Sommario

Questa nota ha diversi scopi e motivazioni: (i) essa riguarda la misura della resistenza interna dell'induttore usato in laboratorio e della sua dipendenza dalla presenza di una corrente alternata a frequenza relativamente alta ($\simeq 1$ kHz), un argomento di interesse per alcune delle esperienze pratiche svolte e ancora da svolgere; (ii) i risultati della misura, eseguita con un metodo non convenzionale rispetto agli strumenti usuali in laboratorio didattico, sono presentati sotto forma di breve relazione, che può essere potenzialmente di qualche utilità per la redazione della relazione semestrale; (iii) infine, e di maggiore importanza dal punto di vista dei contenuti, l'appendice di questa nota descrive e discute brevemente un'importante classe di misure che, pur non essendo accessibile nelle esperienze didattiche, è di grande rilievo pratico e merita sicuramente un cenno.

Misura della resistenza interna di un induttore: una relazione

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

version 1 - FF, 7 gennaio 2015

1 Introduzione e motivazioni

La resistenza interna di un induttore può dipendere dalla frequenza della corrente che lo attraversa a causa del cosiddetto *effetto di prossimità*, ovvero di un insieme di fenomeni legati alla presenza di un campo magnetico oscillante indotto che agisce sui portatori di carica, deviandone (in senso classico) le traiettorie e modificando la resistenza rispetto al valore misurato in condizioni stazionarie, cioè di corrente continua.

Il fenomeno è complicato da modellare, dato che richiede di conoscere l'intensità del campo magnetico su scala locale, cioè all'interno del filo, nelle varie regioni dell'induttore. Anche la misura è complicata: infatti l'eventuale aumento della resistenza interna con la frequenza angolare ω è generalmente coperto dall'aumento del modulo dell'impedenza complessiva del dispositivo, $Z = r + j\omega L$, con r resistenza interna e L impedenza propria dell'induttore. Poiché nelle condizioni sperimentali ci si aspetta r dell'ordine delle decine di ohm, simile al valore misurato in continua, e $L \simeq 0.5$ H, si vede facilmente come già a valori relativamente bassi di frequenza angolare il termine "reattivo" (dovuto all'impedenza) prevalga su quello resistivo nel determinare il valore di $|Z|$, che è di fatto la grandezza misurata.

Lo scopo dell'esperimento presentato in questa breve relazione è la misura indiretta di r, e in particolare l'analisi della dipendenza dai parametri sperimentali, con un metodo che permette in linea di principio di separare la misura, condotta in alternata a frequenza relativamente bassa, dall'applicazione della corrente alternata a frequenza più elevata. Questo metodo non è realizzabile in laboratorio didattico a causa dell'indisponibilità di uno specifico strumento, un *amplificatore lock-in*.

2 Metodo e apparato sperimentale

Il metodo impiegato prevede di usare due distinti generatori di forme d'onda alternate sinusoidali, operanti a frequenze angolari rispettivamente ω_1 e ω_2, cioè frequenze f_1 e f_2, con $f_1 < f_2$, regolabili individualmente per quanto riguarda la frequenza e l'ampiezza. La misura di r viene eseguita usando il segnale a frequenza f_1, mentre il segnale a frequenza f_2 serve per creare la "perturbazione" necessaria per verificare il fenomeno sotto indagine. In altre parole, il segnale a frequenza f_1 viene mantenuto costante per consentire una misura di r eseguita

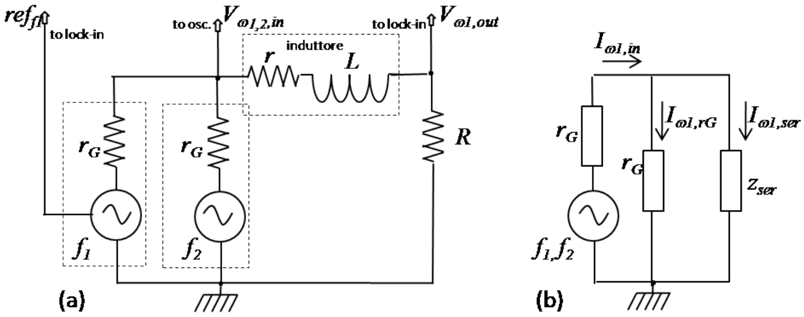

Figura 1: Schema circuitale realizzato nell'esperimento (a) e sua rappresentazione in termini di impedenze alle due frequenze considerate (b). In (a), la linea che parte dal generatore a frequenza f_1 e va al lock-in (indicata con ref_{f1}), rappresenta il collegamento al segnale di riferimento necessario per il funzionamento del lock-in. L'induttore è quello disponibile in laboratorio didattico, costituito dalla serie di 1500+1500 spire.

sempre nelle stesse condizioni, mentre quello a frequenza f_2 viene variato in ampiezza e frequenza per verificare gli effetti sulla misura di r.

