Minute della lezione/esercitazione del giorno 22 Dicembre 2010

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/~fuso/dida
(Dated: version 1 - FF, December 28, 2010)

Queste pagine riportano spiegazioni, esercizi e discussioni fatte nella lezione del giorno 22 Dicembre 2010 (CIA), che vengono messe in rete, come promesso, a favore soprattutto degli studenti assenti in quella data. Il testo contiene definizioni, esempi ed esercizi che riguardano diverse tipologie di forze di attrito.

I. INTRODUZIONE

A tutti è ben nota l'esistenza delle forze di attrito: nella vita di ogni giorno sappiamo che l'attrito è una causa che si oppone al moto, lo rende più "difficoltoso" (cioè richiede maggiore sforzi per ottenere lo stesso spostamento), impedisce il moto perpetuo, e così via.

Come discuteremo brevemente nel seguito, le forze di attrito sorgono in seguito a meccanismi microscopici abbastanza ben identificabili. Tuttavia questi meccanismi microscopici sono in genere difficili da descrivere (in alcuni casi, ci sono dibattiti ancora aperti) e quindi il compito di caratterizzare l'attrito a partire da tali meccanismi è arduo. Per ovviare a simili problemi, si fa generalmente riferimento a dei precisi *modelli* delle forze di attrito. In questo ambito è anche possibile individuare diverse tipologie di forze di attrito che normalmente hanno effetto in vari processi naturali e artificiali. In primo luogo, si distinguono le forze di attrito a seconda che esse richiedano un "contatto" tra superfici di corpi, o oggetti, diversi, e quelle in cui il contatto non è evidente. Per la prima tipologia, è poi opportuno distinguere tra l'attrito che si sviluppa quando le superfici di contatto si muovono l'un l'altra o sono ferme (relativamente).

Nel seguito entreremo un po' più nei dettagli dei vari modelli di forze di attrito.

II. ATTRITO NEL CONTATTO TRA SUPERFICI

Abbiamo già trattato una delle conseguenze che comporta il contatto tra due superfici nel caso della reazione vincolare. In quella sede, chiarimmo che la reazione vincolare è originata da processi microscopici che coinvolgono l'interazione, di natura prevalentemente elettrostatica, tra le nubi elettroniche superficiali delle due superfici, sottolineando allo stesso tempo che il concetto di contatto è labile, dato che è impossibile che due superfici possano coincidere spazialmente (e d'altra parte è assai difficile definire la quota di una superficie, a causa della inevitabile "delocalizzazione" delle nubi elettroniche dovuta a cause di origine quantistica).

Come è noto, la reazione vincolare è sempre ortogonale alla superficie che la genera: dunque essa non può opporsi al moto (caratteristica principe delle forze di attrito) se questo si svolge lungo la superficie stessa. Tuttavia le interazioni di contatto possono dare luogo anche a forze con componenti parallele alla superficie. Per rendersi conto dal punto di vista qualitativo di questa possibilità si può pensare che, quando un corpo è appoggiato su una superficie, questa superficie tenderà, in maniera minore o maggiore a seconda delle caratteristiche dei materiali e della massa che viene appoggiata, a deformarsi per accomodare il corpo appoggiato. Di conseguenza, si può immaginare che si formino delle regioni nella zona di contatto in cui la superficie di appoggio viene modificata: ad esempio, se inizialmente tale superficie era piana e orizzontale, in seguito all'appoggio essa diventa "scavata" e non più rigorosamente orizzontale. Potete facilmente rendervi conto che la reazione vincolare generata da una tale superficie di contatto può avere componenti non verticali, tali da influenzare l'eventuale movimento dell'oggetto appoggiato.

Si capisce facilmente che sviluppare un modello a partire da queste considerazioni è difficile. Fortunatamente l'attrito dovuto al contatto tra corpi e superfici ha una descrizione (macroscopica) molto più semplice, il cui punto di partenza sta nello stabilire se le superfici a contatto hanno una velocità relativa, o meno. Queste due possibilità corrispondono all'attrito detto rispettivamente dinamico e statico.

A. Attrito dinamico

L'attrito dinamico è la forma più semplice da trattare. Esso presuppone di avere un corpo (solido) che si muove rimanendo a contatto con una superficie. La forza di attrito per definizione si oppone al moto, dunque essa ha la stessa direzione e verso opposto rispetto a quella del movimento.

L'intensità (ovvero il *modulo* dell'attrito dinamico dipende da:

- il modulo della forza di reazione vincolare $|\vec{N}|$ esercitata dalla superficie sul corpo[1];
- dalla tipologia di materiali considerati, dalla loro finitura e dalle condizioni (ad esempio, temperatura) dell'esperimento: queste dipendenze sono riassunte in un coefficiente adimensionato, detto coefficiente di attrito dinamico μ_D.

