

Nota sull'esperienza pratica "pendolo quadrifilare"

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 1 - FF, 16 marzo 2012)

Questa nota riguarda la descrizione dell'esperienza pratica "pendolo quadrifilare" svolta in laboratorio e intende fornire alcuni suggerimenti e chiarificazioni sulla relazione che deve essere realizzata.

I. APPARATO SPERIMENTALE E MODELLO

Negli esercizi di fisica generale il pendolo è in genere pensato come una massa puntiforme legata a un filo inestensibile e di massa trascurabile che è libera di muoversi su un piano verticale. L'apparato dell'esperienza è ben diverso: si vede subito che la massa non è puntiforme (si tratta di un regolo di legno con una piccola linguetta di cartoncino incollata a sbalzo) e il vincolo è realizzato con quattro fili. Lo scopo dell'esperienza non è quello di capire le motivazioni dietro al progetto dell'apparato. Tuttavia è evidente che la scelta dei quattro fili serve per guidare il moto dell'oggetto su un piano ben definito, in modo tale che il problema possa essere considerato bidimensionale. Infine, come sarà chiaro nel seguito, il moto viene descritto attraverso la posizione della linguetta che, pur non essendo puntiforme, è relativamente piccola rispetto alle dimensioni complessive dell'apparato.

Il pendolo è un argomento arcinoto a tutti, e tutti sapete che l'aspetto più interessante è la possibilità di ottenere moto armonico nel caso di piccole oscillazioni. Nel modello di pendolo con massa puntiforme che abbiamo esaminato a lezione, la pulsazione di queste oscillazioni dipende solo dalla lunghezza ℓ del filo: di ottiene infatti $\omega = \sqrt{g/\ell}$, da cui il periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Oltre alla condizione di piccole oscillazioni, che può essere realizzata agendo in modo opportuno sulle condizioni iniziali del moto, affermazioni importanti alla base del modello che conduce a questo risultato sono: (i) inestensibilità dei fili; (ii) massa trascurabile dei fili; (iii) carattere puntiforme della massa; (iv) assenza di attrito.

L'elemento (iv) sarà discusso in seguito, in quanto costituisce l'aspetto più interessante dell'esperienza. Dell'elemento (iii) abbiamo già affermato che esso non è sicuramente realizzato nell'esperienza; lo stesso si può affermare per gli elementi (i) e (ii), anche se i fili impiegati hanno tutto l'aspetto di essere sufficientemente inestensibili e di avere massa molto piccola (rispetto a quella del blocco di legno che viene posto in oscillazione).

Una misura molto preliminare che può servire per capire quanto il comportamento del sistema possa essere considerato simile a quello del modello (fatte salve le considerazioni che seguiranno) consiste nel valutare la lunghezza del filo del pendolo (la distanza tra il regolo di legno e il perno della rotazione), nello stimare il periodo secondo la formulina scritta sopra e nel vedere se il valore ottenuto è in accordo con la misura del periodo nel caso di piccole oscillazioni (la misura del periodo è realizzata

dal computer, come sarà spiegato in seguito, ma può essere anche fatta con un cronometro; per i motivi discussi nel seguito, conviene usare il valore del periodo misurato in una delle prime oscillazioni del pendolo).

Io ho fatto queste misure ottenendo $\ell = (1.12 \pm 0.04)m$ (la grossa incertezza è dovuta alla difficoltà di misurare con sufficiente accuratezza la distanza rilevante e all'impiego di un metro a nastro, con incertezze dovute a parallasse, verticalità del metro, etc.) e $T_{\text{spes}} = (2.1418 \pm 0.0001) s$. Usando il valore $g = (9.81 \pm 0.05) s$ (una stima abbastanza ragionevole del modulo dell'accelerazione di gravità a Pisa), ottengo $T_{\text{theo}} = (2.12 \pm 0.04) s$, che è in accordo, entro l'incertezza, con il dato sperimentale. Ne concludo che il modello può essere ragionevolmente usato.

Piccola, ma importante, osservazione su quanto appena scritto: vedete come nella valutazione sia essenziale stimare in modo corretto le incertezze. Infatti la validità del modello dipende dall'incertezza che attribuiamo alla previsione teorica T_{theo} , la cui determinazione richiede di "propagare l'errore" (come si suol dire). Lascio a voi i dettagli dell'operazione, nella quale è importante ricordare che nel caso di prodotti o rapporti gli errori *relativi* si sommano. Dato che nella formula compare anche una radice quadrata, siete invitati a pensare cosa succede in questo caso. Notate che, dato che si tratta più di una stima che di una misura vera e propria, è lecito usare relazioni approssimate e considerare la propagazione del cosiddetto "errore massimo".

