Nota sull'oscillatore armonico (debolmente) smorzato

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 1 - FF, 15 marzo 2012)

Questa nota riguarda la descrizione del problema dell'oscillatore armonico smorzato per la presenza dell'attrito. Essa fa riferimento in particolare alla situazione sperimentale dell'esperienza "pendolo quadrifilare" svolta in laboratorio e dunque costituisce un utile preliminare per la comprensione dell'esperimento e per la redazione della relazione.

I. OSCILLATORE ARMONICO SENZA ATTRITO

Il problema dell'oscillatore armonico è ben noto a tutti. Nella situazione "ideale" che si tratta normalmente nei corsi di fisica generale si suppone che siano assenti tutte le possibili cause di attrito che possono agire sul moto dell'oggetto (ovviamente supposto puntiforme!). In queste condizioni, chiamando $x(t)$ la coordinata dell'oggetto[1], l'equazione del moto si scrive

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) + C \ , \tag{1}$$

dove ω è la pulsazione dell'oscillatore[2] e C è una costante che dipende dalla fisica del problema e determina la posizione di equilibrio (si può infatti facilmente dimostrare che $x_{eq} = C/\omega^2$).

La soluzione dell'equazione differenziale sopra scritta conduce alle seguenti leggi orarie del moto e della velocità:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_{eq} \tag{2}$$
$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \Phi) \tag{3}$$

dove A e Φ sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali del problema. Nel prosieguo, per semplificare la notazione, supporremo di essere nelle condizioni in cui $\Phi = 0$; inoltre immagineremo di avere un sistema in cui $C = 0$ (cioè $x_{eq} = 0$). Queste assunzioni non disturbano la generalità della nostra trattazione.

Per concludere questa premessa facciamo qualche ulteriore considerazione di carattere energetico. Dato che abbiamo supposto assenza di attrito, l'energia meccanica si deve conservare. La differenza di energia meccanica tra due istanti qualsiasi nel moto dell'oscillatore armonico, che deve fare zero a causa della conservazione, è data dalla somma della differenza di energia cinetica e differenza di energia potenziale. Di conseguenza quando l'energia cinetica è massima l'energia potenziale è minima, e viceversa. Per determinare il valore dell'energia meccanica dell'oscillatore possiamo allora considerare la sola energia potenziale negli istanti in cui l'energia cinetica è minima. Dato che nell'oscillatore armonico ci sono degli istanti in cui l'oggetto è fermo (i punti "estremi" dell'oscillazione, che, avendo posto $\Phi = 0$, si determinano agli istanti $t' = N\pi/\omega = NT/2$, con N intero e $T = 2\pi/\omega$ periodo dell'oscillazione), il valore minimo dell'energia cinetica è nullo. Negli istanti t' le posizioni dell'oggetto sono tali che $|x(t')| = |x_M| = A$ (notate l'uso del modulo che serve a indicare in un colpo solo le posizioni da una parte e dall'altra della posizione di equilibrio $x_{eq} = 0$ - si suppone $A > 0$). Se per il momento facciamo riferimento a un oscillatore armonico costituito da una molla di massa trascurabile e costante elastica k a cui è attaccata una massa m (e supponiamo, in accordo con quanto assunto prima, che il sistema di riferimento sia centrato sulla lunghezza di riposo della molla, la quale ha il proprio asse in direzione orizzontale), è facile esprimere l'energia elastica in questi istanti. Essa infatti è $U_{ela} = (k/2)x_M^2 = (k/2)A^2$. Ricordando ill legame tra costante elastica, massa e pulsazione, è facile allora ottenere $U_{ela}(t') = (m/2)\omega^2 A^2$. Poiché, come già affermato, negli istanti considerati l'oggetto è fermo, e dunque la sua energia cinetica è nulla, possiamo determinare l'energia meccanica dell'oscillatore come $E = U_{ela}(t')$, cioè:

$$E = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \ . \tag{4}$$

II. DESCRIZIONE DELLO SMORZAMENTO

Come sapete, la descrizione fisica (microscopica) dell'attrito è un problema molto complesso da trattare. Dunque per descrivere situazioni realistiche in cui l'attrito è presente occorre fare riferimento a dei modelli, cioè all'espressione della forza di attrito attraverso modelli specifici. Il modello che si adatta alla maggior parte delle situazioni dinamiche in cui non è prevalente lo strisciamento tra superfici solide è quello dell'attrito viscoso. Il modello della forza di attrito viscoso prevede che la sua espressione sia $\vec{F}_A = -\beta\vec{v}$, dove β è un coefficiente che tiene conto della situazione specifica considerata. Considerando un caso unidimensionale come quello in esame, l'accelerazione prodotta dalla forza di attrito viscoso ha la forma

$$a_A = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\gamma v(t) = -\gamma\frac{dx(t)}{dt} \ , \tag{5}$$

dove abbiamo posto $\gamma = \beta/m$ e abbiamo ricordato la relazione tra velocità e posizione.