Avendo chiarito questi aspetti, il *modulo* della forza di attrito dinamico $|\vec{F}_{AD}$ si scrive:

$$|\vec{F}_{AD}| = \mu_D|\vec{N}| \ . \quad (1)$$

Notate che è essenziale usare in questa espressione i moduli delle forze: infatti, se vi dimenticaste di usare i moduli, trovereste un'assurdità, dato che la forza di attrito verrebbe ad assumere la stessa direzione e verso della reazione vincolare, cosa ovviamente sbagliatissima!

Il coefficiente di attrito μ_D dipende, come già affermato, da tutti quei fattori che determinano l'attrito (tabelle si possono trovare in rete o nei libri di testo); convenzionalmente, esso è compreso tra zero (attrito completamente trascurabile) e uno, anche se, includendo nel computo fenomeni superficiali quali l'aderenza, è possibile realizzare superfici che presentano un coefficiente maggiore di uno. In ogni caso, le superfici su cui lo scorrimento avviene con attrito rilevante (non trascurabile) si dicono in genere "scabre", a indicare che esse non sono lisce e levigate (finitura che fa diminuire il cefficiente di attrito).

1. *Frenata a ruote bloccate*

Una semplice applicazione dell'attrito dinamico è il problema della frenata a ruote bloccate. In questo problema immagineremo di poter considerare un'automobile che frena come un punto materiale (ehm...) e supporremo che il moto avvenga su un piano orizzontale. A ruote bloccate, si genera un attrito dinamico tra gomma e asfalto che determina il rallentamento e infine l'arresto dell'automobile; chiamiamo μ_D il coefficiente di attrito.

Vediamo di scrivere l'equazione del moto per questo processo. Poiché il moto avviene in direzione orizzontale (asse X, che per semplicità orientiamo come lo spostamento), sulla nostra aut0o di massa m non agisce altra forza se non quella di attrito, per cui $a = -|\vec{F}_{AD}|/m$, dove il segno meno tiene in debito conto il fatto che l'attrito si oppone allo spostamento. D'altra parte $|\vec{F}_{AD}| = \mu_D|\vec{N}| = \mu_D mg$, dato che la reazione vincolare che una strada orizzontale determina su un'auto di massa m poggiata su di essa è proprio pari a mg (g indica il *modulo* dell'accelerazione di gravità!). Si ha quindi $a = -\mu_D g$; in questa espressione niente dipende da tempo o spazio, e quindi il moto sarà uniformemente accelerato, con accelerazione negativa (decelerazione).

Immaginiamo allora che la nostra auto inizi la sua frenata a ruote bloccate all'istante $t_0 = 0$, mentre passa per l'origine dell'asse X ed è dotata di una velocità iniziale v_0: quanto spazio percorrerà prima di arrestarsi? Le leggi orarie del moto e della velocità, scritte tenendo conto delle condizioni iniziali, recitano: $x(t) = v_0 t + at^2/2$ e $v(t) = v_0 + at$. Da quest'ultima si ricava che il tempo necessario all'arresto è $t_{stop} = -v_0/a = v_0/(\mu_D g)$, dove abbiamo sostituito l'accelerazione determinata prima. In questo tempo la distanza percorsa è $D = x(t_{stop}) = -v_0^2/(\mu_D g) + v_0^2/(2\mu_D g) = v_0^2/(2\mu_D g)$, cioè lo spazio di frenata dipende quadraticamente dalla velocità.

2. *Spingere o trainare*

Immaginate di dover far slittare su un pavimento orizzontale che presenta attrito dinamico (coefficiente μ_D) una cassa di massa m: avete la possibilità di applicare una certa forza o a "spingere" (la vostra forza, che ha modulo F, punta verso il basso, formando un certo angolo θ rispetto alla verticale) o a "trainare" (la vostra forza, sempre di modulo F, punta verso l'alto formando sempre un angolo θ rispetto alla verticale). Qual è la scelta più conveniente?

La risposta è quella che prevede il traino. Infatti nei due casi, supponendo di applicare la forza con lo stesso angolo rispetto alla verticale[2], la componente attiva della forza (quella orizzontale) è la stessa, valendo in entrambi i casi $F\sin(\theta)$. A questa forza si oppone la forza di attrito dinamico, che ha modulo $\mu_D|\vec{N}|$. Ora è chiaro che la reazione vincolare è diversa nei due casi: se si spinge, essa ha modulo $mg + F\cos(\theta)$, essendo $F\cos(\theta)$ la componente verticale della forza esterna, che si va a sommare alla forza peso. Se si traina, il modulo della reazione vincolare diventa $mg - F\cos(\theta)$, cioè la componente della forza esterna si sottrae alla forza peso[3]. In quest'ultima condizione la forza di attrito diminuisce il suo valore e, pertanto, la scelta risulta più conveniente (sotto questo aspetto!).

