nulla come in qualche altro esercizio che abbiamo visto assieme). Come abbiamo dimostrato trattando la cinematica del moto armonico, l'espressione generale della legge oraria è: $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + y_{eq}$, con, in questo specifico caso e come abbiamo già osservato, $\omega = \sqrt{(k_A + k_B)/m}$; A e Φ sono dei coefficienti costanti (opportunamente dimensionati) che vanno scelti sulla base delle condizioni iniziali.

Per stabilire i valori di A e Φ conviene prima di tutto ricordarsi (o ricavarsi) la forma generale della legge oraria della velocità, che recita: $v(t) = dy(t)/dt = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$ (il termine costante, ovvero la posizione di equilibrio, che è anche detto soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea, non contribuisce alla derivata). A questo punto sappiamo che A e Φ devono essere tali che le leggi orarie soddisfino le condizioni iniziali, cioè, posto $t_0 = 0$, deve essere:

$$y(t = t_0 = 0) = A\cos(\Phi) + y_{eq} = y_0 \tag{9}$$
$$v(t = t_0 = 0) = -\omega A \sin(\Phi) = 0 \ . \tag{10}$$

Si ottiene dunque un sistema di due equazioni (trascendentali, dato che ci sono seni e coseni) la cui soluzione fornisce i valori cercati. Conviene partire dalla seconda delle due equazioni, quella che al secondo membro ha uno zero. Si vede subito, infatti, che affinché l'uguaglianza possa essere soddisfatta occorre $\Phi = 0$. Infatti ω è sicuramente diverso da zero, mentre la soluzione $A = 0$ indica che non c'è oscillazione (si ritrova la soluzione particolare già citata prima, cioè la massa rimane in equilibrio). Notate poi che la condizione iniziale è soddisfatta anche per $\Phi = n\pi$, con n intero, ma, per evitare complicazioni (non significative dal punto di vista fisico) possiamo scegliere la prima di queste soluzioni, che è, appunto, $\Phi = 0$. Usando questo risultato nella prima delle due equazioni si ottiene $A = y_0 - y_{eq}$.

Avendo determinato i valori di A e Φ che soddisfano le condizioni iniziali, è finalmente possibile scrivere la legge oraria del moto:

$$y(t) = (y_0 - y_{eq})\cos(\omega t) + y_{eq} \ , \tag{11}$$

la quale stabilisce, come atteso, che il moto è descritto da un'oscillazione armonica (ovviamente periodica) attorno alla posizione di equilibrio con semi-ampiezza pari ad A.

Per rispondere all'ultima delle domande dell'esercizio occorre in linea di principio determinare l'istante t_1 che soddisfa l'equazione $y(t_1) = y_{eq}$ (questa equazione ha infinite soluzioni, essendo il moto periodico: noi sceglieremo la "prima", cioè quella che dà il valore minore). Per non sapere nè leggere né scrivere, vediamo che dobbiamo risolvere l'equazione:

$$y(t_1) = (y_0 - y_{eq})\cos(\omega t_1) + y_{eq} = y_{eq} \ . \tag{12}$$

Dobbiamo dunque determinare l'istante t_1 tale che il coseno si annulla (per la prima volta); questo si verifica quando l'argomento del coseno vale $\pi/2$, cioè per $t_1 = \pi/(2\omega)$. Ricordando che, come abbiamo dimostrato, il periodo T è $T = 2\pi/\omega$, si vede che $t_1 = T/4$, cioè, esplicitando ω, $t_1 = (\pi/2)\sqrt{m/(k_A + k_B)}$. A questo risultato si poteva arrivare in modo pressochè immediato notando che, dato che la massa parte da ferma dalla posizione più distante da quella di equilibrio, occorre un quarto del periodo affinché passi per la prima volta attraverso la posizione di equilibrio. Fate un rapido controllino per verificare che le dimensioni tornino!

Infine, la velocità v_1 si può calcolare dalla legge oraria della velocità: $v_1 = -\omega(y_0 - y_{eq})\sin(\omega t_1) = -\omega(y_0 - y_{eq})\sin(\pi/2) = -\omega(y_0 - y_{eq})$. Anche qui ci sta bene un controllino per verificare le dimensioni!

