

Parte 2

Inadeguatezza dell'approccio classico: interazione radiazione/materia e sorgenti classiche (corpo nero)

Me 25.10.2011 Aula DIC

SOMMARIO

- Interazione radiazione materia in termini classici:
 - modello di Thomson e modello di Lorenz
 - assorbimento e dispersione da parte di un dielettrico
 - comportamento ottico di un metallo (non “plasmonico”)
- Anticipazione:
 - M.Q. si basa su approccio “complementare” onda/particella
 - Einstein (1905) introdusse i fotoni
 - (trattazione classica della materia e quantistica della radiazione)*
- Sorgenti convenzionali (termiche):
 - il problema del corpo nero
 - caratteristiche della radiazione convenzionale

Obiettivo : mostrare che l’approccio classico non basta per interpretare laser

Verificare che una sorgente di radiazione “convenzionale” non ha le proprietà del laser

(Scopo aggiuntivo: esaminare interazione radiazione materia in termini più generali)

INTERAZIONE RADIAZIONE MATERIA

1. Laser richiede un mezzo materiale (mezzo attivo) per funzionare
2. Molte applicazioni dei laser prevedono interazione con mezzi materiali



Necessario occuparsi di interazione radiazione materia

Poiché onda e.m. porta un campo elettrico (e magnetico) oscillante, il comportamento ottico di un materiale dipende dalla “risposta” delle cariche che subiscono tale campo elettrico (e magnetico)

Poiché gli “ioni” (nuclei, componenti del reticolo, ...) sono “pesanti”, il comportamento ottico ha a che fare con il moto degli elettroni “forzati” dal campo elettrico

In altre parole:

La “sorgente” di un’onda e.m. è una corrente “oscillante”

Qualitativamente (soprattutto in un metallo): la riflessione che si osserva in metalli (e dielettrici) è dovuta a onda riflessa generata da correnti “oscillanti” legate al moto degli elettroni forzati dal campo incidente; simile per trasmissione o rifrazione

TRATTAZIONE “CLASSICA” (ONDULATORIA) DELLA RADIAZIONE

Onda piana monocromatica etc.: $\vec{E}(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} \hat{y}$

La presenza del materiale modifica k (ω rimane inalterata)

Assorbimento
(materiale “opaco”)

Velocità di propagazione
(fase, dispersione, etc.)

Per Maxwell+Einstein : $v_{fase,vuoto} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$

Per definizione di k : $k_{vuoto} = \frac{\omega}{v_{fase,vuoto}} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Nel materiale: $v_{fase,mater} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_R \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} = \frac{c}{n}$

Cioè: $k_{mater} = \frac{\omega}{v_{fase,mater}} = \frac{\omega}{c} n = k_{vuoto} n = \frac{2\pi}{\lambda} n$

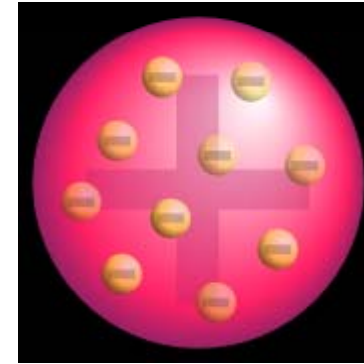
Si introduce indice di rifrazione complesso $n' = n + i\alpha$
con: $\epsilon_r = n'^2$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= E_0 e^{ik_{mater}x} e^{-i(\omega t - \phi)} \hat{y} = \\ &= E_0 e^{ik_{vuoto}nx} e^{-i(\omega t - \phi)} \hat{y} = \\ &= E_0 e^{-\alpha x} e^{ik_{vuoto}nx} e^{-i(\omega t - \phi)} \hat{y} \end{aligned}$$

DIELETTRICI (E SEMICONDUTTORI)

“Modello di Thomson”:

- carica del nucleo è delocalizzata
- elettroni puntiformi “annegati” dentro la carica positiva