B. Attrito statico

L'attrito statico ha origine simile a quella dell'attrito dinamico, ma il contesto e la matematica coinvolta sono *nettamente* differenti. Ci sono infatti due aspetti rilevanti nell'attrito statico, che non esistono nel caso dinamico:

- la direzione della forza di attrito statico non è individuata nello stesso modo, immediato, dell'attrito dinamico. Infatti l'aggettivo statico indica che in questo caso non c'è spostamento dell'oggetto rispetto alla superficie di appoggio (la velocità relativa è nulla), per cui non si può affermare che l'attrito si oppone al moto. Però si può senz'altro affermare che direzione e verso sono legate a quelle del moto *incipiente*, che in buona sostanza significa che la forza di attrito statico ha la stessa direzione e verso opposto rispetto allo spostamento *che ci sarebbe in assenza dell'attrito statico*. Dunque la soluzione dei problemi di attrito statico presuppone in genere di capire come andrebbero le cose (cioè come si muoverebbe l'oggetto) se l'attrito non ci fosse.

- Il modulo della forza di attrito statico "si adatta", nei limiti del possibile, proprio per impedire il movimento. Dunque esso può assumere un intero intervallo di valori, da zero a un valore massimo, che poi definiremo, allo scopo di mantenere in equilibrio un oggetto su una superficie, in condizioni nelle quali se non ci fosse l'attrito l'oggetto si muoverebbe.

L'ultima affermazione riportata fa sì che non si possa, in genere, stabilire a priori il valore della forza di attrito a partire dalle caratteristiche delle superfici messe a contatto. Infatti, anche in questo caso è generalmente possibile individuare un coefficiente μ_S, detto di attrito statico, che caratterizza la forza di attrito. Anche in questo caso, escludendo fenomeni di adesione superficiale, si ha convenzionalmente che μ_S è compreso fra zero e uno; inoltre in genere, a parità di materiali, finitura e condizioni sperimentali, normalmente è $\mu_S > \mu_D$, e questo è il motivo per cui, ad esempio, se proviamo a spingere una cassa su un pavimento, appena vinta la forza di attrito statico (che agisce finché la cassa è ferma), e cioè appena la cassa comincia a spostarsi, vediamo che dobbiamo "durare meno fatica" per tenerla in movimento.

Tuttavia, a causa della possibilità che la forza di attrito statico ha di adattarsi alle sollecitazioni esterne, la relazione che lega il suo modulo $|\vec{F}_{AS}|$ con il coefficiente di attrito μ_S e la reazione vincolare $\vec{N}$ è notevolmente diversa rispetto al caso dinamico. Si ha infatti:

$$|\vec{F}_{AS}| \leq \mu_S |\vec{N}| \,, \tag{2}$$

relazione in cui il minore/uguale cambia completamente la situazione rispetto al caso dinamico.

Possiamo rendercene conto facilmente con un esempio, molto illuminante. Poggiamo un oggetto di massa m sul piano scabro e orizzontale di un tavolo; supponiamo di conoscere il coefficiente di attrito statico μ_S.

- Non applichiamo alcun altra forza: in queste condizioni l'oggetto rimane in equilibrio dato che tutte le forze (peso e reazione vincolare) sono bilanciate tra loro. La forza di attrito si adatta in modo da annullarsi, cioè in queste condizioni $F_{AS} = 0$. Infatti se la forza di attrito fosse diversa da zero l'oggetto non sarebbe più in equilibrio e si muoverebbe!

- Immaginiamo ora di applicare una forza esterna (un ditino che spinge) di modulo F, supponendola per semplicità diretta orizzontalmente. Se non ci fosse l'attrito statico, l'oggetto si muoverebbe nella direzione della forza (e quindi l'attrito deve avere la stessa direzione e verso opposto). Supponiamo però di osservare (con gli occhietti) che c'è equilibrio, cioè che il corpo sta fermo. In queste condizioni è evidente che la forza di attrito statico si adatta in modo da annullare gli effetti della forza esterna, cioè per i moduli deve essere $F_{AS} = F$.

- Come già anticipato, la forza di attrito statico, poverina, cerca di adattarsi per quel che può. Infatti la 2 stabilisce che esiste un valore *massimo* che la forza di attrito statico può assumere; tale valore si ottiene prendendo il segno uguale tra i due membri della disuguaglianza, cioè $|\vec{F}_{AS,MAX} = \mu_S |\vec{N}|$. Nell'esperimento che stiamo esaminando ora, se il modulo F della forza esterna applicata all'oggetto viene fatto aumentare, si osserverà che l'oggetto comincerà a muoversi (e quindi l'attrito da statico diventerà dinamico) quando $F = F_{AS,MAX}$. In queste condizioni si ha $F_{AS} = F = F_{AS,MAX} = \mu_S mg$, avendo indicato con mg il modulo della reazione vincolare.

