Note sull'esperienza "Misura di *g*" – versione 1, Francesco, 7/05/2010

L'esperienza, basata sullo studio di una molla a spirale in condizioni di equilibrio e di oscillazione, ha diversi scopi e finalità, tra cui:

a) Verificare sperimentalmente la validità della legge di Hooke per la molla e nelle condizioni esplorate;
b) Verificare sperimentalmente la dipendenza del periodo di oscillazione della molla con i parametri sperimentali del caso;
c) Sviluppare e applicare un metodo (indiretto) per la valutazione dell'accelerazione di gravità *g* (con stima dell'incertezza associata).

Lo stile della relazione è libero. Nella relazione vanno indicate le misure effettuate, gli strumenti impiegati e la stima dell'incertezza associata a ogni misura, sia diretta (fatta con uno strumento) che derivata (fatta attraverso manipolazioni matematiche di grandezze misurate). Tutti i passaggi vanno, per quanto possibile, spiegati (ricordate di esprimere sempre le unità di misura e di chiarire le modalità di operazione e di trattamento dei dati). Alla relazione vanno aggiunti i grafici, da fare o a mano su carta millimetrata, o con computer, possibilmente muniti di barre di errore opportune.

Personalmente, suddividerei la relazione in diverse sezioni, ad esempio:

1. Introduzione, con breve descrizione delle finalità etc.;
2. Modello, con chiara discussione di tutte le leggi impiegate e della matematica che serve per determinare le equazioni, o formule, necessarie;
3. Discussione sugli strumenti di misura a disposizione e della loro sensibilità (incertezza);
4. Discussione delle misure preliminari, ad esempio masse, lunghezze, etc., con esplicita menzione all'incertezza che attribuite a ogni misura e breve descrizione delle modalità di misura (uso il calibro, il metro, la bilancia, mi fido di dati nominali, trascuro qualcosa, etc.);
5. Descrizione della prima parte dell'esperimento, cioè l'allungamento della molla in funzione della massa dei pesetti;
6. Descrizione della seconda parte dell'esperimento, cioè la misura del periodo di oscillazione del sistema molla+pesetti (+piattino) in funzione della massa dei pesetti;
7. Analisi dei dati e determinazione del valore di *g* con discussione dell'incertezza.

Qualche suggerimento per le varie sezioni.

1. Spiegate in modo chiaro cosa si vuole verificare e ottenere.

2. Discutete per bene il modello fisico risolvendo le equazioni coinvolte. Per la prima parte dell'esperimento, a me viene la seguente legge: $\ell = \frac{g}{k} m + \left(\ell_0 + \frac{m_P + \mu/3}{k} g \right)$, dove i vari simboli sono piuttosto ovvi (m_P è la massa del piattello, μ è la massa della molla). Questa legge stabilisce una relazione lineare che lega la lunghezza della molla ℓ con la massa m del pesetto attraverso il coefficiente (g/k), che quindi rappresenta la pendenza del grafico (ovvero della retta interpolante) sulle cui ordinate c'è ℓ e sulle ascisse m. Notate che il termine fra parentesi è l'intercetta di questa retta con l'asse delle ordinate. Per la seconda parte dell'esperimento, si ha $T = 2\pi/\omega$, con

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_p + \mu/3}}$ (nella relazione sarà bene accennare da dove viene il fattore 1/3 che compare a moltiplicare la massa della molla).

3. Gli strumenti che avete usato li conoscete. La sensibilità (ovvero l'incertezza di misura) del metro a nastro è ±0.5 mm; però usare questo errore nelle misure di lunghezza significa che siete stati bravissimi nel traguardare con l'occhio le tacchette, e che (dovendo fare diverse misure) siete stati bravissimi nel mettere il metro a nastro sempre nella stessa posizione. Probabilmente avrete provate a misurare ognuno separatamente la stessa lunghezza, ottenendo discrepanze maggiori della sensibilità dello strumento. A me sembrerebbe ragionevole porre un'incertezza nelle misure di lunghezza dell'ordine di ±2 mm (se siete stati bravi, forse potreste aver ottenuto qualcosa di meglio, ad esempio ±1 mm). Per quanto riguarda la bilancia elettronica usata per misurare la massa della molla e del piattello, essa ha una sensibilità di 1/1000 g (o addirittura migliore, non ricordo bene). Il cronometro ha una sensibilità 1/100 s: naturalmente anche in questo caso usare questo valore come incertezza nella misura dei tempi costituisce una grossa sottostima, dato che nell'azionamento del cronometro contano anche i vostri tempi di risposta e la precisione con la quale determinate (a occhio) gli istanti rilevanti. In seguito darò una mia stima per l'incertezza sulla misura dei tempi.

