Minute della lezione del giorno 25 Gennaio 2011

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 1 - FF, 26 gennaio 2011)

Queste pagine riportano in forma sommaria le definizioni, discussioni e dimostrazioni fatte nella lezione del giorno 25 Gennaio 2011 ai (pochi) studenti di Ingegneria Edile-Architettura presenti a lezione di Fisica Generale. Argomento della lezione era l'introduzione allo studio dei sistemi materiali.

I. DEFINIZIONI, NOMENCLATURA E GENERALITÀ

Si definisce sistema materiale un insieme di oggetti materiali (puntiformi, o approssimabili come tali) che interagiscono tra di loro attraverso opportune forze. Le distanze tra i componenti del sistema possono rimanere fisse, cioè costanti durante il processo considerato, oppure possono variare. Nel primo caso si ha a che fare con i *corpi rigidi*, oggetti solidi (indeformabili) che possono a loro volta essere classificati in discreti o continui, a seconda che la materia sia distribuita nello spazio in modo continuo o discontinuo. Dei corpi rigidi ci occuperemo in futuro.

Per il momento, concentriamo la nostra attenzione a sistemi materiali in cui la posizione *relativa* dei componenti (gli oggetti, ovvero i punti materiali che li formano) può variare nel tempo. Per semplicità, immaginiamo di considerare sistemi costituiti da solo due oggetti, cioè due masse puntiformi. Come già affermato, queste masse realizzano un sistema solo se esiste una forza di mutua interazione tra di loro. Come esempi pratici, si può pensare a una coppia di masse poste all'estremità di una stessa molla, a cariche elettriche dello stesso segno o di segno opposto (incluso l'atomo planetario), a un satellite che ruota attorno alla terra, ma anche a una cassa che scivola su un piano inclinato libero di muoversi o a un omino che passeggia su una zattera. Le forze responsabili per l'interazione, rispettivamente forza elastica, elettrica, gravitazionale, reazione vincolare, attrito, hanno in questi esempi una durata che non è limitata nel tempo e i processi che ne conseguono hanno una dinamica che può essere studiata in funzione del tempo.

Due oggetti materiali possono anche formare una sorta di sistema transiente nel caso in cui l'interazione abbia caratteristiche tali da durare per pochissimo tempo: questa è ad esempio la situazione coinvolta negli urti o collisioni fra corpi rigidi (un pallone tirato contro una parete, due palle da biliardo lanciate una contro l'altra, etc.), dove le forze di interazione hanno un carattere *impulsivo* (durano pochissimo e sono molto intense). Per gli urti e le collisioni, oltre a quanto riportato in questi appunti, si può far uso di considerazioni che esamineremo specificamente in futuro.

In sostanza, allora, in questa lezione consideriamo un sistema di due masse puntiformi, m_1 e m_2, non vincolate una rispetto all'altra, cioè libere di modificare la loro posizione relativa, e che interagiscono tra di loro attraverso una qualsiasi forza; tale forza sarà sentita mutuamente dalle due masse, cioè l'oggetto 1 risentirà di una forza $\vec{F}_{1,2}$ dovuta alla presenza dell'oggetto 2, mentre l'oggetto 2 risentirà di una forza $\vec{F}_{2,1}$ dovuta alla presenza dell'oggetto 1. Poiché queste forze hanno origine dai componenti del sistema, esse saranno definite *interne* al sistema, per cui metteremo un pedice INT per denotarle. A causa del fatto che l'interazione è mutua, sarà

$$\vec{F}_{1,2,INT} + \vec{F}_{2,1,INT} = 0 \ . \qquad (1)$$

Oltre a queste forze che si generano dentro al sistema, potranno naturalmente esistere delle forze dovute a cause esterne, come per esempio le forze dovute al peso, all'interazione con campi elettrici esterni o a quello che si vuole. Denoteremo queste forze come $\vec{F}_{1,EXT}$ e $\vec{F}_{2,EXT}$, dove il pedice 1, 2 si riferisce al fatto che esse sono applicate rispettivamente alla massa m_1 e alla massa m_2. Inoltre, visto che può verificarsi che più forze esterne agiscano sulla stessa massa, metteremo nelle equazioni un segno di sommatoria per indicare che esse possono essere sommate vettorialmente fra di loro. Notate che per queste forze non è possibile porre a priori alcuna condizione del tipo di quella espressa nell'eq. 1. Si capisce allora che la classificazione in forze interne ed esterne è un punto chiave dell'intera trattazione.