1. *Si muove o sta fermo?*

Facciamo un semplice esercizio, che si presta a un'immediata verifica pratica. Mettiamo un oggetto di massa m a contatto con un piano inclinato scabro, che presenta un certo coefficiente di attrito statico μ_S e forma un angolo θ variabile rispetto all'orizzontale (potete immaginare di prendere come piano inclinato la faccia di un quadernone, che si presta bene a variare l'angolo rispetto all'orizzontale).

Se si fa l'esperimento, si osserva che l'oggetto, appoggiato sulla superficie del piano con velocità nulla, rimane in equilibrio se l'angolo θ è minore di un certo valore massimo θ_L: quanto vale θ_L?

Per la soluzione, ricordiamoci che la forza che tenderebbe a far muovere l'oggetto (verso il basso del piano inclinato) è la componente attiva della forza peso, $mg\sin(\theta)$. In condizioni di equilibrio, tale forza deve essere equilibrata da una forza di ugual modulo, stessa direzione e verso opposto. Tale forza è ovviamente la forza di attrito statico, che ha modulo $F_{AS} \leq \mu_S N$. Il modulo della reazione vincolare che il piano inclinato esercita sull'oggetto è $N = mg\cos(\theta)$. Quindi l'equilibrio richiede che $mg\sin(\theta) = F_{AS} \leq \mu_S mg\cos(\theta)$. Come vedete, si è formata una disuguaglianza, che, riarrangiata, recita: $\tan(\theta) \leq \mu_S$. La funzione tangente è monotona (per angoli compresi fra zero e 90 gradi), per cui il valore massimo di θ che si sta cercando si ottiene proprio quando il minore/uguale diventa un uguale, cioè $\theta_L = \arctan(\mu_S)$.

2. *Attrito da parete verticale*

Avete ancora un oggetto di massa m e stavolta volete tenerlo in equilibrio a contatto con una parete verticale, che supponiamo scabra e dotata di coefficiente di attrito statico μ_S. L'esperienza vi dice che, per ottenere lo scopo, è necessario applicare una forza esterna di modulo F all'oggetto: questa forza può anche avere una direzione orizzontale ("schiaccia" l'oggetto sulla parete) e questa è proprio la situazione che andiamo a esaminare. Supponendo di ottenere equilibrio, vogliamo sapere quanto vale il modulo della forza di attrito statico F_{AS}.

Cominciamo con il disegnare (fatelo voi!) il diagramma delle forze che agiscono sull'oggetto: abbiamo la forza peso $m\vec{g}$ verticale verso il basso, la forza esterna $\vec{F}$ orizzontale e la reazione vincolare $\vec{N}$ che la parete esercita sull'oggetto. State attenti: tale reazione vincolare serve a garantire che l'oggetto non penetri nella parete: dunque essa è *orizzontale* e pari, in modulo, a F (la forza peso non c'entra niente!).

È evidente che queste tre forze non danno equilibrio: occorre infatti un'altra forza che si opponga alla forza peso. Tale forza è proprio l'attrito statico: infatti se esso non ci fosse l'oggetto si muoverebbe verticalmente verso il basso. Per avere equilibrio occorre che, in modulo, $F_{AS} = mg$, e dunque vedete che il valore della forza di attrito è determinato a prescindere da μ_S (a patto di sapere che c'è equilibrio!). È anche chiaro, però, che il coefficiente di attrito deve giocare un qualche ruolo nell'esperimento. Infatti si ha $mg = F_{AS} \leq \mu_S N = \mu_S F$; dunque un coefficiente di attrito (o un modulo della forza esterna) troppo basso impedisce di avere equilibrio se la forza peso supera un certo valore.

3. *La moneta sul disco*

Immaginate di avere un giradischi (di quelli di un tempo!) con sopra un disco che gira a una certa velocità angolare ω su un piano orizzontale. Supponete che il disco sia scabro e presenti un certo coefficiente di attrito statico μ_S: prendete una monetina, di massa m, e l'appoggiate sul disco a una distanza R rispetto al centro di questo. Se fate davvero questo esperimento, potrete osservare che, in certe condizioni, la monetina rimane fissa *rispetto al disco*, o, altrimenti (se le condizioni non sono quelle previste), prende e parte "per la tangente". Perché?