4. Anche se non strettamente necessario, preliminarmente potreste avere misurato la massa del piattello e della molla, entrambe con la bilancia elettronica e quindi con un errore relativo molto piccolo (direi dell'ordine di o inferiore allo 0.1%) e la lunghezza di riposo della molla, quest'ultima tutt'altro che trascurabile. Per quanto riguarda i pesetti, potete senz'altro assumere trascurabile l'errore relativo sulla loro massa, che è anch'esso dell'ordine di 0.1%.

5. Qui riporterete i dati delle misure, costruendo una tabella e un grafico (con tanto di barre di errore, please!) su carta millimetrata. L'informazione interessante che dovete estrarre dal grafico è contenuta nella pendenza, che vale (g/k). A questo scopo potete preliminarmente procedere con una stima, ma dovreste prima o poi usare un metodo di best fit. Il più semplice è quello dei minimi quadrati. Vi ricordo che la funzione che descrive le vostre osservazione è una retta che non passa per l'origine (ha un termine costante), cioè una funzione del tipo $f(x) = ax+b$. Sulle trasparenze delle lezioni potete facilmente trovare le formule che vi consentono di determinare i parametri a e b con le loro incertezze Δa e Δb. Volendo, potreste pure usare il metodo del minimo chi-quadro, anche se, essendo in questo caso costanti le incertezze sulla y (la misura della lunghezza della molla), i due metodi dovrebbero condurre allo stesso risultato. Può essere interessante, una volta determinato anche il parametro b che rappresenta l'intercetta della retta interpolante con l'asse y, determinare se questo risultato è in accordo con i valori attesi. Infatti la legge scritta sopra lega questa intercetta con grandezze che avete avuto la possibilità di misurare direttamente.

6. Qui riporterete i dati delle misure compiute osservando la durata del periodo di oscillazione del sistema (una volta provvedute opportune condizioni iniziali, è ovvio, e cercando di evitare movimenti fuori dall'asse della molla). Per la stima dell'incertezza sulla misura dei tempi, questa dipende da voi. In primo luogo, per minimizzare l'errore, conviene valutare il periodo sulla base di diverse oscillazioni (almeno per i pesetti più pesanti, il sistema oscilla tranquillo per diverse decine di cicli). Poi potete provare a fare diverse misure (sempre la stesso operatore, o diversi operatori) vedendo quanto vale lo scarto fra le diverse misure (da ripetere nelle stesse condizioni, cioè con lo stesso pesetto). Fatte le misure con tutti i pesetti (quello da 5 g non dà grandi risultati…), potete "divertirvi" a riportare i dati in carta logaritmica, osservando come sono disposti i punti e spiegando il perché (non dovrebbe venire una retta…). Poi, però, occorre fare un altro passaggio, consistente nel considerare la grandezza $\xi = T^2$ (per ottenere la grandezza basta adoperare la calcolatrice!

Occhio a propagare nel modo giusto l'errore: il quadrato è un prodotto e in questo caso tutti ricordate che gli errori **relativi** si sommano, cioè l'errore **relativo** su $\xi = T^2$è il doppio dell'errore **relativo** su T). Infatti a me viene (ricontrollate!): $\xi = m\left(\frac{4\pi^2}{k}\right) + \left[\frac{4\pi^2}{k}\left(m_P + \mu/3\right)\right]$, cioè la grandezza ξ segue anch'essa un andamento lineare con m , essendo la pendenza della retta interpolante pari a $4\pi^2/k$ (il termine fra parentesi quadrate è l'intercetta). Allora, facendo un best fit (come sopra) su questi dati dovreste poter ottenere il valore di k indipendentemente dalla misura di prima (quella statica). Naturalmente anche qui dovreste poter esprimere l'incertezza associata e anche qui potreste controllare se l'intercetta della retta torna con quanto vi aspettate.

7. A questo punto dal best fit della prima retta avete g/k (con un certo errore) e da quello della seconda retta avete k (con un certo errore). Combinando i due dati e propagando l'errore in modo opportuno si trova la stima di g che costituisce l'obiettivo finale dell'esperienza.