Chiave del metodo è l'impiego della rivelazione in fase, detta anche *detezione sincrona*, eseguita tramite un *amplificatore lock-in*: i dettagli della tecnica sono descritti in appendice a questa nota. Essa permette di estrarre l'ampiezza della componente del segnale a una determinata frequenza e che mantiene una relazione di fase precisa e costante rispetto a un certo segnale di riferimento. Nel nostro esperimento, il segnale a frequenza f_1 è prodotto da un generatore di frequenze interno all'amplificatore lock-in, che fornisce anche automaticamente il segnale di riferimento. La misura viene eseguita selezionando solo la risposta a questo segnale, anche se il circuito è contemporaneamente attraversato da corrente a frequenza f_2. Questa possibilità consente di separare la misura dalla perturbazione, intesa nel senso definito prima.

Il circuito di misura, rappresentato in Fig. 1(a), comprende anche un resistore esterno R, di valore nominale 68 ohm, che serve per consentire la misura della corrente che fluisce nell'induttore, proporzionale alla tensione letta ai capi del resistore stesso. I due generatori di funzione, entrambi con resistenza interna $r_G = 50$ ohm, sono posti in parallelo tra loro e riferiti alla stessa linea di massa. L'oscilloscopio serve per misurare l'ampiezza dei segnali, in particolare di quello a frequenza f_2 inviato al circuito.

2.1 Modello

Grazie all'impiego del metodo descritto e all'uso dell'amplificatore lock-in, il circuito può essere considerato *separatamente* per le due frequenze angolari ω_1 e ω_2 utilizzate. In sostanza, se si vuole studiare il comportamento a frequenza angolare ω_1, si può trascurare la presenza del segnale a frequenza angolare ω_2. Tuttavia, secondo il teorema, o principio, di Thévenin, il generatore alla frequenza non considerata (qui quello a f_2) deve essere rimpiazzato da un resistore r_G. Il circuito che si ottiene è mostrato in Fig. 1(b).

L'impedenza complessiva Z_{tot} è data dalla serie di r_G (di uno dei due generatori, qui quello a f_1) con il parallelo tra r_G (dell'altro generatore) e l'impedenza Z_{ser} data dalla serie di induttore (reale) e resistore R. Scriviamo separatamente le varie impedenze con l'obiettivo di giungere all'espressione che lega il fasore $V_{\omega 1,G}$ (segnale prodotto dal generatore a frequenza angolare ω_1) con il fasore $V_{\omega 1,out}$ che rappresenta il segnale ai capi del resistore R, quello che viene inviato al lock-in.

Innanzitutto si ha

$$V_{\omega 1,out} = RI_{\omega 1,ser} \ , \tag{1}$$

dove $I_{\omega 1,ser}$ è il fasore di corrente che circola nel ramo del circuito con impedenza Z_{ser}. Si ha inoltre

$$Z_{ser} = j\omega_1 L + r + R \ , \tag{2}$$

con ovvio significato dei simboli.

Il parallelo tra le impedenze r_G e Z_{ser} si comporta come un partitore di corrente, per cui

$$I_{\omega 1,ser} Z_{ser} = I_{\omega 1,rG} r_G \ , \tag{3}$$

con $I_{\omega,rG}$ fasore della corrente che attraversa il ramo del circuito costituito da r_G [vedi Fig. 1(b)]. Deve poi essere

$$I_{\omega 1,ser} + I_{\omega 1,rG} = I_{\omega 1} \ , \tag{4}$$

ovvero

$$I_{\omega 1} = I_{\omega 1,ser}(1 + \frac{Z_{ser}}{r_G}) = I_{\omega 1,ser}\frac{r_G + Z_{ser}}{r_G} \ , \tag{5}$$

dove $I_{\omega 1}$ è il fasore della corrente totale erogata dal generatore a frequenza angolare ω_1.

D'altra parte è anche

$$I_{\omega 1} = \frac{V_{\omega 1,G}}{Z_{tot}} \tag{6}$$

con

$$Z_{tot} = r_G + (\frac{1}{r_G} + \frac{1}{Z_{ser}})^{-1} = r_G(1 + \frac{Z_{ser}}{r_G + Z_{ser}}) = \frac{r_G}{r_G + Z_{ser}}(r_G + 2Z_{ser}) \ , \tag{7}$$

impedenza totale del circuito, per cui si può scrivere

$$\frac{V_{\omega 1,G}}{r_G}\frac{r_G + Z_{ser}}{r_G + 2Z_{ser}} = I_{\omega 1,ser}\frac{r_G + Z_{ser}}{r_G} \ , \tag{8}$$

cioè

$$I_{\omega 1,ser} = \frac{V_{\omega 1,G}}{r_G + 2Z_{ser}} \ . \tag{9}$$

Si ottiene infine

$$V_{\omega 1,out} = \frac{R}{r_G + 2r + 2R + 2j\omega L}V_{\omega 1,G} \ , \tag{10}$$

dove è stata esplicitata la Z_{ser}.

