

L'esperienza, basata sullo studio del moto angolare di un disco di alluminio ("volano"), ha diversi scopi e finalità, tra cui:

- a) Determinare sperimentalmente la legge oraria della velocità angolare $\omega(t)$ nel caso di moto "libero" (senza momenti di forza esterni, applicati intenzionalmente) e in presenza di attrito dinamico;
- b) Determinare il valore numerico della accelerazione angolare α_A dovuta alle forze di attrito;
- c) Determinare sperimentalmente la legge oraria della velocità angolare $\omega(t)$ nel caso di moto dovuto alla presenza di un peso appoggiato a un piattello (collegato a una puleggia solidale al volano da un filo inestensibile di massa trascurabile);
- d) Determinare il valore numerico dell'accelerazione angolare α nel moto di cui sopra, eseguendo la misura per diversi valori della massa del peso;
- e) Determinare, sulla base dei risultati e della valutazione quantitativa di tutte le grandezze rilevanti, l'accelerazione di gravità g .

Lo stile della relazione è libero. Nella relazione vanno indicate le misure effettuate, gli strumenti impiegati e la stima dell'incertezza associata a ogni misura, sia diretta (fatta con uno strumento) che derivata (fatta attraverso manipolazioni matematiche di grandezze misurate). Tutti i passaggi vanno, per quanto possibile, spiegati (ricordate di esprimere sempre le unità di misura e di chiarire le modalità di operazione e di trattamento dei dati). Alla relazione vanno aggiunti gli eventuali grafici, da fare o a mano su carta millimetrata, o con computer.

Personalmente, suddividerei la relazione in diverse sezioni, ad esempio:

1. Introduzione, con breve descrizione delle finalità etc.;
2. Modello, con chiara discussione di tutte le leggi impiegate e della matematica che serve per determinare le equazioni, o formule, necessarie;
3. Discussione sugli strumenti di misura a disposizione e della loro sensibilità (incertezza);
4. Discussione delle misure preliminari, ad esempio masse, momenti di inerzia, dimensioni, etc., con esplicita menzione all'incertezza che attribuite a ogni misura e breve descrizione delle modalità di misura (uso il calibro, il metro, la bilancia, mi fido di dati nominali, trascuro qualcosa, etc.);
5. Descrizione della prima parte dell'esperimento, cioè la decelerazione del volano dovuta all'attrito, e calcolo della α_A ;
6. Descrizione della seconda parte dell'esperimento, cioè l'accelerazione del volano per effetto del momento della forza trasferita dal filo sulla puleggia, e calcolo della α ;
7. (solo se davvero ve la sentite, e spero che davvero ve la sentiate...) Determinazione di g dai dati dell'esperimento e discussione sull'incertezza e sulla veridicità della misura.

Nota: per calcolare le accelerazioni angolari di cui ai punti 5, 6 e determinare l'incertezza associata occorre usare metodi di best fit, o regressione lineare, che abbiamo trattato la settimana scorsa.

Qualche suggerimento per le varie sezioni.

1. Spiegate in modo chiaro cosa si vuole verificare e ottenere.
2. Discutete per bene il modello fisico risolvendo le equazioni coinvolte. Vi ricordo che le due leggi orarie della velocità angolare che si ottengono nei due casi (punti 5 e 6) devono essere rispettivamente: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha_A t$, dove si intende che il valore di α_A è negativo, e $\omega(t) = (\alpha + \alpha_A)t$.

attenti! Mi sa che alfa_A deve andare fuori dalla frazione!

Rispetto ai vari parametri del problema, che esprimo usando le notazioni solite, a me viene:

$$\alpha = \frac{\alpha_A + m_{tot} g R / I_{tot}}{1 + m_{tot} R^2 / I_{tot}}; \text{ricontrollate attentamente che questa equazione sia valida e soprattutto nella}$$

relazione mostrate che questo è il risultato a cui si arriva!