II. ATTRITO E SUO MODELLO

L'obiettivo principale dell'esperienza è quello di valutare gli effetti che l'attrito ha nel definire la dinamica di oscillatori reali. Infatti nella realtà, benché spesso trascurabile, l'attrito non può essere annullato.

L'effetto dell'attrito è ben evidente nell'apparato: una volta messa in oscillazione (ad esempio lasciandola andare da una posizione diversa da quella di equilibrio), la massa si muove compiendo oscillazioni sempre meno ampie, fino a praticamente arrestarsi dopo un certo numero di oscillazioni (grande, normalmente maggiore di 100, cioè dopo alcuni minuti, per cui lo smorzamento prodotto dall'attrito può essere considerato ragionevolmente debole).

Il modello dell'attrito che in genere funziona in queste situazioni è quello dell'attrito viscoso. Come è possibile

dimostrare, un oscillatore armonico debolmente smorzato ha un'ampiezza di oscillazione $A(t)$ che è funzione del tempo secondo una funzione esponenziale decrescente:

$$A(t) = A_0 \exp(-t/\tau), \quad (1)$$

dove A_0 è l'ampiezza iniziale (al tempo $t = 0$) dell'oscillazione e τ è il *tempo caratteristico* di smorzamento dell'oscillazione.

Obiettivo quantitativo dell'esperimento può essere quello di valutare τ e di verificarne la dipendenza dalle condizioni iniziali (situazione di piccole o grandi oscillazioni, che può essere decisa in funzione della posizione di partenza dell'oscillatore). Inoltre, poiché il modello che usiamo come riferimento potrebbe essere non accurato e, soprattutto, la teoria ci dice che la soluzione espressa in Eq. 1 è da considerarsi approssimativa, l'esperimento può anche avere lo scopo di verificare la validità del modello, ovvero della teoria che esso sottende. Questo è particolarmente sensato considerando anche che il pendolo si comporta (approssimativamente!) da oscillatore armonico solo nel caso di piccole oscillazioni, e l'aggettivo "piccole" non è facilmente quantificabile in teoria.

III. ESPERIMENTO E ANALISI DEI DATI

L'esperimento non consente molte possibilità di "aggeggiare", anzi praticamente quasi nessuna, se si esclude la variazione delle condizioni iniziali (oscillazioni più o meno piccole). Inoltre anche la misurazione non richiede alcuna particolare cura. Infatti essa è eseguita in automatico da un sistema computerizzato.

In particolare la grandezza misurata è il tempo di transito Δt della linguetta applicata alla massa per una posizione che corrisponde grosso modo a quella di equilibrio del sistema. A questo scopo la linguetta è montata in modo da intercettare un fascio di luce indirizzato su un fotoregistratore. Il programma di acquisizione fornisce 5 colonne di dati (le righe sono tante quante i cicli di oscillazione misurati). Delle 5 colonne ci interessano soltanto le prime 3 (chiamate nel file "TimeW", "Period", `Average_tran_`), che riportano tutte e tre misure di tempo in unità di s e definite con un'incertezza (nominale) pari a $\pm 100 \mu s$ (è anche l'incertezza usata prima nella misura del periodo). Le tre colonne si riferiscono rispettivamente a: (i) tempo t a partire dall'istante di inizio della misurazione; (ii) periodo T dell'oscillazione; (iii) tempo di transito Δt come definito prima.

Per gli scopi dell'analisi sarà interessante usare Δt per valutare la velocità massima v_M del pendolo (quella che esso possiede nell'istante in cui passa per la posizione di equilibrio). A questo scopo si usa la larghezza ΔL della linguetta, che è riportata a penna sulla linguetta stessa, e si pone $v_M = \Delta L / \Delta t$. In pratica questo richiede di dividere il ΔL della linguetta a disposizione per la terza colonna dei dati, in modo da ottenere una colonna di valori di v_M . Evidentemente, vista la dimensione finita della linguetta, questa procedura fornisce un valore di v_M

mediato per la durata di transito. Tuttavia questo valore è sufficientemente accurato per gli scopi della nostra trattazione. In ogni caso, visto che entrambi i dati che entrano nella misura indiretta di v_M sono caratterizzati da incertezza (l'incertezza nella misura di ΔL si deduce dal numero di cifre significative riportate a penna sulla banderuola, e credo che si possa ritenere pari a ± 0.1 mm), la misura indiretta di v_M deve avere un'incertezza che tiene conto della propagazione degli errori. Stavolta ve la metto per esplicito: dato che si tratta di un rapporto, e che nel rapporto gli errori relativi si sommano, si ha $\Delta v_M / v_M = \Delta(\Delta L) / \Delta L + \Delta(\Delta t) / \Delta t$. Notate che anche in questo caso abbiamo propagato l'errore massimo, ottenendo probabilmente una sovrastima dell'incertezza che è comunque del tutto accettabile.