Ho provato personalmente, per divertimento, a esaminare i dati che ho visto qualcuno di voi prendere. Il grafico di Fig. 1 riporta i dati ottenuti nella prima parte dell'esperienza (le barre di errore lungo la direzione delle ordinate sono disegnate, ma praticamente non si vedono essendo molto piccole, supponendo un errore ±2 mm) assieme a un best fit fatto con il metodo del minimo chi-quadro (ci pensa il computer a farlo!). I risultati del fit, cioè i parametri della funzione di fit, sono mostrati in legenda. Per quanto riguarda l'intercetta, il suo valore risulta in effetti compatibile con le grandezze misurate (a me viene che l'intercetta, stimata usando i valori misurati di m_P, μ, ℓ_0 e il valore g/k dato dal fit, cioè dal parametro a, dovrebbe essere (0.138±0.014) m, valore che è in accordo, nell'ambito dell'incertezza, con quanto trovato dal best fit).

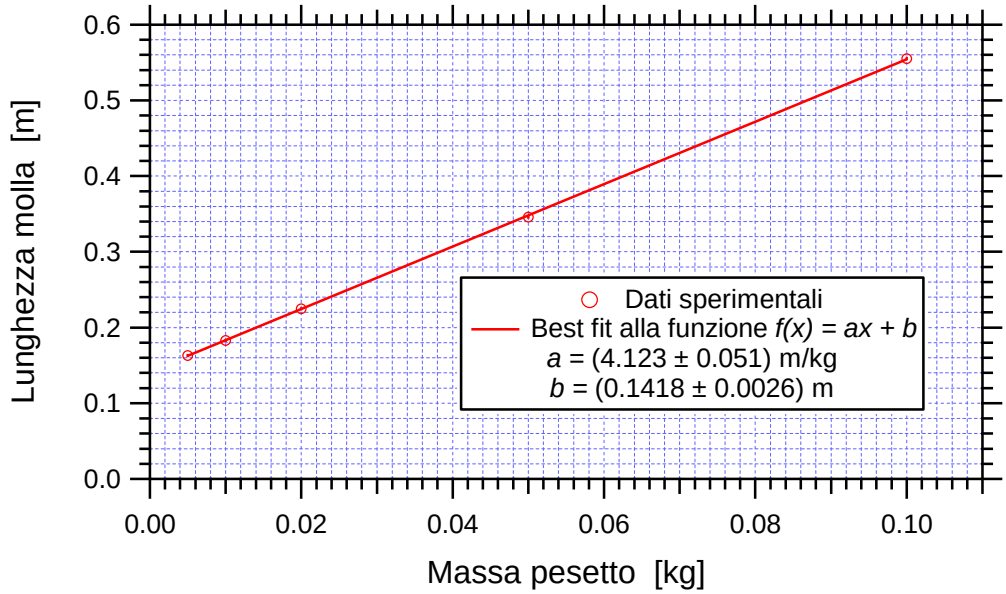

Fig. 1. Lunghezza della molla graficata in funzione della massa del pesetto (sistema in equilibrio). I punti sperimentali sono rappresentati dai circolini rossi: l'incertezza delle misure (valutata del ±2 mm per la sola misura della lunghezza, per la misura della massa è trascurabile) è rappresentata con barre di errore, praticamente invisibili. La linea rossa è il risultato di un'operazione di best fit (minimo chi-quadro) a una linea retta, di pendenza a e intercetta b come in legenda.

L’incertezza sul parametro *a*, che fisicamente rappresenta *g/k*, esce dell’ordine di ±1.5 %, un valore che è un po’ superiore all’incertezza relativa sulla misura della lunghezza a causa, probabilmente, del fatto che la retta non passa esattamente per tutti i dati sperimentali. Questo potrebbe voler dire che forse qualche incertezza è stata sottostimata (cioè la misura non è stata molto accurata, ad esempio per la difficoltà di traguardare con l’occhio la fine della molla nella misura della lunghezza).
Per divertimento, ho anche calcolato il chi-quadro del set di misure (ricordo che esso è sostanzialmente la somma degli scarti quadratici tra valore misurato e valore di fit divisi per il quadrato dell’incertezza sulla misura). Esce $\chi^2 = 0.34$; tenendo conto che il numero effettivo di gradi di libertà (numero punti sperimentali meno numero parametri del fit) è 3, il test del chi-quadro suggerisce un livello di confidenza ~ 95%. Dunque il fit va considerato piuttosto buono, anche se, visto il limitato numero di punti sperimentali, e quindi di gradi di libertà, il test non ha un grandissimo significato.
In ogni caso i dati di Fig. 1 dimostrano bene che la molla segue l’andamento previsto dalla legge di Hooke, cioè opera in regime lineare (ovvero elastico).
La Fig. 2 riporta invece i dati della seconda parte dell’esperienza graficati in carta logaritmica. Per stimare l’incertezza sulla misura del periodo, ho sfruttato il fatto che le due ragazze che hanno condotto questo esperimento hanno separatamente misurato i tempi (sulla base di 30 cicli di oscillazione, tranne che per il pesetto più piccolo, per il quale è stato possibile usare solo 10 oscillazioni prima che il movimento diventasse troppo caotico). Quindi ho stimato l’incertezza come (la metà) della discrepanza fra i valori delle misure fatte dalle due ragazze (ho preso la metà per non sovrastimare l’errore, ma così l’ho forse sottostimato…).