Esempio “minimale” di materiale dielettrico:

suppongo atomo di idrogeno con protone delocalizzato in volume sferico “fisso” di raggio a_0 :

$$\rho = 3e/(4\pi a_0^3) \rightarrow E_{int}(r) = Q_{int}/(\epsilon_0 4\pi r^2) = er/(\epsilon_0 4\pi a_0^3)$$

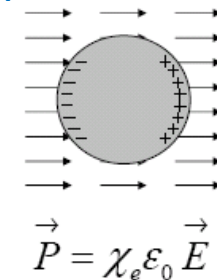
All'equilibrio l'elettrone è in $r = 0$; altrimenti sente forza $F(r) = -eE_{int}(r) = -kr$

Ad esempio, con campo statico E_0 si ha $r_0 = eE_0/k$

→ si forma dipolo di momento $p_0 = er_0$

→ si forma campo polarizzazione $P_0 = Np_0 = \chi\epsilon_0 E_0$

→ polarizzabilità (statica) $\chi = Ne/(k\epsilon_0)$



Nell'atomo posso sopporre forza elastica di legame elettrone protone
L'atomo, e quindi il materiale, si polarizzano sotto l'effetto di campi esterni

MODELLO DI LORENZ

Sistema legato nucleo-elettrone ha frequenza propria di oscillazione $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$
Ragionevole aggiungere forza viscosa $-b\mathbf{v}$ che contrasta moto elettrone

Sottoposto a campo elettrico oscillante ω ho:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \exp(i \omega t)$$

Nota: approssimazione di dipolo, tutto il sistema è interessato da campo in fase (sistema di piccole dimensioni)

smorzamento collisionale e quello proporzionale alla sola x il termine armonico. Dividendo per la massa dell'elettrone m , ponendo $b/m = \eta$ e $k/m = \omega_0^2$ (ω_0 = frequenza propria di risonanza del sistema), si ottiene:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \exp(i \omega t)$$

La soluzione dell'equazione differenziale deve essere di tipo periodico. Potremo quindi pensare che sia del tipo:

$$x(t) = x_0 \exp(i \omega t)$$

Sostituiamo le derivate prima e seconda della nostra soluzione nell'equazione differenziale:

$$- \omega^2 x_0 \exp(i \omega t) + i \eta \omega x_0 \exp(i \omega t) + \omega_0^2 x_0 \exp(i \omega t) = \frac{F}{m} \exp(i \omega t)$$

LORENZ II

$$-\omega^2 + i\eta\omega + \omega_0^2 = \frac{F}{mx_0}$$

da cui:

$$x_0 = \frac{F}{m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta\omega} \right)$$

Razionalizzando:

$$x_0 = \frac{F}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\eta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} \right] = \frac{F}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} - i \frac{\eta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} \right]$$

che rappresenta un'ampiezza d'oscillazione complessa. Se ricordiamo che la forza elettrica F è data dal prodotto della carica e dell'elettrone per il campo elettrico E della radiazione, avremo:

$$x_0 = \frac{eE}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} - i \frac{\eta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} \right] \quad \text{Ampiezza (complessa) di oscillazione}$$

Il vettore polarizzazione P è legato allo spostamento x_0 dalla relazione:

$$P = ne x_0 \quad \text{Campo di polarizzazione}$$

essendo n il numero di cariche (elettroni) per unità di volume ed e la carica dell'elettrone.

Ed essendo inoltre:

$$\bar{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \bar{E}$$

si avrà:

$$\epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{ne x_0}{\epsilon_0 E}$$

ovvero:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} - i \frac{\eta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2} \right] \quad \text{Costante dielettrica relativa (complessa!!)}$$