L'interesse nella determinazione di v_M è dovuto al fatto che, supponendo valide le approssimazioni che conducono all'Eq. 1, anche la velocità v_M è funzione esponenziale decrescente del tempo:

$$v_M(t) = v_{M,0} \exp(-t/\tau), \quad (2)$$

dove $v_{M,0}$ è la velocità massima iniziale (al tempo $t = 0$), che ovviamente dipende dalle condizioni iniziali. Ci serviremo in seguito di questa legge per tentare la valutazione quantitativa di τ .

A. Isocronia

L'isocronia del pendolo, cioè il fatto che il periodo di oscillazione resti uguale nel corso dell'evoluzione temporale del sistema, dipende dall'aver piccole oscillazioni e dal poter ritenere trascurabili gli attriti. Questa situazione, ideale, non è ovviamente del tutto verificata negli esperimenti reali. Preliminarmente a tutto il resto può essere interessante vedere qual è l'andamento del periodo T misurato dal computer in funzione del tempo t . Ciò si può facilmente fare graficando i dati T in funzione di t . Io ho preso dei dati acquisiti da qualcuno di voi e ho fatto i grafici. A questo scopo ho usato un software un po' più serio di Excel/Calc, però credo che i risultati sarebbero stati simili (ma un po' più cialtroni) usando un foglio di calcolo come Excel/Calc, che credo tutti sappiate un po' usare (purtroppo la mole di dati è tale che non è ragionevole fare grafici a mano, me ne dolgo e me ne scuso!). In ogni caso, siete invitati a osservare per bene le caratteristiche "grafiche" e formali della figura. Per esempio, in un grafico vanno **sempre** messi i nomi degli assi con ben esplicita l'unità di misura, occorre cura per scegliere il giusto intervallo di rappresentazione (l'estensione delle scale) in modo da evidenziare quello che si intende evidenziare, se possibile (se il software lo consente) vanno sempre messe le barre di errore. Quindi è ovvio che i grafici di questo tipo devono essere fatti per punti (non con linee continue), dato che le misure sono discrete. Infine, nella relazione sarebbe bene che tutte le figure venissero debitamente richiamate nel testo e che tutte avessero una corretta didascalia. Provateci!

I risultati sono mostrati in Fig. 1, dove sono riportati i grafici per tre esperimenti diversi, evidentemente condotti con scelte diverse delle condizioni iniziali, ovvero oscillazioni più o meno piccole. Le barre di errore sono disegnate in accordo con l'incertezza nominale nella misura dei tempi ($\pm 100\mu\text{s}$): notate che esse, a seconda della scala impiegata, possono apparire più o meno visibili, e che non sono mai visibili le barre di errore orizzontale vista la scala dell'asse orizzontale. Notate bene che le scale verticali e orizzontali sono diverse per ogni grafico: infatti, volendo valutare delle variazioni, è necessario che l'intervallo dell'asse verticale sia sufficientemente piccolo da apprezzare anche piccole differenze. Infine, secondo la migliore tradizione, è evidente che alcuni dati sono "scazzati", cioè ci sono *singoli* dati che si discostano in maniera patologica dai valori dei dati immediatamente precedenti e successivi: lo scazzamento è probabilmente dovuto a qualche problema di impulsi spuri di tipo elettronico o luminoso nel dispositivo a fotorigelatore impiegato (potremmo scrivere un libro sui possibili scazzamenti di misura quando si usano dei computer per l'acquisizione...).

Possiamo trarre alcune conseguenze qualitative da questi grafici.