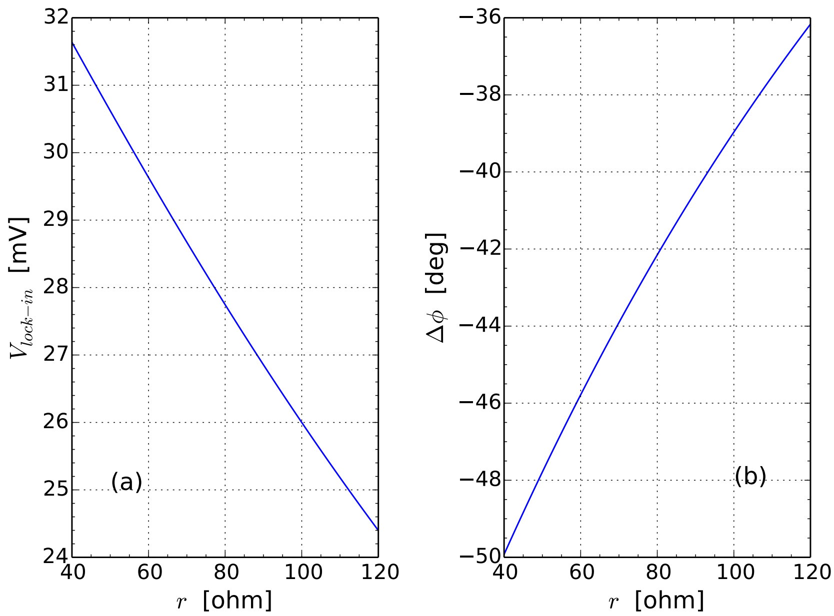

Figura 2: Ampiezza $V_{lock-in}$ (a) e sfasamento Δphi (b) attesi secondo il modello descritto nel testo, supponendo $|V_{\omega 1,in}| = 200$ mV e i valori di L, r_G, ω_1 indicati nel testo.

Il modulo di $|V_{\omega 1,out}|$, qui definito anche $V_{lock-in}$, e lo sfasamento $\Delta\phi$ tra $V_{\omega 1,out}$ e il segnale di riferimento, in fase con $V_{\omega 1,in}$, vengono misurati dall'amplificatore lock-in. La loro espressione è

$$\begin{aligned} V_{lock-in} &= \frac{R}{\sqrt{(r_G + 2r + 2R)^2 + (2\omega_1 L)^2}} |V_{\omega 1,in}| && (11) \\ \Delta\phi &= -\arctan\left(\frac{2\omega_1 L}{r_G + 2r + 2R}\right) . && (12) \end{aligned}$$

Dalla loro misura può dunque essere dedotto r, supponendo noti ω_1, L, r_G, R (ed eventualmente $|V_{\omega 1,in}|$).

La Fig. 2 mostra gli andamenti attesi per le due grandezze secondo l'Eq. 11 supponendo una variazione di r da circa 40 ohm, valore prossimo a quello misurato in continua, fino a 120 ohm. Per il calcolo si sono usati i seguenti valori: $R = 62.8$ ohm (misurato con tester), $L = 0.5$ H, $r_G = 50$ ohm, $\omega_1 = 303.3$ rad/s, corrispondente alla frequenza (misurata) $f_1 = 48.3$ Hz. Le incertezze sulle grandezze misurate saranno dichiarate ed eventualmente discusse nella prossima sezione.

Vista la topologia del circuito, se se ne considera il comportamento a frequenza angolare ω_2 si ritrovano ovviamente equazioni di forma simile. In particolare, il fasore di corrente $I_{\omega 2,ser}$ che circola nella serie, e quindi nell'induttore, ha espressione

$$I_{\omega 2,ser} = \frac{V_{\omega 2,in}}{r_G + 2Z'_{ser}} , \tag{13}$$

dove $V_{\omega 2,in}$ rappresenta il fasore del segnale prodotto dal generatore a frequenza angolare ω_2 (in ingresso al circuito) e l'apice sul simbolo dell'impedenza della serie è usato per indicare che, essendo $\omega_1 \neq \omega_2$ (in particolare nell'esperimento è $\omega_2 > \omega_1$), la resistenza interna dell'induttore è presumibilmente $r' \neq r$.