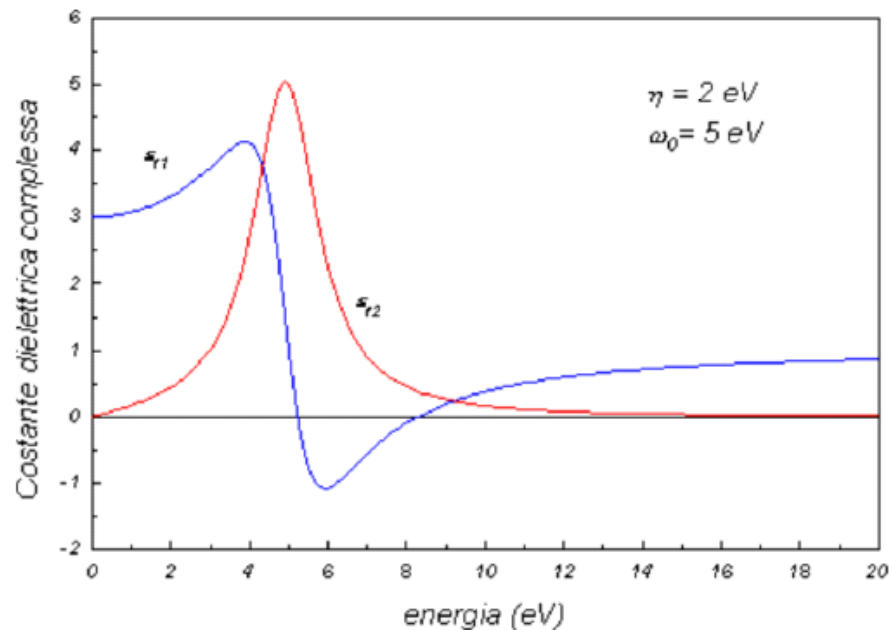
COSTANTE DIELETTRICA COMPLESSA

Costante dielettrica complessa:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r1}(\omega) - i\varepsilon_{r2}(\omega)$$

$$\varepsilon_{r1}(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} \right]$$

$$\varepsilon_{r2}(\omega) = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \left[\frac{\eta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} \right]$$



Andamento “dispersivo” per ε_{r1}
Andamento lorentziano per ε_{r2}

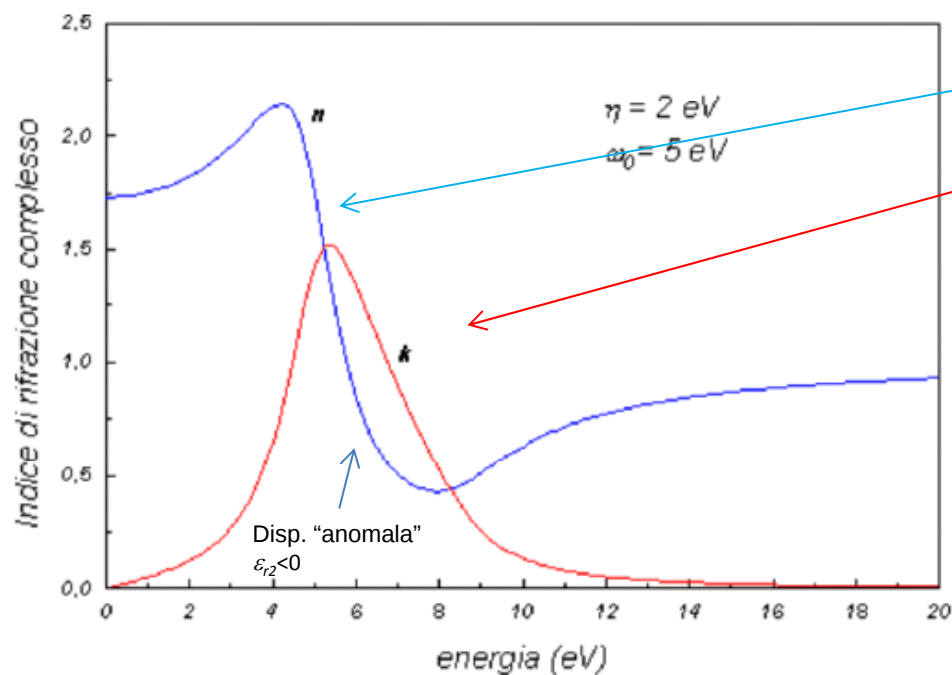
[Risonanza a $\omega \sim \omega_0$]