- Il pendolo non è isocrono in nessuno dei casi considerati. Infatti le variazioni del periodo nell'ambito dell'evoluzione temporale sono sempre maggiori dell'incertezza della misura.
- Le variazioni sul periodo misurato dipendono dalle condizioni iniziali: si hanno variazioni relative dell'ordine di 3×10^{-3} , 17×10^{-3} , e 0.4×10^{-3} nei casi rispettivamente di Exp. 1, Exp. 2, Exp. 3.
- In tutti i casi le variazioni relative sono piuttosto piccole, ma non necessariamente trascurabili, in particolare nel caso di Exp. 2. In tutti i casi il periodo diminuisce con il passare del tempo.
- La non isocronia è una conferma della presenza di attrito.
- Poiché la non isocronia dipende anche dal fatto che il pendolo si trova ad operare in condizioni di oscillazioni non piccole[1], cioè l'oscillatore è "anarmonico", le diverse variazioni relative misurate nei tre casi potrebbero essere legate alle condizioni iniziali. In particolare è presumibile che l'ampiezza dell'oscillazione determinata dalle condizioni iniziali sia stata più piccola nell'Exp. 3 e più grande nell'Exp. 2.

B. Smorzamento

Per analizzare gli effetti dello smorzamento e cercare di determinarne la costante tempo caratteristica τ occorre

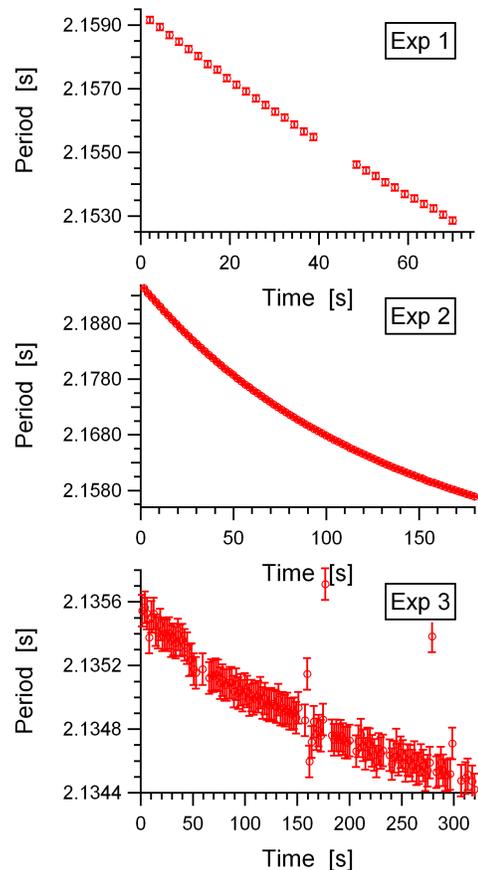


Figura 1. Grafici del periodo T in funzione del tempo t acquisiti in tre diversi esperimenti, cioè con tre diverse condizioni iniziali. Si noti che le scale dei grafici sono diverse per ogni figura. Le barre di errore sono valutate come descritto nel testo.

costruire la colonna v_M come sopra definita e graficarla in funzione del tempo t . A rigore, occorre anche costruire una colonna dell'incertezza Δv_M , che si può stimare con la propagazione degli errori, secondo quanto abbiamo accennato prima. Poi se con Excel/Calc sia possibile o meno mettere delle barre di errore corrette non lo so (temo di no con Calc, forse sì con alcune versioni di Excel - fate quello che potete!).

La Fig. 2 mostra un esempio dei grafici ottenuti (in questo caso uso solo i dati relativi a Exp. 2, che è quello che mi piace di più...). Per il calcolo della velocità, suppongo $\Delta L = (25.3 \pm 0.1)$ mm. Si vede come la velocità v_M , velocità massima nel ciclo di oscillazione, diminuisca in funzione del tempo. Notate che, anche se non può sembrare, la diminuzione relativa del valore di v_M per i dati considerati è dell'ordine di 0.4, molto maggiore di quella riscontrata nel periodo (vedi Fig. 1). Questo può apparire poco evidente se non considerate debitamente cosa c'è scritto nella scala verticale (i numerini!), che quindi deve essere necessariamente espressa in modo chiaro! Infine, a occhio pare proprio che la diminuzione segua un

andamento che assomiglia a un esponenziale decrescente (di certo non è lineare...).

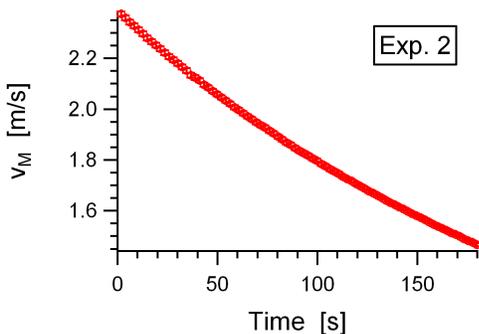


Figura 2. Grafico della velocità massima v_M definita nel testo in funzione del tempo t acquisita in un esperimento, cioè con una particolare scelta delle condizioni iniziali. Le barre di errore sono valutate come descritto nel testo.