Nel nostro modello si ipotizza che la variazione di r rispetto al valore in corrente continua dipenda da effetti di induzione magnetica. Secondo la legge di Faraday, che regola questi effetti, la loro entità è attesa essere proporzionale alla *derivata temporale* del fasore $I_{\omega 2,ser}$, che rappresenta la corrente a frequenza angolare ω_2 che fluisce nell'induttore. Essendo le dipendenze temporali di tipo sinusoidale, tale derivata temporale è proporzionale a $\omega_2 I_{\omega 2,ser}$. Nell'esperimento, la frequenza scelta per il generatore è $f_2 \simeq 1$ kHz, per cui $\omega_2 L \simeq 3 \times 10^3$ ohm è atteso essere molto maggiore di r_G e R; presumibilmente, esso è anche maggiore di r'. Di conseguenza, l'impedenza della serie può essere approssimata con $j\omega_2 L$, portando a $I_{\omega 2,ser} \sim V_{\omega 2,in}/(j\omega_2 L)$.

Supponendo valido il modello basato sulla legge di Faraday, è evidente che in prima approssimazione (trascurando l'eventuale dipendenza di r' dalla frequenza) gli effetti sotto analisi non sono influenzati da ω_2: infatti questa grandezza compare al numeratore e al denominatore dell'espressione (legge di Faraday) che supponiamo regoli l'entità degli effetti. Invece ci si aspetta di avere una dipendenza dall'ampiezza $|V_{\omega 2,in}|$ del segnale prodotto dal generatore a frequenza angolare ω_2. Pertanto le misure sono state eseguite mantenendo costante la frequenza angolare ω_2 e variando l'ampiezza del segnale in modo controllato.

3 Misure e analisi

Sono state inizialmente misurati $R = (62.8 \pm 0.5)$ ohm, $r = (40.3 \pm 0.3)$ ohm con multimetro digitale Fluke 77 III in corrente continua (incertezza $\pm 0.5\% + 1$ digit) e inoltre sono state fissate l'ampiezza del generatore a $|V_{\omega 1,in}| = (104 \pm 1)$ mV e la frequenza $f_1 = (48.35 \pm 0.01)$ Hz.

Quindi è stata eseguita una sessione di misure fissando $f_2 = (1027 \pm 2)$ Hz e variando l'ampiezza $|V_{\omega 2,in}|$ nell'intervallo approssimato 10 mV - 7 V, coperto in modo non omogeneo. Tale ampiezza è stata continuativamente misurata con un oscilloscopio Tektronix TDS-1024 (digitale a 8 bit, 1 GSa/s), con un'incertezza compresa tra $\pm 3\%$ e $\pm 5\%$ (dipendente dalla scala).

Come già affermato, le misure di $V_{lock-in}$ e di $\Delta\phi$ sono state compiute con un *amplificatore lock-in* Stanford Research System SR830DSP (uno strumento digitale 'doppio" nel senso specificato in appendice). Come incertezza di misura sono stati presi i valori di calibrazione indicati nel manuale, cioè $\pm 0.5\%$ per $V_{lock-in}$ e ± 0.1 deg per $\Delta\phi$. Esiste poi un ulteriore errore sistematico ± 1 deg nella misura "assoluta" dello sfasamento, che va aggiunto al precedente. Visto che le barre di errore sono dominate da cause strumentali (calibrazione), è atteso che l'incertezza sia sovrastimata.

Il risultato della misura è mostrato in Fig. 3 [ampiezza $V_{lock-in}$ e sfasamento $\Delta\phi$ nei pannelli (a) e (b), rispettivamente]. Gli andamenti qualitativi e l'ordine di grandezza delle misure sono parzialmente in accordo con le previsioni del modello; tuttavia per entrambi le grandezze si nota la tendenza a una sorta di plateau per alti valori di $|V_{\omega 2,in}|$, che suggerisce una qualche forma di saturazione degli effetti studiati.