La funzione dielettrica, qui desunta per una singola frequenza di risonanza del sistema assorbente, può venire generalizzata al caso di un numero qualunque di tali frequenze, diventando:

$$\varepsilon_r = 1 + \sum_i \frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 m} \left[\frac{\omega_{0i}^2 - \omega^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \eta_i^2 \omega^2} - j \frac{\eta_i \omega}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \eta_i^2 \omega^2} \right]$$

INDICE DI RIFRAZIONE COMPLESSO

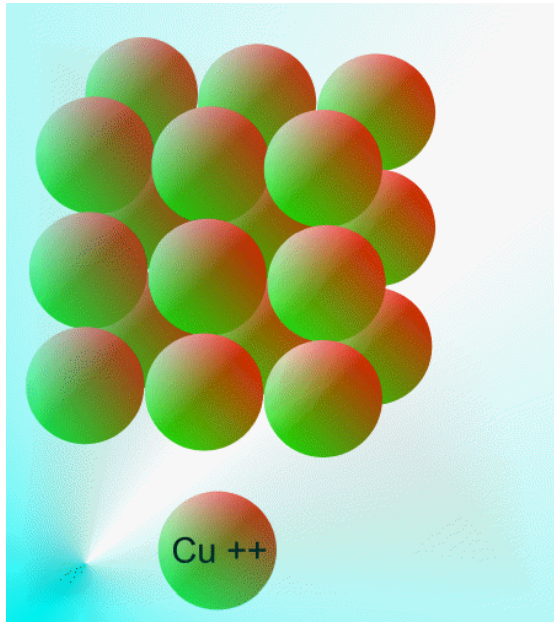
Qui si introduce indice di rifrazione complesso $n' = n + i\alpha$
con: $\varepsilon_r = n'^2 = (n + i\alpha)^2$, ovvero: $\varepsilon_{r1} = n^2 - \alpha^2$ $\varepsilon_{r2} = 2n\alpha$



n produce sfasamento (dispersione)
 α produce assorbimento:
 $E(x) \sim E_0 e^{-\alpha x}$

Classicamente un dielettrico può solo
(disperdere) e assorbire
(con forma di riga lorentziana, larga $\sim \eta$)
Impossibile ogni amplificazione!!

METALLI I



I metalli hanno “elettroni liberi” che possono muoversi quasi-liberamente

Il “quasi” tiene conto (ad esempio) della resistività

La resistività implica dissipazione di energia in un processo che è simile a uno **smorzamento viscoso**

Avevamo trovato costante dielettrica complessa:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \left[\frac{\cancel{\omega_0^2} - \omega^2}{(\cancel{\omega_0^2} - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} - i \frac{\eta \omega}{(\cancel{\omega_0^2} - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} \right]$$

In un metallo:

Lo smorzamento è legato alla resistività
Non ci sono risonanze, cioè $\omega_0=0$

(Nota: non è affatto la situazione che si verifica in nanostrutture metalliche, dove possono esistere risonanze **plasmoniche**; magari le vedremo in seguito...)

Frequenza di plasma

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\omega) &= 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \left[\frac{1}{\omega^2 + \eta^2} + i \frac{\eta}{\omega(\omega^2 + \eta^2)} \right] = \\ &= 1 - \omega_p^2 \frac{1}{\omega} \frac{\omega + i\eta}{(\omega + i\eta)(\omega - i\eta)} = 1 - \omega_p^2 \frac{1}{\omega^2 - i\eta\omega} \end{aligned}$$