Ora è abbastanza evidente che stabilire, anche solo a occhio, se l'andamento è davvero esponenziale decrescente oppure no non è affatto semplice. C'è un modo, però, che può aiutarci. Questo modo si basa su quello che un tempo si chiamava “uso della carta semilogaritmica”. Abbiamo affermato che l'andamento che ci aspettiamo è di tipo esponenziale decrescente, cioè $v_M(t) = v_{M,0} \exp(-t/\tau)$. Se calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri e riarrangiamo un po' l'espressione, abbiamo che:

$$\ln(v_M(t)) = -\frac{1}{\tau}t + \ln(v_{M,0}). \quad (3)$$

Ci vuole un attimo a capire che la funzione scritta, ovvero il grafico che si ottiene riportando i valori di $\ln(v_M(t))$ in funzione di t , è una retta il cui coefficiente angolare è proprio $-(1/\tau)$ (e l'intercetta è $\ln(v_{M,0})$).

L'operazione descritta può essere fatta in due modi, cioè o calcolandosi il logaritmo naturale dei dati e graficandolo in funzione di t , oppure, come detto sopra, usando la carta semilogaritmica, cioè realizzata in modo da riportare delle tacche, su uno degli assi, che non sono equispaziate, ma sono distanziate di un valore che cambia in modo logaritmico. Io uso la prima scelta. A questo scopo faccio calcolare al mio software il logaritmo naturale dei dati. Mi preoccupo anche di indicare in modo opportuno l'incertezza, supponendo che l'errore relativo sul logaritmo dei dati sia uguale a quello sui dati originali (creo una colonna di incertezze con questo criterio).

Anzi, dato che non sono interessato a conoscere il valore di $v_{M,0}$, cioè a determinare l'intercetta dei grafici, faccio calcolare al software il logaritmo naturale del rapporto $v_M/v_{M,0}$, dove il valore di $v_{M,0}$ lo determino come primo valore (quello più alto, misurato non proprio a $t = 0$, ma appena dopo) della colonna delle velocità massime, determinata come descritto sopra. Quella che mi

aspetto di ottenere in questo modo è una dipendenza lineare, descritta da una retta che passa per l'origine (o quasi) e il cui coefficiente angolare è $-(1/\tau)$.

Il risultato di questa manipolazione è riportato in Fig. 3, che mostra tutti e tre gli esperimenti considerati. Si vede subito a occhio come i dati graficati abbiano un andamento che assomiglia parecchio a quello, lineare, passante per lo zero e con coefficiente angolare negativo, che ci aspettavamo! Possiamo anche fare un piccolo sforzo per determinare, in un modo non molto preciso ma comunque accettabile, il coefficiente angolare delle rette che potrebbero interpolare (cioè passare per) i dati. Dato che, per nostra imposizione (non del tutto corretta! Pensate al perché...), la retta deve passare per l'origine, allora il coefficiente angolare si ottiene dividendo i valori di ordinata e ascissa per uno qualsiasi dei punti sperimentali. Se prendiamo un punto misurato a considerevole distanza di tempo, abbiamo la possibilità di aumentare l'accuratezza di questa stima. I valori dei coefficienti angolari che si ottengono in questo modo, i quali hanno ovviamente unità di misura pari a $1/s$, sono approssimativamente -3×10^{-3} , -4×10^{-3} , -2×10^{-3} per i dati rispettivamente di Exp. 1, Exp. 2, Exp. 3. I tempi caratteristici τ sono ovviamente dati dal reciproco (cambiato di segno) di questi valori, e sono quindi compresi tra circa 250 s e circa 500 s a seconda delle condizioni iniziali prescelte.

C. Best-fit

La procedura adottata, benché utile per avere una stima della costante tempo di smorzamento, non è sufficiente per ottenere informazioni quantitative. Il carattere di stima è evidente: in sostanza non abbiamo fatto altro che imporre che una certa retta passasse per i punti sperimentali, ma questa retta è stata costruita usando un solo punto sperimentale (e imponendo il passaggio per l'origine), dunque usando solo una piccolissima frazione dei dati disponibili, che sono tanti. Inoltre risulta difficile valutare l'incertezza associata alla stima, dato che non ci sono strumenti matematici adatti alla bisogna.