L'obiettivo di quanto proposto nel seguito consiste nell'individuare delle equazioni del moto che consentano di studiare la dinamica del sistema. In linea di principio la dinamica può essere descritta attraverso le due equazioni del moto che si riferiscono alle due masse, cioè applicando il principio di Newton separatamente all'oggetto 1 e al 2. Si ha infatti:

$$\vec{a}_1 = \frac{\Sigma\vec{F}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{1,2,INT}}{m_1} + \frac{\Sigma\vec{F}_{1,EXT}}{m_1} \qquad (2)$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\Sigma\vec{F}}{m_2} = \frac{\vec{F}_{2,1,INT}}{m_2} + \frac{\Sigma\vec{F}_{2,EXT}}{m_2} \ , \qquad (3)$$

dove nella sommatoria di tutte le forze abbiamo distinto fra quelle interne e quelle esterne. Questo approccio può diventare molto complicato da usare non appena si trattano situazioni realistiche, in cui ad esempio le forze interne dipendono dalla distanza tra gli oggetti (situazione tipica nel caso di forze elastiche, elettriche, gravitazionali). Il procedimento che ora svilupperemo, attraverso la definizione di due distinte accelerazioni che combinano le coordinate delle due particelle e di due distinte (e semplici) equazioni del moto, punta ad agevolare la soluzione dei problemi che riguardano sistemi materiali.

II. EQUAZIONE DEL MOTO RELATIVO

Facendo la differenza membro a membro tra la seconda e la prima delle due espressioni riportate in eq. 2 e 3 si ottiene:

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{2,1,INT}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{1,2,INT}}{m_1} + \frac{\Sigma\vec{F}_{2,EXT}}{m_2} - \frac{\Sigma\vec{F}_{1,EXT}}{m_1} . \tag{4}$$

Poniamoci ora in una condizione specifica, che tuttavia si verifica spesso nelle situazioni di interesse: supponiamo che gli ultimi due termini di eq. 4 si annullino. Notate che questo si verifica nel caso di sistemi isolati, in cui non ci sono forze esterne al sistema, oppure nel caso in cui le forze esterne generano la stessa accelerazione sui due oggetti. In queste condizioni, tenendo conto della eq. 1, cioè che le forze interne sono opposte fra loro, sostituendo e mettendo in evidenza, si ottiene:

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{F}_{2,1,INT}(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) = \vec{F}_{2,1,INT}(\frac{1}{\mu}) , \tag{5}$$

dove abbiamo introdotto la grandezza μ che ha le dimensioni di una massa e si chiama *massa ridotta* del sistema.

Diamo un significato fisico al primo membro dell'eq. 5. Chiamando $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ i vettori posizione (rispetto a una qualche origine) dei due oggetti, ricordando la definizione di accelerazione e usando la linearità dell'operazione di derivata, si ha

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_{REL}}{dt^2} = \vec{a}_{REL} , \tag{6}$$

dove abbiamo interpretato la differenza vettoriale $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ come la coordinata *relativa* $\vec{r}_{REL}$, cioè la posizione dell'oggetto 2 rispetto all'oggetto 1, e la sua derivata seconda rispetto al tempo, $\vec{a}_{REL}$, come *accelerazione relativa* dell'oggetto 2 rispetto all'oggetto 1.