3. Gli strumenti che avete usato li conoscete. Può farvi comodo ricordare che la sensibilità del calibro usato è 1/20 mm; inoltre possiamo assumere che l'accuratezza della massa dei pesi usati fosse migliore di 1 g (come verificato con la bilancia, di sensibilità nominale 0.0001 g). Per quanto riguarda l'incertezza sulla velocità angolare istantanea, fornita dal computer, tenendo conto che l'encoder usato ha 20 "tacche" per giro, propongo di usare un errore relativo dell'ordine di $\pm 1/20$, cioè un errore relativo percentuale pari a $\pm 5\%$.

4. In questa sezione dovrete dedicarvi a fornire i valori numerici di tutte le grandezze, derivate e non, che compaiono nel problema, discutendone l'incertezza. Ad esempio, se l'equazione che determina il valore dell'accelerazione angolare è davvero quella sopra, dovrete in questa sezione specificare quanto valgono e quanta incertezza (assoluta o relativa) hanno R (raggio della puleggia), m_{tot} (massa del peso e del piattello), I_{tot} (momento di inerzia del volano, che stimerete usando la relazione $I = Mr^2/2$ valida per un disco pieno omogeneo, ricordando che $M = \rho_M V$ con $\rho_M = (2.70 \pm 0.02) \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, densità di massa dell'alluminio, e V volume del disco - inutile ricordarvi che il volume si esprime come $\pi r^2 d$, con d spessore del disco...). Ricordate che, ogni volta che una grandezza è derivata matematicamente da altre (ad esempio il volume o il momento di inerzia o m_{tot}) occorre preoccuparsi della propagazione degli errori e usarla in modo opportuno. Può essere che qualche volta, attraverso opportuni ragionamenti, sia possibile trascurare l'incertezza o stimarla in modo diverso rispetto all'uso della propagazione degli errori: questo è il caso, ad esempio, di I_{tot} , dove la stima deve tenere conto del fatto che approssimate il volano a un disco pieno, e quindi l'incertezza dovrebbe nascere dall'approssimazione che fate. Potete poi fare qualche affermazione finalizzata a semplificare la matematica, ad esempio individuare le incertezze che sono pressoché irrilevanti. Secondo me, l'errore relativo nella misura di R e di m_{tot} è trascurabile rispetto agli altri.

5 e 6. Qui dovete descrivere e discutere i due diversi esperimenti (rotazione "libera" e dovuta al peso) che avete svolto, inserendo i grafici che consentono di determinare le accelerazioni nei due casi. State attenti a ricordare che il sistema di misura della velocità angolare in funzione del tempo non registra il segno, ovvero il verso di rotazione, per cui il grafico ottenuto al punto 6 dovrebbe avere una forma a "dente di sega". Chiaramente per estrapolare il valore di α dovrete arrangiarvi, o utilizzando solo un tratto del dente di sega, oppure inventandovi un modo che consenta di sfruttare più dai sperimentali (lascio l'inventiva a voi...). Può essere simpatico paragonare i valori di α che si ottengono usando diversi pesi: questi valori, ovviamente, non devono essere uguali tra loro, dato che il risultato dipende da m_{tot} , e la relazione attesa tra i vari valori può essere determinata matematicamente, per cui dovrebbe essere possibile fare un confronto.

7. La valutazione di g attraverso questo metodo richiede di invertire l'equazione scritta sopra, ottenendo, in pratica, g in funzione delle altre grandezze misurate (direttamente o in modo derivato). A me viene (ma anche qui ricontrollate bene!): $g = \frac{I_{tot}}{m_{tot} R} (\alpha - \alpha_A) - \alpha_A R$ (occhio ai

segni, che sono stati corretti in questa versione!). Ovviamente anche per questa espressione dovete stimare l'incertezza, usando in modo corretto la propagazione degli errori (ricordate che nel caso di somme o differenze si sommano gli errori assoluti, nel caso di prodotti o rapporti si sommano gli

errori relativi; ricordate anche che, a rigore, quando le misure sono indipendenti tra loro, come in questo caso, alle somme si sostituiscono le “somme in quadratura”).