Per essere più raffinati occorre servirsi delle procedure di best-fit. In particolare, per i dati graficati in Fig. 3 può essere conveniente (e sufficiente) usare il *metodo dei minimi quadrati*. Infatti la teoria che abbiamo costruito porta ad aspettarsi una dipendenza lineare, con una retta che passa per l'origine. In questo caso gli algoritmi da usare per determinare il coefficiente angolare sono piuttosto semplici. Inoltre l'esperimento è tale che le incertezze delle misure sono tutte grosso modo uguali e tutte trascurabili (le barre di errore non si scorgono neppure...), cioè le condizioni sono quelle in cui questo metodo funziona piuttosto bene.

Ricordiamo (o anticipiamo...) le formule che servono a valutare il coefficiente angolare e l'incertezza della va-

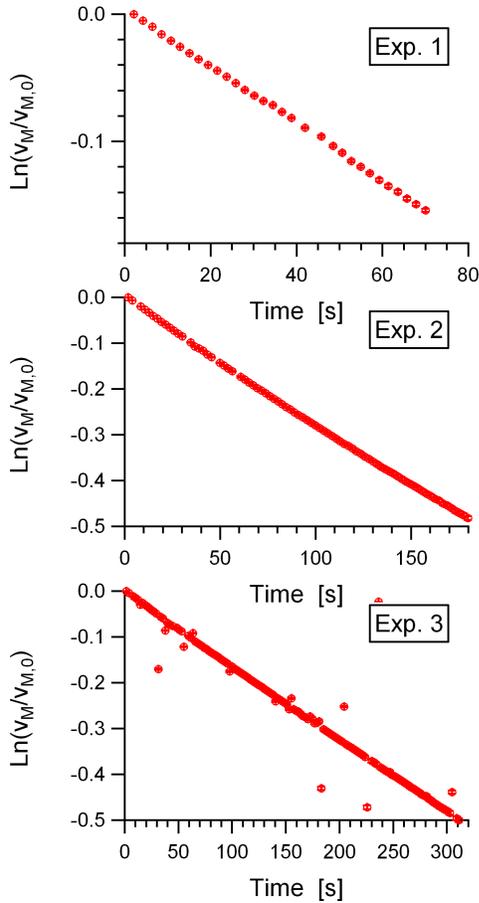


Figura 3. Grafici della grandezza $\ln(v_M/v_{M,0})$, costruita come descritto nel testo, in funzione del tempo t per tre diversi esperimenti, cioè per tre diverse condizioni iniziali. Si noti che le scale dei grafici sono diverse per ogni figura e che la grandezza riportata sull'asse verticale è adimensionale. Le barre di errore sono valutate come descritto nel testo.

lutazione nel caso di retta che passa per l'origine. Detti y_i e x_i i valori delle ordinate e delle ascisse dei dati considerati (nel nostro caso rispettivamente $\ln(v_M/v_{M,0})$ e t), Δy_i l'incertezza sulle misure (che supponiamo non rilevante per i dati delle ascisse, come nel nostro caso) e detto N il numero totale di misure, che non so quanto sia (è diverso per ogni esperimento e vanno scartati i dati scazzati), si ha che il coefficiente angolare α e la sua incertezza $\Delta\alpha$ sono dati da:

$$\alpha = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \quad (4)$$

$$\Delta\alpha \approx \frac{\sqrt{\sum_i x_i^2 \Delta y_i^2}}{\sum_i x_i^2}, \quad (5)$$

dove la somma è estesa su tutte i dati del set (su tutte le N misure).

Ovviamente non ho idea di quanto possa essere complicato fare queste operazioni matematiche con Excel/Calc, quindi sicuramente non pretendo che questa operazione

sia fatta. Io la faccio e vi racconto i risultati, esprimendo direttamente i risultati di τ , [2] assieme alla loro incertezza, come mostrato in Tab. I. Voi, almeno, provateci! Naturalmente questi dati andrebbero confrontati con quelli della stima riportata nel paragrafo precedente, però, dato che nella stima di sopra non era stata determinata l'incertezza, il confronto non è molto agevole. In ogni caso, almeno l'ordine di grandezza ritorna (per fortuna...).

Exp. 1: $\tau = (462 \pm 8) \text{ s}$
 Exp. 2: $\tau = (394 \pm 5) \text{ s}$
 Exp. 3: $\tau = (621 \pm 6) \text{ s}$

Tabella I. Tabella riassuntiva dei risultati di τ per le tre condizioni iniziali considerate ottenuti con il metodo analitico del best-fit dei minimi quadrati.