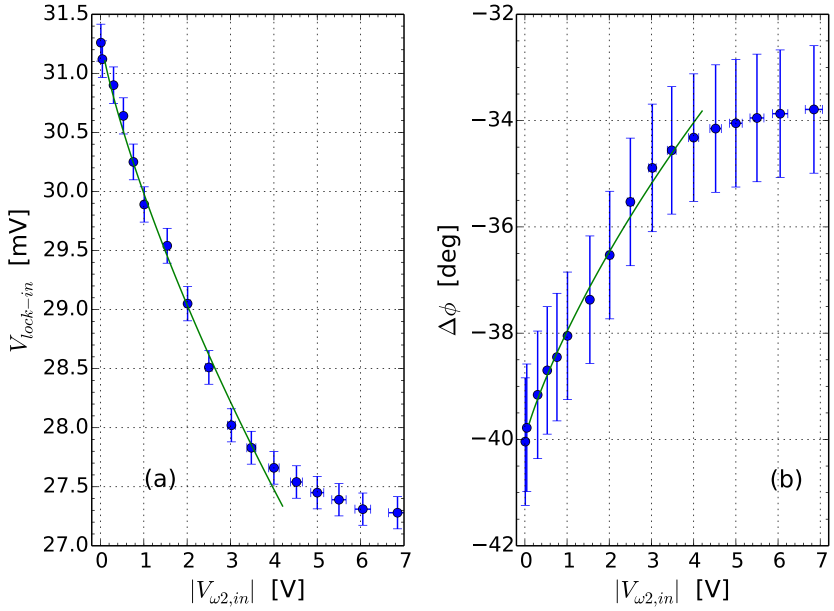

Figura 3: Ampiezza $V_{lock-in}$ (a) e sfasamento Δphi (b) misurati nell'esperimento. Le barre di errore sono rappresentative delle incertezze strumentali (calibrazione). Le linee continue sono best-fit realizzati come discusso nel testo.

Allo scopo di tentare un'analisi del fenomeno, si è deciso *arbitrariamente* di legare la resistenza interna r dell'induttore all'ampiezza del segnale $|V_{\omega 2,in}|$ attraverso una legge di potenza del tipo

$$r = r_0 + A|V_{\omega 2,in}|^b , \tag{14}$$

con $r_0 = 40.3$ ohm valore misurato in continua (senza incertezza) e A e b parametri opportunamente dimensionati da individuare nel best-fit. La scelta di questo legame modello tra resistenza interna e ampiezza del segnale, dunque corrente che fluisce nell'induttore, non ha motivazioni fisiche precise in senso quantitativo. Tuttavia è ragionevole supporre che: (i) all'aumentare dell'entità della perturbazione, cioè dell'ampiezza $|V_{\omega 2,in}|$, r tenda ad aumentare; (ii) l'aumento non sia lineare (da cui la legge di potenza), sia per la residua dipendenza di r' da $|V_{\omega 2,in}|$ che per la fisica del processo, su cui torneremo in seguito; (iii) per motivi simili, ci sia anche un effetto di saturazione.

Sono stati dunque eseguiti dei best-fit dei dati sperimentali secondo le seguenti funzioni:

$$V_{lock-in} = \frac{R}{\sqrt{(r_G + 2(r_0 + A|V_{\omega 2,in}|^b) + 2R)^2 + (2\omega_1 L)^2}}|V_{\omega 1,in}| \tag{15}$$

$$\Delta\phi = -\arctan\left(\frac{2\omega_1 L}{r_G + 2(r_0 + A|V_{\omega 2,in}|^b) + 2R}\right) , \tag{16}$$

che in sostanza sono le equazioni del modello (Eq. 11) in cui è stata inserita la supposta dipendenza di r da $|V_{\omega 2,in}|$ di Eq. 14. Nei best-fit sono stati fissati

parameter	from $V_{lock-in}$	from $\Delta\phi$	unit
A	12.6 ± 2.1	10.9 ± 1.2	ohm/V^b
b	0.79 ± 0.09	0.83 ± 0.06	
L	0.51 ± 0.01	0.49 ± 0.02	H
χ^2	6.3	0.4	
ndof	12	12	
$\mathrm{cov}_{A,b}$	-0.95	-0.94	
$\mathrm{cov}_{A,L}$	-0.88	0.89	
$\mathrm{cov}_{b,L}$	0.78	-0.76	

Tabella 1: Risultati dei best-fit eseguiti secondo quanto descritto nel testo. La seconda colonna si riferisce al best-fit sui dati di $V_{lock-in}$, la terza a quello sui dati di $\Delta\phi$. Le ultime tre righe della tabella mostrano le covarianze normalizzate ottenute dalla routine di best-fit di Python.

tutti i valori misurati (senza tenere conto della loro incertezza) e lasciati come parametri A, b, L. Per tenere conto della saturazione, i best-fit sono stati eseguiti su un sub-set di dati, corrispondenti a $|V_{\omega 2,in}| < 4.5$ V (limite scelto arbitrariamente).

Le curve ottenute sono mostrate con linee continue in Fig. 3. Qualitativamente c'è un discreto accordo, almeno per i dati corrispondenti a bassi valori di $|V_{\omega 2,in}|$. I risultati dei best-fit sono riportati in Tab. 1. Nei best-fit è stata trascurata l'incertezza sulla variabile dipendente (l'ampiezza $|V_{\omega 2,in}|$) per limitare la complessità dell'algoritmo.

Come si può notare, i valori del χ^2 sono bassi, specie per il best-fit sui dati di $\Delta\phi$, cosa che può essere ben spiegata dalla sovrastima delle incertezze. Inoltre, come ci si poteva facilmente attendere considerando la forma delle funzioni di best-fit, c'è una correlazione molto forte tra i vari parametri. Il confronto con i dati attesi può essere facilmente condotto sul parametro L, che risulta in tutti e due i casi in accordo con quanto ci si poteva aspettare. Infine la determinazione di tutti i parametri liberi conduce a risultati congruenti, entro le rispettive incertezze, per i due best-fit.