Per cominciare, osserviamo che nel caso in cui la monetina rimanga fissa rispetto al disco si ha in pratica che la monetina si muove, su un piano orizzontale, di moto circolare uniforme. Allora su di essa deve agire l'accelerazione centripeta, che ha modulo $\omega^2 R$ e direzione orizzontale (sul piano del disco) e verso centripeto (verso il centro del disco). Le forze che agiscono sulla monetina, il suo peso e la reazione vincolare, sono verticali e quindi non possono fornire accelerazione centripeta. Occorre un'altra forza che è proprio l'attrito statico, di modulo F_{AS}. Se la monetina rimane ferma rispetto al disco, è chiaro che deve essere $m\omega^2 R = F_{AS}$. D'altra parte $F_{AS} \leq \mu_S N = \mu_S mg$: si ottiene allora la disuguaglianza $\omega^2 R \leq \mu_S g$, che stabilisce quali condizioni devono sussistere affinché la monetina possa rimanere ferma rispetto al disco. Se il prodotto $\omega^2 R$, che dipende dalla velocità di rotazione del disco e dalla posizione a cui si poggia la monetina, è troppo grande, allora la monetina non potrà più percorrere un'orbita circolare, non avendo sufficiente accelerazione centripeta, e prenderà ad allontanarsi dal centro del disco. Provateci!

Notiamo che l'esercizio appena proposto è il prototipo di una serie di esercizi in cui la forza di attrito statico è la causa fisica che fornisce accelerazione centripeta a un corpo. Tra le altre situazioni, questa è anche una ragionevole modellizzazione dell'automobile che affronta una curva: infatti, anche se l'automobile è un sistema molto complesso (sterzo, sospensioni, quattro ruote, etc.), essa può entro certi limiti essere rappresentata come un oggetto puntiforme. Quando percorre una curva, l'automobile si muove in direzione tangenziale, ma è ferma in direzione radiale. Dunque in questa direzione deve essere sottoposta ad accelerazione centripeta e, supponendo che la curva sia realizzata su un tratto orizzontale (in pianura!), l'unica forza che può provvedere tale accelerazione è l'attrito statico che si esercita tra gomma e asfalto. Le relazioni matematiche che si ottengono sono le stesse dell'esercizio di prima: esaminatele bene, in particolare la dipendenza con la velocità, per capire che in curva è meglio rispettare i limiti di velocità!

C. Forza di attrito viscoso

Oltre all'attrito che richiede un contatto tra un corpo e una superficie, c'è una diffusissima forma di attrito, detto viscoso, in cui il contatto sembra non esserci. L'esempio più semplice di attrito viscoso riguarda il moto di un oggetto (ad esempio, solido) all'interno di un mezzo viscoso (ad esempio un fluido, cioè un liquido o un gas). Pur appartenendo alla categoria degli attriti dinamici (si ha attrito viscoso solo in presenza di movimento!), la sua origine, le sue caratteristiche e la sua formulazione sono ben diverse rispetto a quelle dell'attrito dinamico propriamente detto.

L'origine microscopica dell'attrito viscoso può essere messa in relazione con il verificarsi di "urti" tra la superficie frontale dell'oggetto in movimento e le molecole del fluido in cui esso si muove. Come sapete, qualsiasi fluido, ad esempio l'aria (che è un mezzo debolmente viscoso), è fatta di tantissimi atomi e molecole che, a temperatura diversa da zero, sono animate da un moto casuale (di agitazione termica). Queste molecole possono urtare con la superficie dell'oggetto[4], modificandone la dinamica. Tuttavia se l'oggetto è fermo tale modifica ha effetti nulli, dato che, in media, l'oggetto subisce lo stesso numero di urti (per unità di tempo) nelle tre direzioni e in tutti i versi. È intuitivo che, se l'oggetto si muove in una data direzione e verso, la frequenza degli urti con le molecole che si trovano "davanti" all'oggetto è maggiore, e questo determina la comparsa della forza di attrito viscoso.

La forza di attrito viscoso è caratterizzata dal coefficiente (di attrito viscoso) β che dipende sia dal mezzo in cui avviene il moto sia dalla geometria dell'oggetto che si muove, in particolare dalle dimensioni della "sezione maestra"; inoltre esso dipende anche dalle condizioni in cui avviene il moto, ad esempio temperatura e pressione, e dal grado di finitura superficiale dell'oggetto che si muove. L'espressione della forza di attrito è $\vec{F}_{AV} = -\beta\vec{v}$, da cui si vede che β ha le dimensioni di una forza su una velocità, cioè [massa]/[tempo]. Notate che, poiché la forza dipende linearmente dalla velocità, che ha la direzione dello spostamento, in virtù del segno negativo l'espressione è corretta dal punto di vista vettoriale, cioè esprime che la forza ha la stessa direzione e verso opposto allo spostamento, come deve essere per qualsiasi forma di attrito.