D. Come farei io

Tutta la procedura illustrata nel precedente paragrafo è molto laboriosa. Come già specificato, non pretendo che essa venga applicata, almeno non a tutti i dati che avete raccolto (però, almeno, provateci!). Come potete facilmente immaginare, ci sono in giro tantissimi softwares che permettono di eseguire fit in maniera molto più immediata (di sicuro ce ne sono alcuni anche open source). Per “divertimento”, ho provato a usare il software (non gratuito...) che in genere impiego per le analisi dei miei dati sperimentali, che per altro ho già usato per produrre le figurine di sopra. Stavolta grafico direttamente i dati di velocità media, però usando la scala semilogaritmica. Il risultato è mostrato in Fig. 4: notate come il fatto di aver scelto una carta semilogaritmica, cioè che le tacchette sull'asse verticale non sono equispaziate, non è molto evidente, visto che l'intervallo di valori considerato è molto ristretto (occorre almeno una decade per rendersi conto in maniera evidente della differenza fra scala lineare e logaritmica). Ai dati sperimentali è sovrapposto, sotto forma di una curva continua (nera), il risultato dell'operazione automatizzata di best-fit. Il software esegue questa operazione in modo numerico, cioè, in pratica, facendo tanti tentativi fino a trovare quello che si accorda meglio con i dati sperimentali. Il parametro minimizzato in questo caso è il χ^2 .

I valori di τ relativi ai vari fit sono riportati assieme all'incertezza (sempre stimata dal software in modo numerico) nelle legende dei vari grafici. Come si vede, i risultati sono in qualche caso (Exp. 1) differenti rispetto a quelli ottenuti calcolando analiticamente il fit dei minimi quadrati. Il motivo principale è che nell'operazione

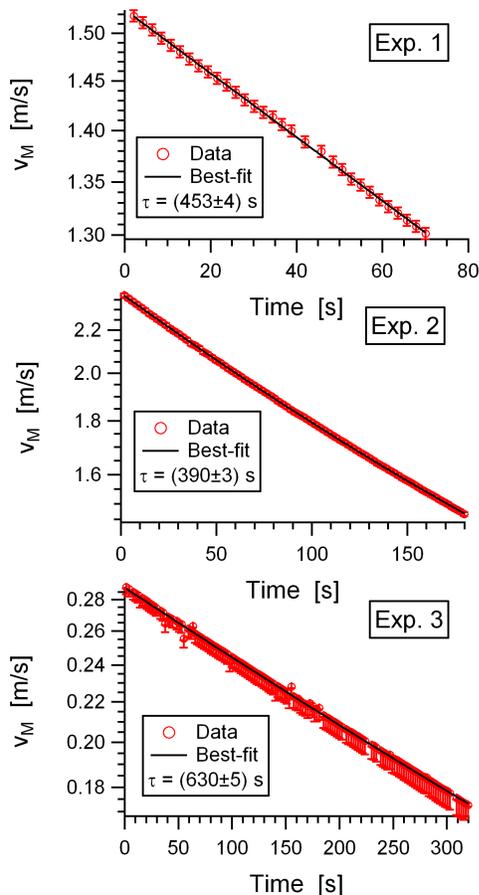


Figura 4. Grafici della velocità massima v_M , costruiti come descritto nel testo, in funzione del tempo t per tre diversi esperimenti, cioè per tre diverse condizioni iniziali. Si noti che le scale dei grafici sono diverse per ogni figura e che l'asse verticale è logaritmico (anche se non si vede a causa del ridotto intervallo di valori considerato). Le barre di errore sono valutate come descritto nel testo. Ai dati sperimentali sono sovrapposte le curve di best-fit a funzioni esponenziali decrescenti determinate dal software e corrispondenti ai valori dei tempi di smorzamento τ riportati in legenda assieme alla loro incertezza.

automatizzata fatta dal computer non si impone che la curva di fit passi per l'origine, come in precedenza.

Come commento finale ai dati, non so cosa dire. Infatti la valutazione di τ eseguita in questo esperimento, in particolare con il set di dati che ho preso in considerazione, non è particolarmente significativa o riconducibile a qualche modello. Intanto si vede come i valori del tempo caratteristico di smorzamento siano molto grandi (fino a oltre 10 minuti). Dunque, per averne una valutazione precisa occorrerebbe misurare su tempi lunghi, superiori a quelli disponibili nel set di dati. D'altra parte se si aspetta troppo tempo è ragionevole che l'attrito cambi i suoi parametri caratteristici e forse anche il suo modello di riferimento, dato che, al di sotto di una certa velocità, è ragionevole che entrino in gioco attriti non