Nel caso di un oscillatore armonico che si muove in presenza di attrito viscoso l'accelerazione dovuta alla forza elastica (Eq. 1) e l'accelerazione dell'attrito si sommano tra loro, dando luogo alla seguente equazione del moto:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) - \gamma \frac{dx(t)}{dt} \ , \tag{6}$$

dove abbiamo considerato per semplicità $C = 0$.

Dal punto di vista matematico l'equazione ottenuta è parecchio diversa rispetto a quella del moto armonico senza smorzamento. In particolare essa contiene un termine di primo ordine (la derivata prima) che precedentemente non c'era. Di conseguenza la soluzione assume una forma diversa rispetto a prima.

A. Oscillatore debolmente smorzato

La soluzione generale è abbastanza complicata e qui ci limiteremo a dare quella che vale nel caso di "debole smorzamento". Questo caso corrisponde alla situazione sperimentale di nostro interesse. Per intenderci, lo smorzamento debole significa che l'effetto dell'attrito non è così grande da modificare in maniera drastica il comportamento dell'oscillatore. Infatti esistono situazioni, dette "sovrasmorzate", in cui l'attrito è così forte da fermare il moto prima che venga compita un'oscillazione completa. Un esempio può essere la sospensione di un'automobile (o un motorino), in cui alla molla, che ha il comportamento armonico, si aggiunge un elemento, l'ammortizzatore, che crea un forte smorzamento, cioè una forza di attrito viscoso con un coefficiente γ molto alto. In condizioni normali di operazione, se sollecitata (per esempio con una pressione applicata al parafango), la sospensione reagisce in modo da smorzare quasi subito il moto, che quindi non è affatto oscillatorio.

Nel caso del debole smorzamento si può usare un'approssimazione per esprimere l'andamento delle leggi orarie. Questa approssimazione consiste nel supporre che tutte le differenze rispetto al caso senza attrito siano nell'ampiezza dell'oscillazione, che viene considerata non costante nel tempo. In sostanza, quindi, la soluzione, cioè le leggi orarie del moto, hanno sempre l'espressione di Eq. 15, ma l'ampiezza A diventa dipendente dal tempo, cioè è $A(t)$.

Dal punto di vista qualitativo, è evidente che le oscillazioni di un oscillatore reale, in presenza di attrito, hanno un'ampiezza non costante che diminuisce a mano a mano che il processo va avanti. Lo smorzamento consiste infatti nella diminuzione dell'ampiezza. Notate che se l'ampiezza diminuisce, anche la velocità diminuisce nel suo valore massimo (calcolato dentro una singola oscillazione). Iun un oscillatore armonico la velocità massima si ha negli istanti in cui l'oggetto passa per la posizione di equilibrio, cioè negli istanti $t'' = N\pi/(2\omega) = (N+1)T/4$ (stiamo supponendo, come prima, $\Phi = 0$). In questi istanti il modulo della velocità vale $|v_M| = \omega A$, che è quindi costante se si suppone trascurabile l'attrito. In presenza di attrito si ha invece $v_M(t)$, cioè la velocità massima dipende dal tempo (diminuisce con il tempo).

Se vi ricordate il tipico andamento della velocità nel caso di un oggetto che viene lanciato (con una certa velocità iniziale) dentro un fluido viscoso, allora potrete facilmente immaginare che la dipendenza temporale della velocità massima (nel periodo) segua un andamento esponenziale decrescente. Poiché stiamo supponendo che la pulsazione resti costante nel tempo, affermazione approssimativamente valida, questo significa che anche l'andamento dell'ampiezza di oscillazione con il tempo deve seguire una funzione esponenziale decrescente.

B. Soluzione approssimata

Visto che la matematica necessaria per risolvere l'Eq. 6 è abbastanza complicata, per trovare una soluzione (approssimata) conviene passare per un'altra strada che prevede di esaminare la perdita di energia meccanica durante l'oscillazione. Infatti anche l'energia meccanica, che prima (Eq. 4) abbiamo stabilito essere una funzione dell'ampiezza massima di oscillazione, sarà influenzata dalla presenza dell'attrito che ne diminuirà il valore. Infatti, seguendo un concetto di bilancio energetico, deve essere:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\mathcal{L}_A \ , \tag{7}$$

dove $\mathcal{L}_A$ è il lavoro della forza di attrito. Lavoriamo un po' su questa equazione differenziale. Al primo membro, tenendo conto dell'espressione di E data in Eq. 4, avremo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{m}{2}\omega^2 A^2) = m\omega^2 A(t)\frac{dA(t)}{dt} \ , \tag{8}$$

dove abbiamo tenuto conto che l'unica grandezza dipendente dal tempo è, nella nostra approssimazione, l'ampiezza A (che quindi è $A(t)$). Lavorare sul secondo membro, cioè in pratica trovare un'espressione per la potenza dissipata per attrito (ricordate la definizione di potenza!), richiede qualche trucco e qualche approssimazione. Iniziamo con il notare che:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_A = \frac{d}{dt}\int -\beta v dx = -\beta \frac{d}{dt}\int v dx \tag{9}$$

dove l'integrale è calcolato tra gli estremi dello spostamento, cioè tra i punti estremi delle varie oscillazioni. È evidente che nell'integrando non c'è nulla di costante, dato che velocità ed estremi di integrazione cambiano di continuo.