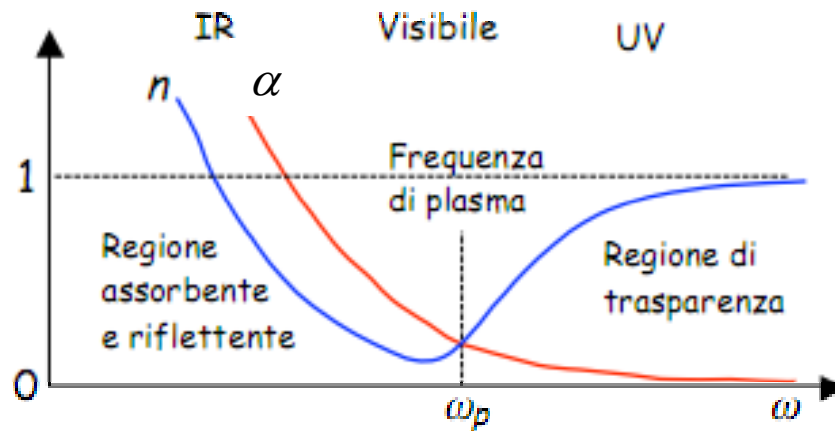
METALLI II

Anche per i metalli si ha
indice di rifrazione complesso $n' = n + i\alpha$
 con: $\epsilon_{r1} = n^2 - \alpha^2$ $\epsilon_{r2} = 2n\alpha$

In condizioni tipiche (metalli ordinari):

$$\eta \sim 1/\tau_{\text{coll(DRUDE)}} \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\omega_p \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ Hz}$$



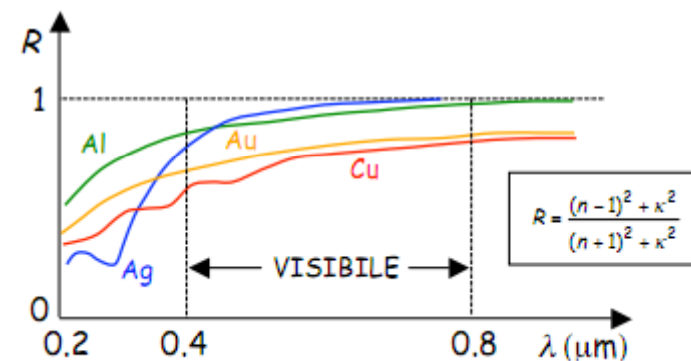
Classicamente anche un metallo può solo riflettere (e assorbire, cfr. “effetto pelle”)

È negativo per $\omega < \omega_p$

$$n^2 - \alpha^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \eta^2}$$

$$2n\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \eta^2} \frac{\eta}{\omega}$$

I metalli ordinari (e.g., non nanostrutture) hanno in genere grossa riflettività nel visibile (e talvolta colore dovuto a interazione con elettroni di valenza)



INADEGUATEZZA APPROCCIO CLASSICO

Abbiamo visto che trattando sia radiazione (onda e.m.) che materia in modo classico (elettroni che oscillano forzati da campo “incidente”) si spiegano diverse evidenze sperimentali (assorbimento, trasmissione/rifrazione, dispersione, etc.) ma non si trova mai amplificazione

Cosa possiamo imparare se trattiamo materia classicamente e radiazione quantisticamente?

Vedremo che questo approccio serve benissimo per spiegare sorgenti convenzionali

Tipico esempio: lampadina a incandescenza

calore → temperatura → emissione (colore)

Qualitativamente e classicamente:

il calore fornito mette in movimento le cariche che si trovano allora ad emettere

ANTICIPAZIONE: ONDA/PARTICELLA

La complementarità onda/particella (detto anche “dualismo”) è uno dei pilastri della M.Q.: approccio può “privilegiare” aspetto ondulatorio o corpuscolare a seconda degli obiettivi

Utilizzando le analogie tra ottica geometrica e dinamica particellare e il successo della dimostrazione di Einstein sull'effetto fotoelettrico e la legge di Planck, de Broglie ebbe l'idea di associare alla radiazione un aspetto particellare sotto forma di quanti di energia $E = h\nu$ ognuno di impulso di modulo:

Tesi di laurea del 1924

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

dove h è la [costante di Planck](#), la cui direzione è quella del vettore d'onda k . Inoltre de Broglie utilizzò l'analogia tra la velocità di fase di un'onda che attraversa un mezzo (?) con la velocità di una particella che attraversa un campo di forze:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{Fotone di Einstein}$$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad \text{Ipotesi di de Broglie}$$

A una particella “libera” (non interagente) che si muove con impulso $\mathbf{p}$ si associa *onda piana* con vettore d'onda $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$

L'energia si esprime come $E = pv$ (come classicamente, a parte coefficienti)

... E VICEVERSA!!