A questo punto l'eq. 5 diventa:

$$\vec{a}_{REL} = \frac{\vec{F}_{INT}}{\mu} , \tag{7}$$

dove abbiamo rimosso i pedici 2,1 nella forza interna per evitare eccessi tipografici (tanto si capisce bene che la forza interna agisce tra i due oggetti). Questa equazione, che si chiama *equazione del moto relativo*, permette di trarre delle conclusioni molto interessanti e facili da ricordare:

- l'equazione del moto relativo ha la forma dell'equazione del moto (principio di Newton) con la presenza, però, della massa ridotta;
- l'accelerazione relativa, che è quella che comanda l'avvicinamento o allontanamento reciproco dei due oggetti, dipende solo dalla forza interna, cioè dall'interazione tra gli oggetti;
- le considerazioni appena fatte valgono solo nel caso di sistemi isolati o con forze esterne che forniscono la stessa accelerazione ai due oggetti (esempio eclatante la forza peso, che accelera entrambi gli oggetti di una quantità proporzionale a $\vec{g}$).

Abbiamo così determinato la prima delle due equazioni del moto che permettono di descrivere la dinamica del sistema.

III. EQUAZIONE DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Cerchiamo ora l'altra equazione del moto necessaria per risolvere il problema. Allo scopo riscriviamo l'eq. 2 e 3 portando al primo membro le masse:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{1,2,INT} + \Sigma\vec{F}_{1,EXT} \tag{8}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{2,1,INT} + \Sigma\vec{F}_{2,EXT} , \tag{9}$$

e così come prima abbiamo eseguito una differenza membro a membro, stavolta facciamo una somma membro a membro. Tenendo conto del fatto che le forze interne sono uguali e opposte (eq. 1), otteniamo facilmente:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \Sigma\vec{F}_{1,EXT} + \Sigma\vec{F}_{2,EXT} = \Sigma\vec{F}_{EXT} , \tag{10}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo voluto evidenziare che tutte le forze esterne si sommano vettorialmente tra loro, a prescindere che esse siano applicate a uno o all'altro degli oggetti che formano il sistema.

Notate che per scrivere l'eq. 8 e 9 non abbiamo dovuto usare nessuna condizione su forze esterne o interne e osservate anche che l'equazione manterrebbe una forma simile anche nel caso in cui ci fossero più di due componenti del sistema, dato che le forze interne si annullerebbero sempre a coppie.

Anche in questo caso diamo un significato fisico al termine che compare al primo membro. A questo scopo definiamo un vettore che si chiama *posizione del centro di massa*:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\Sigma_i m_i\vec{r}_i}{\Sigma_i m_i} , \tag{11}$$

dove la sommatoria va fatta su tutti i componenti del sistema che, in questo caso, potrebbero anche essere ben più di due. Derivando (due volte) rispetto al tempo entrambi i membri di eq. 11, supponendo per semplicità che le masse restino costanti nel tempo, si può definire un'*accelerazione del centro di massa* $\vec{a}_{CM}$:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{\Sigma m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}}{\Sigma m_i} . \tag{12}$$

A questo punto è facile riconscere che il termine al primo membro di eq. 10 può essere espresso come $\Sigma m_i \vec{a}_{CM} = M_{TOT}\vec{a}_{CM}$, dove M_{TOT} indica la *massa totale del sistema* (la somma delle due masse nel caso in cui ci siano solo due oggetti). L'eq. 10 si può allora riscrivere in una forma estremamente suggestiva, che è la seguente:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma \vec{F}_{EXT}}{M_{TOT}} \; ; \tag{13}$$

essa rappresenta la seconda equazione del moto di cui eravamo alla ricerca

Anche qui si possono trarre delle importanti conclusioni:

- l'equazione del moto del centro di massa ha la forma dell'equazione del moto (principio di Newton) con la presenza della massa totale del sistema;
- l'accelerazione del centro di massa dipende solo dalla somma delle forze esterne al sistema, dovunque esse siano applicate;
- le considerazioni appena fatte sono del tutto generali, prescindendo dal tipo di sistema o di forza considerata e anche dal numero di componenti del sistema;
- in buona sostanza, il centro di massa, di cui sopra abbiamo definito la posizione $\vec{r}_{CM}$, si comporta come un *punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema che si muove come se su di esso fosse applicata la somma vettoriale di tutte le forze esterne al sistema.*