L'approssimazione consiste nel supporre *costante* la forza di attrito durante un ciclo di oscillazione (un periodo). Chiaramente tale forza costante non è affatto (essa dipende dalla velocità, che cambia, eccome!), quindi se vogliamo approssimarla con una costante non possiamo certamente metterci né il valore minimo (che fa zero, quando l'oggetto è fermo) né con quello massimo, che si ha quando la velocità raggiunge il valore v_M definito sopra. Piuttosto dovremo considerare un *valore medio* $< F_A >$ della forza, dove la media si intende eseguita nel corso di un singolo periodo. Supporre che la forza abbia costantemente il suo valore medio equivale a considerare costante la velocità (stabilmente al suo valore medio <v>, dove la media si fa su un periodo di oscillazione). Se facciamo questa approssimazione e portiamo l'operatore di derivata temporale che compare all'ultimo membro di Eq. 9 dentro l'integrale, e notiamo che $dx/dt = v$, abbiamo che l'espressione di Eq. 9 si trasforma in $-\beta < v^2 >$, dove, come già stabilito, la media va intesa nell'ambito di un ciclo di oscillazione.

Il calcolo del valore medio di una funzione periodica del tempo nell'ambito di un periodo è, come credo si sia accennato a lezione in una qualche occasione:

$$< v^2 >= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T (-\omega A sin(\omega t))^2 dt = \frac{A^2\omega^2}{2} = \frac{v_M^2}{2} . \tag{10}$$

Nel calcolo appena svolto abbiamo approssimato $v(t)$ con la legge oraria della velocità per l'oscillatore non smorzato (vedi Eq. 15), cioè in pratica abbiamo supposto che l'ampiezza dell'oscillazione non vari (troppo) da un ciclo al successivo, affermazione ragionevole se lo smorzamento è debole. Inoltre abbiamo usato un po' di semplice matematica, quella che permette di determinare che il valore medio della funzione $\sin^2(\alpha)$ (mediato su un periodo rispetto a α) vale $1/2$. Questo risultato si può ottenere in modo piuttosto semplice (come? Pensateci!).

Rimettendo insieme i vari pezzetti, abbiamo allora:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_A = -\beta\frac{A^2\omega^2}{2} \tag{11}$$

cioè, ricordando il bilancio energetico di Eq. 7 e le considerazioni di Eq. 8:

$$m\omega^2 A(t)\frac{dA(t)}{dt} = -\beta\frac{A(t)^2\omega^2}{2} , \tag{12}$$

cioè, semplificando fra i membri, ricordando che $\gamma = \beta/m$, e riscrivendo:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}A(t) . \tag{13}$$

Tutti noterete subito che questa equazione differenziale, del primo ordine a variabili separabili (o separate), si risolve proprio come l'equazione differenziale della velocità rispetto al tempo nel moto in presenza di attrito viscoso. È facilissimo verificare che la soluzione è del tipo:

$$A(t) = A_0\exp(-\frac{\gamma}{2}) = A_0\exp(-t/\tau) , \tag{14}$$

dove A_0 è l'ampiezza iniziale, cioè all'istante $t = 0$, e $\tau = 2/\gamma$ rappresenta la *costante tempo* del decadimento esponenziale[3].

In sostanza, allora, nell'approssimazione considerata di debole smorzamento, si hanno le seguenti leggi orarie approssimate:

$$x(t) \approx A_0\exp(-t/\tau)\cos(\omega t + \Phi) + x_{eq} \tag{15}$$

$$v(t) \approx -\omega A_0\exp(-t/\tau)\sin(\omega t + \Phi) , \tag{16}$$

e anche il valore massimo della velocità (il suo modulo, che è la grandezza di interesse sperimentale) diventa funzione del tempo secondo la:

$$|v_M(t)| \approx A_0\omega\exp(-t/\tau) . \tag{17}$$

Tanto per capire di cosa si sta parlando, potete provare a graficare le funzioni espresse in queste equazioni (oppure potete cercarvele in qualche libro).

---

[1] Questa coordinata potrebbe anche essere di tipo angolare, come per esempio si ha nel caso del pendolo. In questo caso convenzionalmente la coordinata si indica con una lettera greca, per esempio $\theta(t)$. Tuttavia in questa nota, per semplificare la notazione, si indicherà la coordinata con $x(t)$.

[2] Come sapete, fisicamente questa pulsazione è legata alle caratteristiche della forza elastica, di richiamo, che agisce sull'oggetto. Ad esempio, se l'oscillatore armonico è costituito da una molla di massa trascurabile e costante elastica k che agisce su una massa m si ha $\omega^2 = k/m$, se si tratta di un pendolo realizzato con un filo inestensibile e massa trascurabile e lunghezza ℓ, si ha $\omega^2 = g/\ell$, e così via. Per generalità, in questa nota indichiamo con ω la pulsazione dell'oscillatore senza esplicitare la sua espressione.

[3] È immediato rendersi conto che, dopo un intervallo di tempo pari a τ, l'ampiezza dell'oscillazione si riduce a un fattore $1/e$ dell'ampiezza iniziale A_0.