Nota sull'operazione di best fit. A questo punto del corso dovreste essere in grado di usare i metodi di best fit (minimi quadrati) che abbiamo visto a lezione. Anche se si potrebbe utilizzare una regola unica per i due casi che si incontrano nell'esperimento (retta che passa per l'origine e retta con termine costante), distinguerò le due situazioni, che corrispondono ovviamente ai due diversi esperimenti.

- a) Retta che passa per l'origine (serve per valutare la pendenza $\alpha + \alpha_A$ nell'esperimento di caduta accelerata, cioè quando usate i pesini, cioè per interpretare i dati di cui al punto 6 discusso sopra). Per evitare confusioni di simboli, chiamerò qui la funzione $f(x) = mx$, cioè suppongo che la variabile indipendente si chiami x (nell'esperimento è il tempo) e che la pendenza si indichi con m (non è una massa e nell'esperimento è l'accelerazione $\alpha + \alpha_A$). Detti dunque x_i i valori misurati della variabile indipendente (i tempi, così come sono espressi nella prima colonna del file generato dal computer) e y_i i valori misurati della variabile dipendente (le velocità angolari, così come sono espressi nella terza colonna del

file generato dal computer), si ha: $m = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i (x_i)^2}$. L'incertezza su questo parametro di fit può

essere espressa come: $\Delta m \approx \sqrt{\frac{(\Delta y_i)^2}{\sum_i x_i^2}}$

- b) Retta che non passa per l'origine (serve per valutare la pendenza α_A nell'esperimento di decelerazione per attrito dinamico, cioè quando fate partire con una certa velocità iniziale ω_0 il volano e ne osservate la decelerazione, cioè per interpretare i dati di cui al punto 5 discusso sopra). Per evitare confusioni di simboli, chiamerò qui la funzione $f(x) = mx + q$, dove rispetto a prima ho aggiunto il termine costante q (che sperimentalmente è ω_0), mentre il termine m stavolta si riferisce all'accelerazione angolare dovuta all'attrito, cioè è in pratica α_A . Detti dunque x_i i valori misurati della variabile indipendente (i tempi, così come sono espressi nella prima colonna del file generato dal computer) e y_i i valori misurati della variabile dipendente (le velocità angolari, così come sono espressi nella terza colonna del file generato dal computer), ed N il numero complessivo delle misure, cioè dei punti

acquisiti dal computer (e considerati per il best fit), si ha: $m = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i (x_i)^2 - (\sum_i x_i)^2}$;

$q = \frac{\sum_i (x_i)^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i (x_i)^2 - (\sum_i x_i)^2}$. L'incertezza su questi parametri di fit può essere

espressa come: $\Delta m \approx \sqrt{\frac{N(\Delta y_i)^2}{N \sum_i (x_i)^2 - (\sum_i x_i)^2}}$; $\Delta q \approx \sqrt{\frac{\sum_i (x_i)^2 (\Delta y_i)^2}{N \sum_i (x_i)^2 - (\sum_i x_i)^2}}$

Ho provato personalmente, per divertimento, a esaminare i dati di qualcuno di voi. I grafici, con rispettivi best fit a una retta fatti con il metodo dei minimi quadrati sono riportati nelle Fig. 1-3 (per

gli esperimenti di cui ai punti 5 e 6, rispettivamente, e nel caso dell'esperimento di cui al punto 6 riporto i risultati per due scelte dei pesetti).