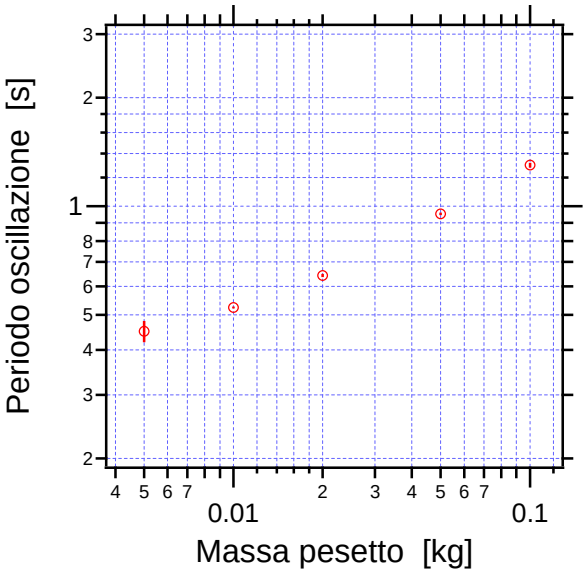

Fig. 2. Periodo di oscillazione del sistema in funzione della massa del pesetto graficato su carta logaritmica. I punti sperimentali sono rappresentati dai circolini rossi: l’incertezza delle misure, per la sola misura del periodo, è stimata come discusso nel testo.

Come si vede dal grafico, i punti non sono allineati secondo una retta. Ciò potrebbe sembrare strano, dato che la carta logaritmica serve per rappresentare dati che seguono una legge di potenza e quella che stiamo graficando sembrerebbe una legge di potenza (con esponente ½, cioè la radice quadrata), però un’analisi più attenta mostra che l’andamento tipo semplice legge di potenza non è

riguardo alla massa del pesetto, ma piuttosto rispetto alla variabile $m+m_P+\mu$. In effetti rifacendo il grafico con questa nuova variabile si ottiene proprio un andamento lineare (credetemi anche se non vi riporto qui la figura!).

La Fig. 3 riporta invece la grandezza ξ definita prima in funzione della massa del pesetto assieme a un best fit rispetto alla retta $f(x) = ax + b$, fatto con il metodo del minimo chi-quadro. In questa funzione, la pendenza a è costituita fisicamente dalla grandezza $4\pi^2/k$; risulta quindi $k = 4\pi^2/a$. Facendo il calcolo, si ottiene, per la molla usata nell'esperimento (le molle sono tutte diverse!) k = (2.465±0.045) N/m, dove l'errore relativo è lo stesso errore relativo fornito dal fit sul parametro a (propagazione degli errori, tenendo conto che $4\pi^2$ è un numero privo di incertezza…).