Nelle ipotesi del modello, la resistenza interna r passa da circa 40 ohm in assenza di perturbazione a circa 80 ohm per $|V_{\omega 2,in}| \approx 4$ V. Dunque l'aumento di resistenza interna dovuto alla presenza di un'(intensa) corrente a frequenza relativamente alta (ricordiamo, $f_2 \simeq 1$ kHz) è ben verificato. Come si nota, l'aumento di resistenza interna risulta sublineare ($b < 1$) con l'entità della perturbazione. Questo può essere interpretato osservando che, per la legge di Faraday, i campi magnetici indotti hanno un verso tale che la loro variazione di flusso magnetico si oppone alla variazione di flusso dovuta alla variazione di corrente applicata all'induttore. In altre parole, nell'induttore i campi indotti vengono ad avere verso opposto rispetto a quelli dovuti alla causa "esterna" (la corrente applicata), che quindi tendono a essere schermati (diminuiti in intensità) proprio dai campi indotti. In tali condizioni è ragionevole trovare andamenti sublineari e anche fenomeni di saturazione, come quelli effettivamente osservati.

4 Conclusioni

In questa relazione è stato presentato un metodo di misura per la resistenza interna dell'induttore usato in laboratorio, in grado di rivelarne l'aumento in presenza di una corrente oscillante a frequenza relativamente alta (circa 1 kHz). Il metodo, basato su tecniche di detezione sincrona e reso possibile grazie all'uso di un amplificatore lock-in, non disponibile in laboratorio didattico, ha permesso di separare la misura della resistenza dalla perturbazione, cioè l'applicazione della corrente a frequenza relativamente alta che dà origine agli effetti di induzione ritenuti responsabili per l'aumento della resistenza.

L'applicazione del metodo ha condotto a risultati sperimentali che, analizzati secondo il modello proposto, indicano un effettivo aumento della resistenza interna (di un fattore $\simeq 2$) quando l'ampiezza della d.d.p. di perturbazione passa da circa zero a circa 4.5 V. La risposta alla perturbazione risulta sublineare, come atteso sulla base di considerazioni qualitative per la schermatura dei campi magnetici a causa delle "correnti parassite" indotte, e inoltre mostra una tendenza alla saturazione che non è stata modellata. I risultati dei best-fit condotti su due classi di dati sono in accordo tra loro, e il valore del coefficiente di autoinduzione determinato è in accordo con le attese.

5 Appendice: il lock-in

La tecnica di misura impiegata nell'esperimento, basata sull'uso di un amplificatore lock-in, è di estremo interesse in tutte le situazioni in cui si deve estrarre un debole segnale periodico alternato da un background costituito da rumore (normalmente aperiodico, ma supposto comunque alternato) e segnali periodici ad altre frequenze o con relazioni di fase non costanti rispetto al segnale di interesse.

Questa è effettivamente la situazione incontrata nell'esperimento descritto: il segnale di interesse, modulato alla frequenza f_1, era accompagnato da una forte modulazione a frequenza $f_2 \neq f_1$ e, presumibilmente, vista la debolezza delle ampiezze in gioco (la scala dei grafici è in mV), da rumore di tipo elettromagnetico, ad alta frequenza o aperiodico.

I metodi di detezione sincrona consentono di "agganciare" la misura alla frequenza e alla fase di interesse, permettendo di cancellare tutti i contributi spurii o di rumore che hanno diverse frequenze o relazioni di fase non costanti con il segnale di interesse.

5.1 Modello di lock-in

Nell'amplificatore lock-in l'aggancio alla frequenza e fase del segnale viene realizzato in un modo concettualmente molto semplice. Il requisito fondamentale di questa tecnica è che *siano note frequenza e fase della modulazione del segnale di interesse*. Nell'esperimento che è stato presentato, questo è automaticamente garantito dal fatto che il segnale a frequenza f_1 è prodotto da un generatore interno all'amplificatore lock-in.

In termini generali, l'amplificatore lock-in ha bisogno di due segnali in ingresso:

1. il segnale incognito modulato a frequenza angolare ω, che supponiamo del tipo $V_{sig}(t) = V_0 \cos(\omega t + \Delta\phi)$, con V_0 ampiezza e $\Delta\phi$ termine di fase costante, entrambi incogniti;

2. un segnale di *riferimento*, $V_{ref}(t) = V_r \cos(\omega t)$, che ha ampiezza V_r *nota* e che oscilla alla stessa frequenza del segnale incognito, mantenendo con questo uno sfasamento costante $-\Delta\phi$.