La dipendenza dalla velocità è specifica per questo tipo di forza di attrito e rende molto interessante la dinamica governata dall'attrito viscoso.

1. *Equazione differenziale a variabili separabili*

Immaginiamo di avere un oggetto di massa m che si muove all'interno di un mezzo viscoso e che, supponiamo, risente della *sola* forza di attrito viscoso. La sua equazione del moto è (prendiamo un caso unidimensionale con moto lungo l'asse X):

$$a = -\frac{F_{AV}}{m} = -\frac{\beta}{m} v \ , \tag{3}$$

dove β è il coefficiente di attrito nel caso considerato. L'equazione del moto sopra scritta è, come al solito, un'equazione differenziale del secondo ordine (l'accelerazione è la "derivata seconda" della posizione). Per la sua soluzione conviene però considerarla come un'equazione del primo ordine, cioè scrivendo l'accelerazione come "derivata al primo ordine" (rispetto al tempo) della velocità, ovvero

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m} v(t) \ . \tag{4}$$

La soluzione di questa equazione differenziale porterà alla funzione $v(t)$, cioè alla determinazione della *legge oraria della velocità*; una volta nota questa funzione, sarà possibile determinare la legge oraria del moto, $x(t)$ (ma questo obiettivo non verrà conseguito in questi appunti!).

L'equazione 4 ha la caratteristica di essere al primo ordine e di avere la funzione $v(t)$ al secondo membro: tale funzione compare "da sola", cioè non ci sono dipendenze esplicite dal tempo. Per questi motivi l'equazione si chiama *a variabili separabili.* Il significato di questa espressione può essere colto facendo un po' di algebra sull'espressione, che è anche necessaria per la soluzione. Il punto di partenza consiste nel riscrivere l'equazione 4 portando al primo membro il termine $v(t)$ (che va a dividere) e al secondo membro il termine dt, che va a moltiplicare[5]. Si ottiene così:

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{\beta}{m} dt \ . \tag{5}$$

La forma di questa equazione suggerisce il motivo per cui essa si dice a variabili separabili: infatti al primo membro compare la sola funzione $v(t)$, mentre la variabile t compare esplicitamente, in forma infinitesima, solo al secondo membro. L'equazione stabilisce un'uguaglianza fra grandezze infinitesime: sommando tante grandezze infinitesime tra loro al primo membro e altrettante al secondo membro l'uguaglianza deve ancora esistere. Poiché si intendono sommare delle grandezze inifinitesime, l'operazione corretta coinvolge l'uso dell'integrale e l'affermazione appena fatta dà luogo alla seguente uguaglianza tra integrali:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{\beta}{m} \int_{t_0}^{t} dt \ . \tag{6}$$

Si noti che, nell'esprimere gli integrali, è stato necessario indicare gli estremi di integrazione: infatti l'uguaglianza tra le somme vale solo se le somme stesse sono fatte sullo stesso "intervallo", cioè considerando addendi corrispondenti tra loro. Pertanto è necessario indicare da dove a dove si esegue la somma, che in termini matematici significa scrivere esplicitamente gli estremi di integrazione. Come è chiaro, il tempo si fa variare dall'istante t_0 all'istante t (generico); in corrispondenza, la velocità varia da v_0, che è quella che si misura all'istante t_0, a $v(t)$ misurata all'istante generico t.

Se ricordiamo qualche base di analisi matematica possiamo facilmente "calcolare" gli integrali: al primo membro avremo un logaritmo naturale, al secondo membro una semplice moltiplicazione per t, ovvero, tenendo in debito conto degli estremi di integrazione:

$$\ln(v(t)) - \ln(v_0) = \ln(\frac{v(t)}{v_0}) = -\frac{\beta}{m}(t - t_0) \ . \tag{7}$$

L'uguaglianza espressa dall'equazione deve rimanere anche se si calcola l'esponenziale del primo e del secondo membro che, ricordando la definizione e le proprietà di logaritmo naturale, porta a:

$$v(t) = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}(t - t_0)) \ . \tag{8}$$

[6]

Avendo quindi determinato completamente (inclusa la condizione iniziale, v_0) la $v(t)$, possiamo affermare di aver risolto l'equazione differenziale assegnata. Questo tipo di equazione differenziale è molto frequente in diversi fenomeni fisici, in genere in tutti quelli in cui è coinvolta dissipazione di energia. Ad esempio, la forma dell'equazione differenziale per la scarica di un condensatore è esattamente identica.