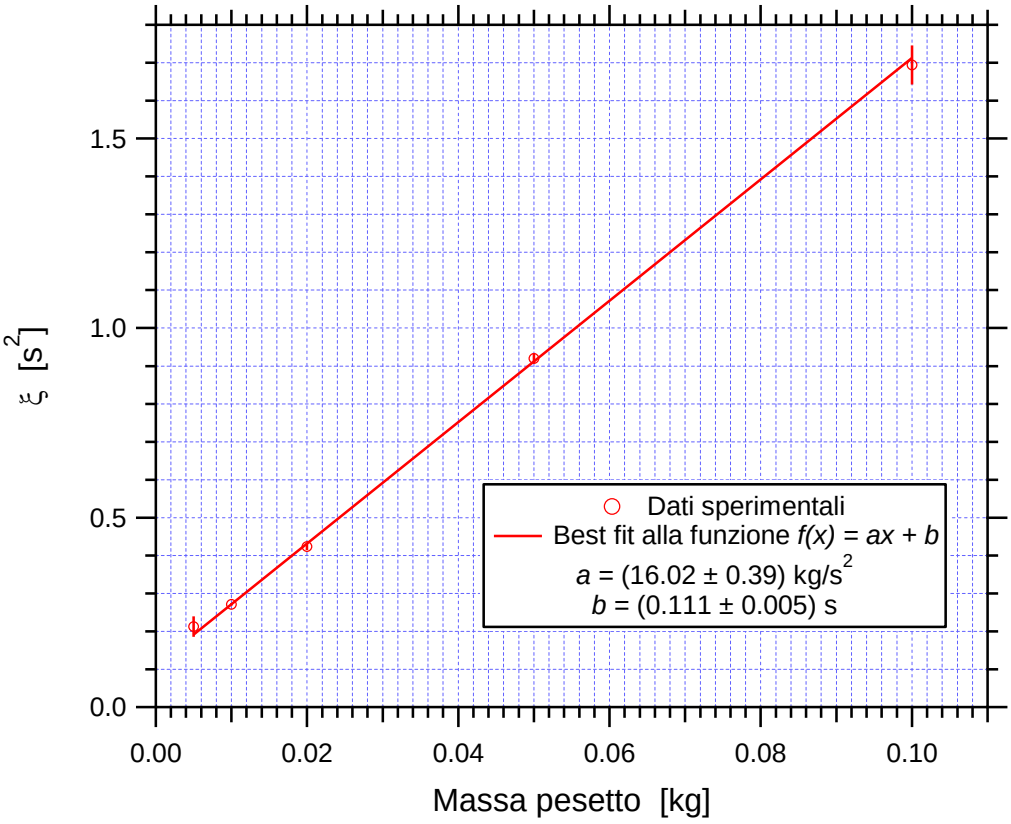

Fig. 3. Grandezza ξ^2 come definita nel testo (in pratica è il quadrato del periodo di oscillazione) graficata in funzione della massa del pesetto (sistema in oscillazione). I punti derivati dall'esperimento sono rappresentati dai circolini rossi: l'incertezza delle misure (propagata dalla misura del periodo secondo quanto riportato nel testo) è rappresentata con barre di errore. La linea rossa è il risultato di un'operazione di best fit (minimo chi-quadro) a una linea retta, di pendenza a e intercetta b come in legenda.

Anche su questo grafico e sul suo best fit si possono fare dei controlli. Ad esempio si può controllare se il valore dell'intercetta data dal fit è in accordo con quanto si ottiene dai valori misurati di m_P e μ e dal valore di k che esce dal fit (questi sono, secondo me, gli ingredienti necessari per la stima). I dati misurati danno un valore dell'intercetta pari a (0.104±0.010) s, che è in ragionevole accordo con il risultato del fit. Inoltre per il fit si ha $\chi^2 = 2.0$, sempre per un numero di gradi di libertà effettivo pari a 3; il test del chi-quadro suggerisce qui un livello di confidenza attorno al 60%, non molto alto ma neppure troppo basso (e, come prima, anche qui occorre ricordare che il limitato numero di punti non rende molto significativo questo test).

A questo punto, essendo noto il rapporto *g/k* dalla prima parte dell'esperimento e il valore di *k* dalla seconda, provo a determinare il valore di *g* e la sua incertezza ottenuta con la propagazione degli errori (dovendo fare un prodotto, dovrò sommare gli errori relativi, o meglio dovrò fare la somma in qudratura degli errori relativi, cioè: $\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\Delta(g/k)}{g/k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2$, ovvero $\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta(g/k)}{g/k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2}$. A me esce: g = (10.16±0.28) m/s^2. La misura sembra corretta, dato che il dato di *g* esce con un'incertezza relativa piuttosto bassa (~2%), però non è del tutto soddisfacente, dato che sappiamo che qui a Pisa $g \sim 9.8$ m/s^2 (valore al di fuori dell'incertezza).
Personalmente interpreterei la situazione osservando che la misura sul periodo di oscillazione condotta con il pesetto di massa minore (5 g) è probabilmente falsata dalla difficoltà con cui si riesce a misurare il periodo e soprattutto dal fatto che il moto del sistema non avviene prevalentemente in direzione verticale quando la massa applicata è molto piccola. Infatti, se escludo dall'analisi il dato corrispondente e ripeto tutte le considerazioni già svolte, ottengo alla fine g = (9.97±0.20) m/s^2, che è in ragionevole accordo con le aspettative.
Insomma, alla fine mi congratulo (ragionevolmente) con chi ha preso i dati e vi invito tutti a scrivere una buona relazione (da consegnare in anticipo rispetto alla data dell'esame orale!)