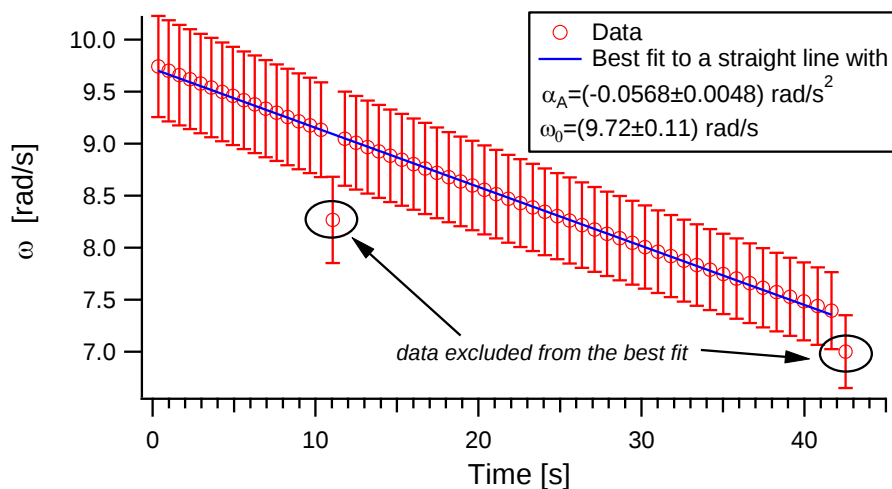


Fig. 1. Andamento della velocità angolare del volano in funzione del tempo nel caso di rotazione “libera” (cioè con la sola forza di attrito presente). I punti sperimentali sono rappresentati dai circolini rossi: l'incertezza delle misure (valutata del $\pm 5\%$ per la sola misura della velocità angolare, per la misura di tempo è trascurabile) è rappresentata con barre di errore. La linea blu è il risultato di un'operazione di best fit a una linea retta, di pendenza α_A e valore costante ω_0 come indicato in legenda. I due punti cerchiati sono stati esclusi dalla procedura di best fit, in quanto fortemente fuori dalla retta interpolante (probabilmente si tratta di errori di misura dovuti all'elettronica di acquisizione o a qualche altro motivo strumentale).

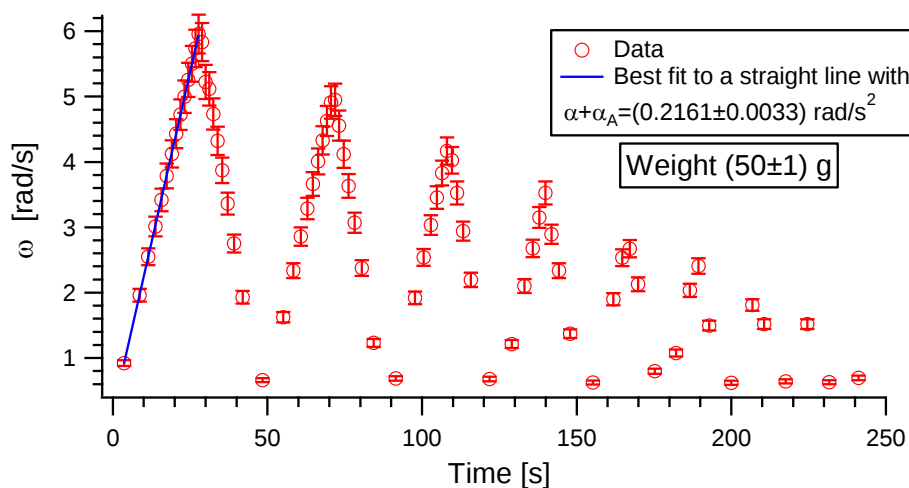


Fig. 2. Andamento della velocità angolare del volano in funzione del tempo nel caso di rotazione dovuta alla presenza del piattello, del filo avvolto sulla puleggia e della massa [per questa misura si aveva $m = (50 \pm 1)$ g]. I punti sperimentali sono rappresentati dai circolini rossi: l'incertezza delle misure (valutata del $\pm 5\%$ per la sola misura della velocità angolare, per la misura di tempo è trascurabile) è rappresentata con barre di errore. La linea blu è il risultato di un'operazione di best fit dei dati corrispondenti alla prima discesa (il primo tratto del “dente di sega”) a una linea retta, di pendenza α come indicato in legenda.