Avendo determinato l'andamento della funzione $v(t)$ è possibile ricavare la legge oraria del moto $x(t)$ risolvendo l'ulteriore equazione differenziale del primo ordine:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}(t - t_0)) \ . \tag{9}$$

Tale equazione può essere risolta conoscendo le proprietà della funzione esponenziale, conducendo in tal modo a esprimere la legge oraria del moto. Tuttavia questo non è di interesse primario per la trattazione presente, in cui intendiamo invece studiare la funzione $v(t)$ che abbiamo determinato. L'andamento esponenziale con un segno negativo nell'esponente (notate che $\beta, m, (t - t_0)$ sono tutte grandezze positive) significa $v(t) = v_0$ e $v(t) \to 0$ per $t = t_0$ e $t \to \infty$, rispettivamente: infatti è noto che la funzione esponenziale decrescente tende *asintoticamente* a zero quando l'argomento tende a infinito. L'andamento decrescente è monotono e la funzione non presenta massimi o minimi locali.

È interessante notare che, dovendo l'argomento della funzione esponenziale essere un numero puro, la grandezza m/β deve avere le dimensioni di un tempo.

Questo è ovviamente in accordo con il dimensionamento di β che abbiamo dato in precedenza. Possiamo dare un nome alla grandezza $\tau = m/\beta$: il nome è quello di *tempo di decadimento* (o di smorzamento, o di costante tempo caratteristica). Il significato fisico di questo tempo è che quando $t - t_0 = \tau$, allora $v(t - t_0 = \tau) = v_0 \exp(-1) = v_0/e$; ricordando che la base dei logaritmi naturali vale $e \sim 2.8$, si ha che τ è il tempo necessario perché la grandezza ($v(t)$, in questo caso) decada a un valore che è circa un terzo del valore iniziale. La Fig. 1 mostra l'andamento della funzione $v(t)$ per diverse scelte di $m/\beta = \tau$: maggiore è τ (dunque minore è β) e più è "lenta" la decrescita.

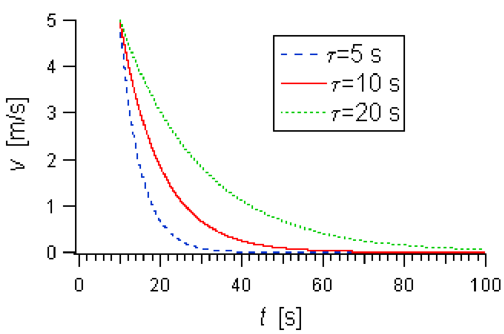

FIG. 1. Andamento della funzione $v(t)$ calcolata per $v_0 = 5.0$ m/s e per vari valori di τ, come indicato in legenda; nel grafico si è supposto $t_0 = 10$ s.

Vediamo infine di applicare quanto studiato a un semplice caso fisico: supponiamo allora di avere un oggetto di massa m che, all'istante $t_0 = 0$, ha la velocità v_0 ed entra in un mezzo viscoso con coefficiente β (sull'oggetto non agiscono altre forze all'infuori dell'attrito viscoso!). La legge oraria della velocità è $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$, con $\tau = m/\beta$: essa indica che la velocità decresce esponenzialmente con il tempo fino a tendere asintoticamente a zero, cioè l'oggetto tende a fermarsi. Il tempo necessario perché l'oggetto diminuisca sensibilmente la sua velocità è dell'ordine di τ, e pertanto è tanto minore quanto maggiore è il coefficiente di attrito viscoso β.

2. *Velocità limite e discesa del paracadute*

Un problema esemplare che serve a mostrare il ruolo che le forze di attrito hanno in situazioni relativamente comuni è la caduta di un oggetto sottoposto alla forza peso e alla forza di attrito viscoso. Questa è la situazione tipica di un omino appeso a un paracadute (ovvero di una goccia d'acqua o di grandine, e, come vedremo nel seguito del corso, di un elettrone che si muove in un metallo).

Scegliendo un asse verticale orientato verso il basso, l'equazione del moto si scrive:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\beta}{m} v(t) \ , \tag{10}$$

che avrebbe la stessa forma della 5 se non fosse per il termine costante g, dovuto all'accelerazione di gravità. Anche questa equazione, tuttavia, è a variabili separabili. Essa può infatti essere riscritta come:

$$\frac{dv(t)}{g - \frac{\beta}{m} v(t)} = dt \ . \tag{11}$$

L'integrazione del primo membro richiede un po' di lavoro algebrico in più rispetto al caso precedente. In particolare è opportuno eseguire un cambio di variabile: $g - \frac{\beta}{m} v(t) = \xi(t)$, dove la funzione $\xi(t)$ è tale che $d\xi(t)/dt = -(\beta/m)dv(t)/dt = -(dv(t)/dt)/\tau$, con $\tau = m/\beta$. Dall'uguaglianza fra le derivate temporali è facile rendersi conto che $dv(t) = -\tau d\xi(t)$ (in pratica abbiamo considerato le derivate come rapporti incrementali e uguagliato gli incrementi moltiplicati per le varie costanti).