Lo schema di principio del lock-in è mostrato in Fig. 4(a): il segnale in ingresso, dopo essere stato opportunamente condizionato (in genere amplificato), viene moltiplicato analogicamente per il segnale di riferimento. La moltiplicazione è un'operazione che, in genere, viene simulata analogicamente con dei dispositivi detti miscelatori, o mixers. Non entriamo qui nei dettagli, ma si sappia che questa operazione può essere compiuta in maniera sufficientemente affidabile in un vasto intervallo di frequenze. All'uscita dello stadio di moltiplicazione è quindi posto un *filtro passa-basso* con una frequenza di taglio prossima a zero.

Vediamo il modello di funzionamento. La moltiplicazione produce un segnale

$$\begin{aligned} V_{out,mult}(t) &= V_{sig}(t)V_{ref}(t) = V_0 V_r \cos(\omega t + \Delta\phi)\cos(\omega t) = & (17)\\ &= V_0 V_r [\cos^2(\omega t)\cos(\Delta\phi) - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(\Delta\phi)] \ , & (18) \end{aligned}$$

dove è stata impiegata una ben nota proprietà delle funzioni trigonometriche.

Il moltiplicatore è seguito da uno stadio di filtro passa-basso, o integratore, con una frequenza di taglio molto bassa, ovvero con un tempo di integrazione molto grande rispetto a $\omega/(2\pi)$. L'effetto di questo stadio è quello di mediare nel tempo: il termine $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$, oscillante a frequenza 2ω, ha media nulla, e dunque scompare all'uscita del filtro, mentre il termine $\cos^2(\omega t)$ ha media $1/2$. All'uscita del filtro il segnale è quindi

$$V_{out} = \frac{V_0 V_r}{2} \sin(\Delta\phi) \ . \qquad (19)$$

Questo segnale è *continuo* e, supponendo di conoscere V_r, come di fatto si verifica, fornisce una misura di $V_0 \sin(\Delta\phi)$.

5.2 Lock-in "doppio"

Quello di cui abbiamo trattato finora è il principio di funzionamento di un lock-in (analogico) ordinario. Lo strumento impiegato nelle misure è un lock-in (digitale, ma questo aspetto lo trascuriamo, rimanendo su una descrizione analogica, che è molto più immediata) "doppio". Questo aggettivo significa che all'interno dello strumento ci sono due distinti moltiplicatori e due distinti filtri e un circuito (funziona con tecniche di Phase-Locked Loop - PLL) in grado di creare un segnale di riferimento $V'_{rif}(t)$ in *quadratura*, cioè sfasato di $\pi/2$, rispetto a $V_r(t)$. Questo segnale è dunque del tipo $V'_{rif}(t) = V'_r \sin(\omega t)$, con V'_r noto. La Fig. 4(b) mostra uno schema dell'insieme.

La moltiplicazione per il segnale $V'_r(t)$, seguita dall'operazione di filtro passa-basso, o integrazione temporale, fornisce in uscita un segnale continuo che, come è facile verificare, è del tipo

$$V'_{out} = \frac{V_0 V'_r}{2} \cos(\Delta\phi) \ . \qquad (20)$$

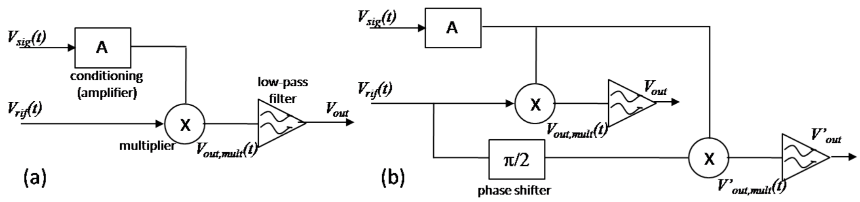

Figura 4: Schema di massima a blocchi di un amplificatore lock-in in versione singola (a) e doppia (b).

Le due Eqs. 19,20 costituiscono un sistema di due equazioni e due incognite, la cui soluzione fornisce il valore incognito V_0 e lo sfasamento $\Delta\phi$. Senza entrare nei dettagli di come la soluzione del sistema sia effettivamente determinata, questo è il metodo impiegato nell'esperimento, da cui è dunque possibile determinare ampiezza e sfasamento del segnale.

L'amplificatore lock-in, e, più in generale, le tecniche di detezione sincrona da esso sfruttate, sono degli strumenti di grandissima utilità pratica in un enorme array di applicazioni. Oltre a numerosi altri aspetti, che non trattiamo, sottolineiamo qui come questo strumento sia in grado di estrarre da un segnale disturbato (cioè con rumore e/o sovrapposti altri segnali spurii) l'ampiezza del primo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier di un'onda di cui è nota la frequenza (e il termine di fase costante) attraverso un metodo concettualmente molto semplice e ben controllato. Tenete poi presente che la maggior parte degli amplificatori lock-in commerciali consentono di estrarre anche le ampiezze dei coefficienti di Fourier di ordine superiore, cosa che può essere molto utile per alcune applicazioni specifiche.