FOTONI

Un fascio di luce può anche essere visto come fascio di particelle con massa nulla (fotoni)

$$E [\text{eV}] = 1240/\lambda [\text{nm}]$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

L'energia si misura convenientemente in eV

“Particle of light”

Photon

$$E = h\nu$$



Planck's constant:
 $h = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$

$\lambda \nu = c$
 $\lambda = \text{wavelength}$
 $\nu = \text{frequency}$

Speed of light:
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Wavevector
 $k = 2\pi/\lambda$

1 eV
 $2.4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
 $1.25 \mu\text{m}$
 502 cm^{-1}

➤ Energia: $h\nu$

➤ Quantità di moto: $h\nu/c$

➤ Momento angolare: $\pm \hbar$

Il momento angolare **intero**
(fotoni=bosoni) nasce da stati di
polarizzazione della radiazione

I fotoni sorgono come soluzione
della quantizzazione di energia
e.m. (quanti di oscillazione
armonica): *lo vedremo in seguito*

La luce di una sorgente laser “ideale” può essere convenientemente descritta con un
flusso di fotoni “tutti identici” (indistinguibili) tra loro

POLARIZZAZIONE ONDA E.M.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{e} \times \mathbf{k} B_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}$$

Il vettore $\mathbf{e}$ indica la direzione lungo la quale oscilla il campo elettrico ed è detto **vettore polarizzazione**. È importante ricordare che $\mathbf{e}$ è ortogonale al vettore d'onda $\mathbf{k}$, cioè alla direzione di propagazione; lo stesso vale per $\mathbf{e} \times \mathbf{k}$, cioè per la direzione di oscillazione del campo magnetico.

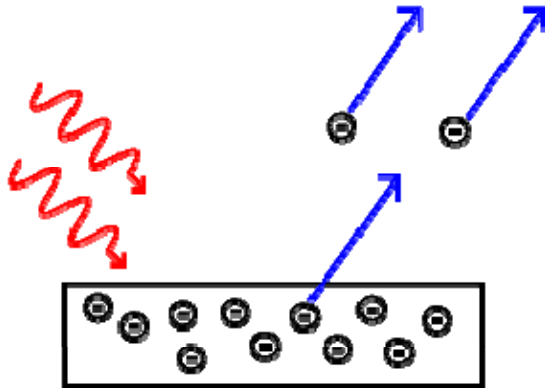
Se il vettore $\mathbf{e}$ ha tutte le componenti reali allora la radiazione si dice polarizzata linearmente: la direzione di $\mathbf{e}$ rimane costante nel corso del tempo. Consideriamo quindi due onde piane, di uguale ampiezza, polarizzate linearmente lungo due direzioni ortogonali, $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{e}'$ e sfasate di mezzo periodo, cioè $\varphi = 0$, $\varphi' = \pm\pi/2$. Sommando i due campi elettrici si ottiene il vettore polarizzazione risultante che ha una componente complessa

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e} + \mathbf{e}' e^{\pm i\pi/2} = \mathbf{e} \pm i \mathbf{e}' .$$

L'onda risultante è una radiazione elettromagnetica in cui l'intensità del campo elettrico, in un punto fissato, non varia ma la sua direzione ruota con frequenza angolare ω . La rotazione è in senso orario (*polarizzazione circolare destra*) per il segno + e antiorario (*polarizzazione circolare sinistra*) per il segno -. Se invece si considera un istante di tempo fissato, il campo elettrico forma spirali (destre o sinistre) lungo la direzione di propagazione $\mathbf{k}$.