In virtù di questi passaggi algebrici la 11 diventa:

$$\frac{d\xi(t)}{\xi(t)} = -\frac{1}{\tau} dt \ , \tag{12}$$

che ha proprio la forma di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e che quindi può essere integrata seguendo il metodo che abbiamo usato prima. Nell'integrare, poiché al primo membro la variabile è $\xi(t)$, occorrerà mettere come estremi di integrazione $\xi(t) = g - \frac{\beta}{m} v(t)$, che è il valore della funzione $\xi(t)$ all'istante t generico, e $\xi_0 = g - \frac{\beta}{m} v_0$, che è il valore della $\xi(t)$ all'istante t_0. Per semplificare ulteriormente il problema, possiamo davvero immaginare di trattare il problema del paracadutista e tenere conto che esso parte da fermo (da una certa altezza!) all'istante $t_0 = 0$ con velocità iniziale nulla, cioè con $v_0 = 0$. In queste condizioni si ha $\xi_0 = g$.

Integrando i due membri della 12 si trova: $\ln(\xi(t)/\xi_0) = -t/\tau$. Esponenziando i due membri si ha:

$$\xi(t) = g - \frac{v(t)}{\tau} = \xi_0 \exp(-t/\tau) = g \exp(-t/\tau) \ , \tag{13}$$

che, riordinata, recita:

$$v(t) = \tau g (1 - \exp(-t/\tau) = \frac{mg}{\beta}(1 - \exp(-t/\tau) \ . \tag{14}$$

La legge oraria della velocità così ottenuta è soluzione dell'equazione differenziale di partenza. Il suo andamento temporale è rappresentato in Fig. 2: il valore di $v(t)$, che all'istante $t_0 = 0$ è nullo (il paracadutista parte da fermo), aumenta fino a raggiungere asintoticamente il valore *limite* $v_{lim} = \tau g = mg/\beta$. Dunque il paracadutista, a patto di far trascorrere abbastanza tempo per il processo di caduta (che significa a patto di partire da una certa quota), raggiunge asintoticamente una velocità limite che è tanto più bassa tanto più alto è β; poiché β dipende dall'area dell'oggetto che si muove nel fluido viscoso (l'aria, in questo caso), aumentando con l'area, si capisce perché i paracadute abbiano la canonica forma!

Notate che esistenza e valore della velocità limite possono essere dedotte a prescindere dalla soluzione dell'equazione differenziale. Infatti la 10 ci dice che può esistere un istante, quello in cui $v(t) = mg/\beta$, in cui l'accelerazione si annulla. A partire da questo istante la velocità non può più modificarsi, essendo nulla l'accelerazione, e questo comporta che l'accelerazione resti nulla. Questa velocità è proprio quella limite del processo secondo quanto abbiamo appena dimostrato.

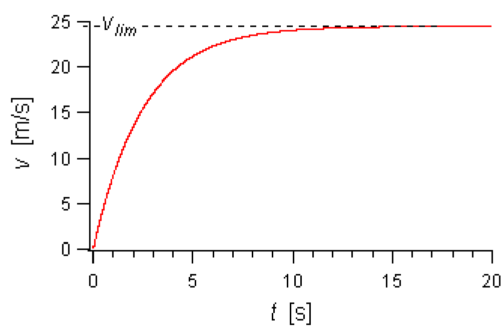

FIG. 2. Andamento della funzione $v(t)$ calcolata supponendo $m = 50$ kg e $\beta = 5.0$ kg/s; nel calcolo si è supposto $t_0 = 0$ e $v_0 = 0$, secondo quanto discusso nel testo.

---

[1] Questa dipendenza può essere qualitativamente compresa ricordando quanto affermato prima sulla deformazione della superficie di contatto, che generalmente dipende dalla forza che si esercita al contatto, ovvero dal modulo della reazione vincolare.

[2] A rigore, i due angoli differiscono tra di loro di 180 gradi, ma si può sempre immaginare di misurare l'angolo in modo differente nei due casi, ottenendo alla fine lo stesso valore.

[3] Potrebbe ovviamente succedere che $mg - F\cos(\theta) < 0$, nel qual caso stareste sollevando la cassa. Supponiamo che ciò non accada.

[4] Vedete che, in qualche modo, anche qui il concetto di contatto si ritrova!

[5] Si potrebbe opinare che questa operazione non sia del tutto lecita avendo a che fare con degli infinitesimi. Nei problemi che ci apprestiamo a risolvere dt va inteso come un termine quantitativamente piccolo (indefinitamente piccolo), ma pur sempre diverso da zero.

[6] La scrittura exp indica una elevazione alla potenza indicata nell'argomento del numero di Neper e, base dei logaritmi naturali.