Nei fatti, l'amplificatore lock-in permette, come vantaggio principale, quello di aumentare il rapporto S/N (segnale/rumore) di parecchi ordini di grandezza. Un segnale a frequenza e fase costante note sommerso da un rumore a media temporale nulla, di tipo aperiodico o periodico con altra frequenza o termine di fase costante, può essere convenientemente letto anche se il rapporto tra la sua ampiezza e quella del rumore è inferiore a 1 (anche 1/100 o addirittura 1/1000).

5.3 Una sorta di simulazione

Sfruttando le spero note potenzialità di Python, ho cercato di fare una specie di "simulazione" numerica del funzionamento del lock-in. A questo scopo ho preparato un array costituito dalla sovrapposizione (somma) di:

1. un segnale oscillante di tipo $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \Delta\phi)$, con $V_0 = 0.05$ arb.un., $\omega = 2\pi f$, con $f = 200$ Hz, e $\Delta\phi = 0.6$ rad; questo segnale rappresenta quello che voglio misurare, cioè di cui voglio determinare V_0 e $\Delta\phi$;

2. un segnale oscillante con altra frequenza, di tipo $V_{f'}(t) = V_0' \cos(\omega' t)$, con $V_0' = 10V_0$ e $\omega' = \pi^2\omega$ (valore evidentemente incommensurabile con ω); esso rappresenta un segnale spurio a frequenza più alta di quella di interesse (notate che la sua ampiezza è maggiore di quella del segnale di interesse);

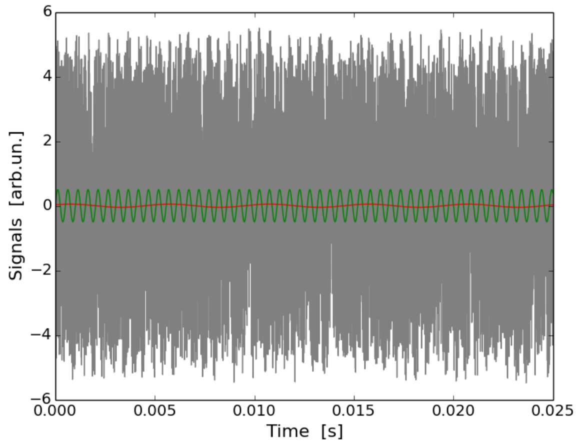

Figura 5: Segnale fittizio usato nella "simulazione" del lock-in presentata nel testo. La curva grigia si riferisce all'array complessivo, quella rossa al segnale di interesse e quella verde al segnale periodico spurio a frequenza angolare ω'.

3. un rumore prodotto con un generatore di numeri random distribuiti uniformemente tra $-100V_0$ e $100V_0$, che rappresenta un rumore aperiodico (a media nulla) di ampiezza molto superiore a quella del segnale di interesse.

La Fig. 5 mostra l'array così prodotto (curva grigia) assieme al segnale di interesse, in rosso, e all'altro segnale periodico, in verde, per un intervallo temporale corrispondente a 5 periodi di oscillazione del segnale di interesse. Se immaginaste di osservare questo segnale su un oscilloscopio, di sicuro non riuscireste a distinguere il segnale di interesse: infatti il rapporto S/N è $< 1/100$.

Per simulare il lock-in (doppio), ho moltiplicato l'array per le funzioni $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$. Quindi, per simulare il filtro passa-basso, ho integrato numericamente (formula dei trapezi) gli array ottenuti, che ho quindi diviso per l'intervallo temporale di integrazione (scelto pari a 100 periodi). In questo modo ho praticamente ottenuto l'analogo simulato delle grandezze V_{out} e V'_{out}, trattando le quali ho infine determinato V_0 e $\Delta\phi$. A causa del carattere statistico della simulazione (il rumore simulato è stocastico, almeno nei limiti in cui un generatore di numeri casuali può essere considerato stocastico), ho ripetuto 20 volte la procedura e valutato lo scarto dei risultati, ottenendo $V_0 = (5.2 \pm 0.3) \times 10^{-2}$ arb.un. e $\Delta\phi = (0.61 \pm 0.02)$ rad.. Questi valori sono in accordo con le attese, essendo pari, entro l'incertezza, ai valori assegnati in fase di simulazione. Dunque il mio "lock-in simulato" permette di estrarre le caratteristiche del segnale di interesse pur in presenza di un rapporto S/N $< 1/100$.