B. Molle in serie

Immaginiamo ora di avere le due molle di prima disposte "in serie" (sempre su un piano verticale), cioè con la prima attaccata al solaio e la seconda, al cui estremo si trova la massa m, attaccata all'estremità della prima (non so se si capisce: guardate la Fig. 2(b)).

Anche qui cominciamo con lo scrivere l'equazione del moto, sempre usando un riferimento verticale, puntato verso il basso e centrato sul solaio (vedi figura). Il diagramma delle forze mostra che sulla massa agiscono la forza peso e la *sola* forza elastica della molla B, cioè $a = -(k_B/m)(l_B - l_{0B}) + g$, dove l_B indica la lunghezza della molla B. Notate che questa espressione fa tornare i segni come si deve: infatti (trascuriamo per il momento la forza peso) se la molla è estesa (la sua lunghezza è maggiore di quella di riposo, cioè $l_B - l_{0B} > 0$) l'accelerazione risulta negativa, cioè diretta verso l'alto, come si deve, e viceversa se la molla è compressa. Osserviamo che la coordinata della massa è data da $y = l_A + l_B$; per andare avanti, dobbiamo in qualche modo legare l_A a l_B ed esprimere y di conseguenza.

Analizziamo cosa succede sul punto di giunzione fra le due molle e, per chiarire le idee, immaginiamo di farlo quando il sistema si trova all'equilibrio: su questo punto sono applicate due forze, una (che punta verso il basso) dovuta alla molla B e l'altra (che punta verso l'alto) dovuta alla molla A. In condizioni di equilibrio queste due forze devono essere uguali e opposte, dato che il punto in questione non deve muoversi. Possiamo tranquillamente immaginare che l'uguaglianza sussista anche in condizioni dinamiche, di non equilibrio, per cui avremo sempre che *le forze elastiche delle due molle sono uguali fra loro*, cioè, scrivendo un'equazione per i moduli delle forze: $k_A(l_A - l_{0A}) = k_B(l_B - l_{0B})$.

Da questa equazione possiamo determinare il legame matematico tra le lunghezze delle molle che andavamo cercando: l'algebra ci dice infatti che $l_A = l_{0A} + (k_B/k_A)(l_B - l_{0B})$. Unendo questa equazione con le precedenti, si ottiene che la coordinata generica della massa si può scrivere come $y = l_A + l_B = l_{0A} + (k_B/k_A)(l_B - l_{0B}) + l_B = (1 + k_B/k_A)l_B + l_{0A} - (k_B/k_A)l_{0B}$.

A questo punto possiamo "invertire" questa equazione esprimendo la lunghezza della molla l_B in funzione della coordinata y[5]: si ottiene $l_B = (k_A y - k_A l_{0A} + k_B l_{0B})/(k_A + k_B)$. Ricordate che qualche rigo sopra avevamo scritto: $a = -(k_B/m)(l_B - l_{0B}) + g$. Ora, sostituendo in l_B l'espressione appena determinata, abbiamo una buona scrittura per l'equazione del moto in funzione della coordinata generica $y(t)$, che risulta:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \tag{13}$$

$$= -\frac{k_B}{m}\left(\frac{k_A y(t) - k_A l_{0A} + k_B l_{0B}}{k_A + k_B} - l_{0B}\right) + g = \tag{14}$$

$$= -\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)} y(t) + \left[\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)}(l_{0A} + l_{0B}) + g\right] \tag{15}$$

$$= -\frac{k_A k_B}{m(k_A + k_B)} y(t) + C\ , \tag{16}$$

avendo indicato con la costante C i termini (costanti!) che compaiono fra parentesi quadre.

È evidente che anche in questo caso abbiamo scritto un'equazione del moto che ha la forma dell'equazione del moto armonico; dunque il moto è armonico con pulsazione, stavolta, $\omega = \sqrt{\frac{k_A k_B}{m(k_A+k_B)}}$, cioè le due molle in serie si comportano come un'unica molla con costante elastica equivalente $k_{tot} = \frac{k_A k_B}{k_A + k_B}$. Da questa espressione si capisce che, nel caso di molle in serie, si sommano i reciproci delle costanti elastiche, cioè $1/k_{tot} = 1/k_A + 1/k_B$.