necessariamente modellabili come viscosi (e comunque, anche se viscosi, non necessariamente con lo stesso coefficiente di attrito della situazione ad alta velocità). Inoltre, come già ampiamente discusso, il nostro modello di riferimento, quello di oscillatore armonico debolmente smorzato, potrebbe non essere in grado di descrivere in modo sufficientemente accurato la situazione fisica perché le approssimazioni che ci sono dietro non sono più soddisfatte. Questo potrebbe verificarsi in particolare sia quando l'oscillazione è piccola, vista la bassa velocità dell'oggetto che si ha in questo caso, sia quando essa è molto ampia, vista la possibilità di fenomeni spuri (ad esempio, lo "sbandieramento" dell'oggetto rispetto al piano di riferimento).

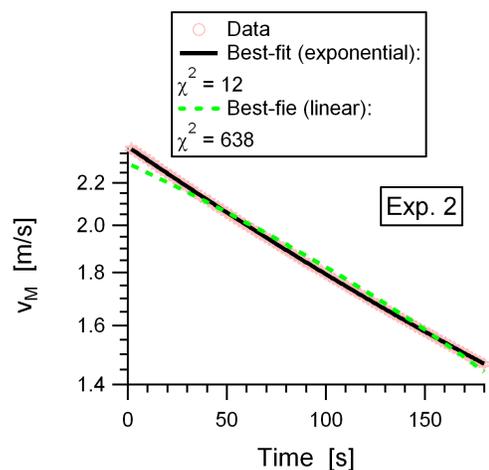


Figura 5. Grafico della velocità massima v_M in funzione del tempo t per i dati di Exp. 2 con sovrapposti i best-fit creati dal software usando il *metodo del minimo chi-quadro*. Si vede come l'andamento lineare, curva verde tratteggiata, descriva l'esperimento peggio dell'andamento esponenziale decrescente, curva nera continua. I valori del χ^2 riportati in legenda confermano pienamente questa affermazione, secondo quanto discusso nel testo.

Ultimissima considerazione. In premessa avevamo affermato che questa analisi avrebbe potuto dirci qualcosa sulla validità dell'applicazione del modello di oscillatore armonico smorzato al nostro apparato. Abbiamo già capito che, almeno qualitativamente, c'è accordo tra gli andamenti trovati sperimentalmente e le previsioni teoriche, in particolare quelle riguardanti lo smorzamento esponenziale della velocità. Possiamo fare un piccolo sforzo, sempre con l'aiuto del software "bono", per tentare una verifica un po' più precisa. In particolare a qualcuno di voi potrebbe venire in mente di interpretare i dati di Fig. 2 (Exp. 2) con un andamento lineare invece che esponenziale. La Fig. 5 illustra le differenze che si ottengono se si chiede al software di "fittare" i dati sperimentali con una retta, invece che con un'esponenziale

decescente. Notate che questa figura riporta in pratica lo stesso grafico del pannello centrale di Fig. 4 ma con una diversa scelta dei colori e dello spessore delle linee, finalizzata a mostrare meglio quello che si vuole mostrare, e soprattutto con l'aggiunta di una nuova curva di fit (curva tratteggiata verde), fatta stavolta secondo una funzione lineare (retta - occhio: il grafico è in carta semilogaritmica e l'andamento lineare non si traduce necessariamente in una curva rettilinea). Il software, infatti, non si tira indietro e anche in questo caso è in grado di determinare una funzione che è il best-fit ai dati

sperimentali. Si vede subito a occhio che la nuova curva descrive piuttosto malino i dati sperimentali, con rilevanti discordanze soprattutto nella parte sinistra del grafico. Inoltre il software fornisce automaticamente il valore del χ^2 per le varie curve di fit: come riportato in legenda, c'è una bella differenza fra l'uso di una funzione esponenziale e una retta, dato che in quest'ultimo caso il χ^2 calcolato è molto maggiore[3]: questo dimostra in modo un po' più quantitativo che l'andamento lineare non va affatto bene per descrivere i dati, e quindi dice indirettamente che quello esponenziale decrescente è migliore.

-
- [1] Gli studenti più diligenti potrebbero anche sforzarsi per vedere come questa dipendenza può essere quantificata o analizzata!
- [2] Nota: ho "ripulito" le misure togliendo quelle sicuramente scazzate.

- [3] Qualcuno particolarmente attento potrebbe ricordarmi che il confronto deve essere fatto sul " χ^2 ridotto". Giustissimo, ma il gran numero di punti a disposizione conduce a una differenza irrilevante.