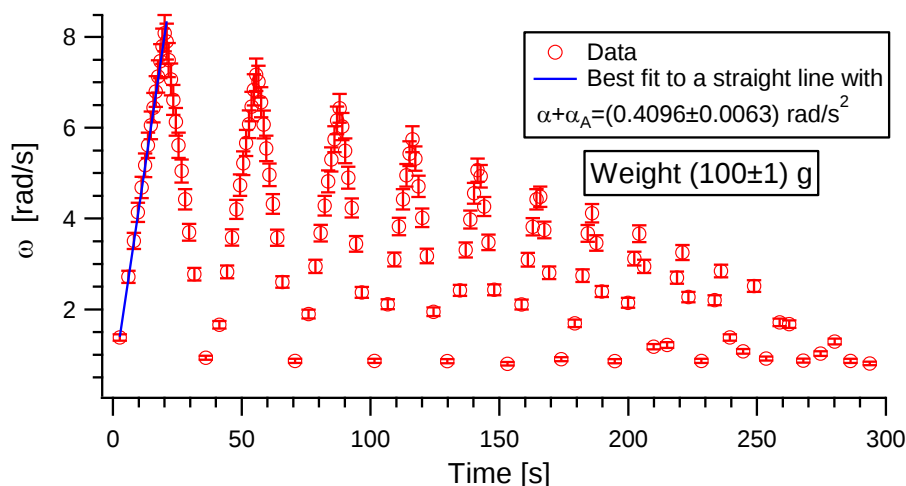


Fig. 3. Analogo della Fig. 2, ma per un pesetto di massa $m = (100 \pm 1)$ g.

Uso il valore $R = (10.00 \pm 0.05)$ mm, che ho controllato essere corretto (era errato per dimenticanza nella precedente versione di questa nota!), pongo il momento di inerzia $I_{tot} = 2.7 \times 10^{-2}$ kg m². Non voglio neanche suggerirvi come indicare l'incertezza su questa grandezza, e uso un'incertezza relativa (percentuale) del 10%, che credo sia una sovrastima di quanto si ha in realtà. Infine, ricordo a mente quanto vale il peso del piattino (23 g, con incertezza trascurabile vista la sensibilità della bilancia di laboratorio), e quindi pongo $m_{tot} = (73 \pm 1)$ g oppure $m_{tot} = (100 \pm 1)$ g in corrispondenza dei due casi esaminati sperimentalmente in Fig. 2 e 3, rispettivamente.

Con questa scelta dei parametri che, ripeto, potrebbe essere errata (per dimenticanza, controllate le vostre note!), usando i dati per il pesetto da 100 g, che mi sembrano migliori, ottengo $g = 11.4$ m/s². L'incertezza sulla valutazione di g mi pare dominata (usando in modo opportuno la propagazione degli errori, e voglio che voi lo facciate con chiarezza nella relazione) da quella su I_{tot} e da quella sulla determinazione delle accelerazioni angolari, per cui l'errore relativo sulla valutazione di g esce dell'ordine del 15%. Dunque il risultato finale sarebbe: $g = (11.4 \pm 1.4)$ m/s².

Questo risultato è *quasi* accettabile, dato che sappiamo che $g \sim 9.8$ m/s². L'accordo con le attese però non è proprio perfetto. Se ne conclude che:

- (i) C'è qualche errore nella soluzione del modello (ricontrollate!);
- (ii) Ho sbagliato qualcuno dei valori che ricordo a mente (ricontrollate!);
- (iii) Il modello è sbagliato, ad esempio perché la forza di attrito non produce un'accelerazione angolare costante (non è semplice attrito dinamico) o perché si è sottovalutato qualche aspetto importante;
- (iv) C'è qualche errore sistematico nella misura computerizzata delle velocità;

In ogni caso, tutto ciò non vi autorizza a non fare una valida relazione di laboratorio, e anche a farla a tempo debito (voglio che mi consegniate tutte le relazioni almeno una settimana prima dell'orale). Buon divertimento!