Anche per questo problema possiamo rispondere ad alcune domande specifiche, simili (ma non identiche, state attenti!) a quelle proposte nel caso precedente:

1. Quanto vale la quota di equilibrio y_{eq}?
2. Supponendo di sapere che all'istante $t_0 = 0$ la massa *passa* per la posizione di equilibrio avendo una velocità $v_0 \neq 0$, come si scrive la legge oraria del moto $y(t)$?
3. In quale istante t_1 la massa si ferma istantaneamente (per la prima volta)?

Alla prima domanda si risponde imponendo $a = 0$ nella 13: si ottiene $y_{eq} = Cm\frac{k_A + k_B}{k_A k_B}$, con C termine costante esplicitato sopra.

Per quanto riguarda la legge oraria del moto, anche in questo caso, trattandosi di moto armonico, la legge ha la forma $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + y_{eq}$, con ω e y_{eq} determinati prima e A e Φ da aggiustare secondo le condizioni iniziali. Qui le condizioni iniziali sono diverse da prima: si ha infatti $y(t = t_0 = 0) = A\cos(\Phi) + y_{eq} = y_{eq}$, cioè, semplificando, $A\cos(\Phi) = 0$, e $v(t = t_0 = 0) = -\omega A \sin(\Phi) = v_0$. Dalla prima condizione si ricava $\Phi = \pi/2$ (si prende solo la "prima" soluzione valida) che, inserito nella seconda, permette di determinare $A = -v_0/\omega$. La legge oraria specifica per questo problema è dunque: $y(t) = -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \pi/2) + y_{eq} = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + y_{eq}$, dove abbiamo usato una nota relazione fra grandezze trigonometriche di angoli complementari.

La risposta all'ultima domanda può essere affrontata come prima, ovvero usando la legge oraria della velocità e trovando l'istante (il primo istante) in cui essa si annulla. Si può però anche prendere una scorciatoia e notare che l'istante di arresto (temporaneo) è quello in cui la massa raggiunge l'estremo del segmento all'interno del quale oscilla, cioè il punto di inversione del moto (si tratta nello specifico del punto che si trova in coordinata $y_1 = \frac{v_0}{\omega} + y_{eq}$). Se pensate alle caratteristiche del moto armonico, potete facilmente rendervi conto che l'istante richiesto si ha dopo un intervallo di tempo da t_0, istante in cui la massa passa per la posizione di equilibrio, pari a un quarto del periodo. Si ha quindi $t_1 = T/4 = \pi/(2\omega)$, con ω determinato prima.

[1] Si sta supponendo che la massa m_1 sia puntiforme e che l'intera lunghezza della molla abbia caratteristiche elastiche: se così non fosse basterebbe aggiungere delle costanti e il resto del ragionamento resterebbe inalterato.
[2] Si suppone, naturalmente, che tali condizioni iniziali restino sempre compatibili con la geometria del problema. Potrebbe ad esempio verificarsi che, per determinate condizioni iniziali, la massa m_1 raggiunga la sommità del piano inclinato e magari urti con il perno, cosa che supponiamo non avvenga!
[3] Questa affermazione richiede a rigore che la massa sia puntiforme e che l'elemento elastico abbia l'intera lunghezza della molla, cioè che la molla non termini con dei tratti non elastici, ma rigidi, come di solito avviene. In ogni caso, anche se così non fosse non ci sarebbe alcuna differenza significativa nei risultati, dato che la lunghezza dell'elemento elastico sarebbe legata alla y attraverso una somma o differenza con una costante.
[4] Per intuire che anche nel problema della scorsa settimana le molle erano in parallelo, immaginate che i muretti fossero tutti e due dalla stessa parte...
[5] Sono sicuro che esiste una strada più diretta, ma questa è quella che mi viene in mente; mi scuso per i tanti passaggi, che comunque mi sembrano tutti facili facili.