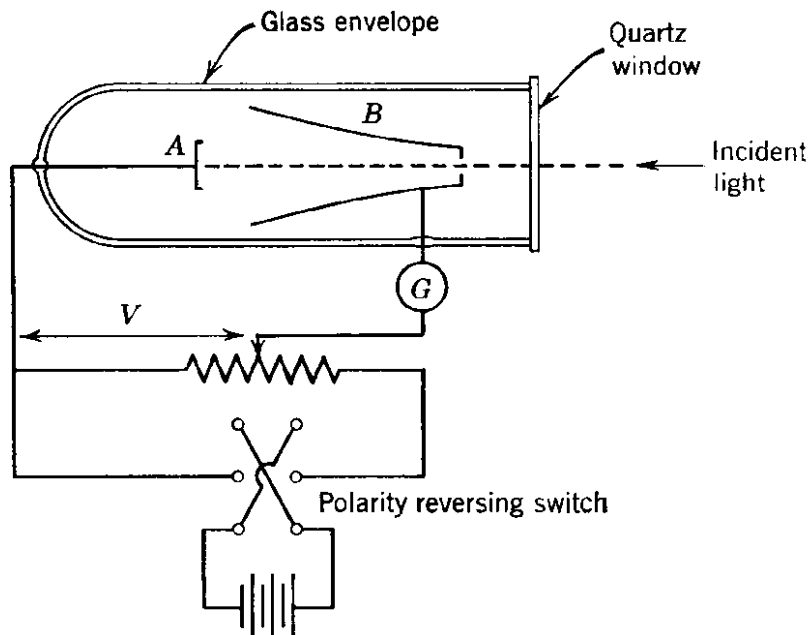
La radiazione e.m. (ad esempio, onda piana) ha una polarizzazione (direzione di oscillazione del campo elettrico) **sempre trasversale** alla direzione di propagazione (discende da eq. di Maxwell)
La polarizzazione può essere lineare o circolare
In ogni caso, esistono basi ortogonali per descrivere qualsiasi stato di polarizzazione
→ Esiste una “degenerazione” 2 per i fotoni (stessa energia ma diverse polarizzazioni)

EVIDENZE SPERIMENTALI FOTONI



2-2 THE PHOTOELECTRIC EFFECT

It was in 1886 and 1887 that Heinrich Hertz performed the experiments that first confirmed the existence of electromagnetic waves and Maxwell's electromagnetic theory of light propagation. It is one of those fascinating and paradoxical facts in the history of science that in the course of his experiments Hertz noted the effect that Einstein later used to contradict other aspects of the classical electromagnetic theory. Hertz discovered that an electric discharge between two electrodes occurs more readily when ultraviolet light falls on one of the electrodes. Lenard, following up some experiments of Hallwachs, showed soon after that the ultraviolet light facilitates the discharge by causing electrons to be emitted from the cathode surface. The ejection of electrons from a surface by the action of light is called the *photoelectric effect*. It is the phenomenon underlying the operation of the solar cells being developed to convert thermal energy received from the sun directly into electrical energy.



Effetto fotoelettrico

EFFETTO FOTOELETTRICO

Stopping potential indipendente da intensità radiazione

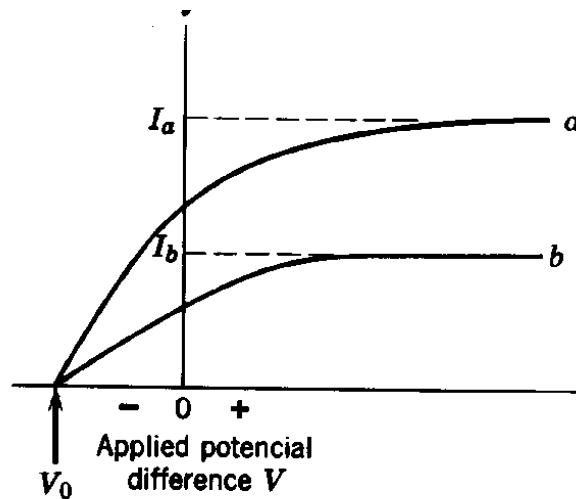
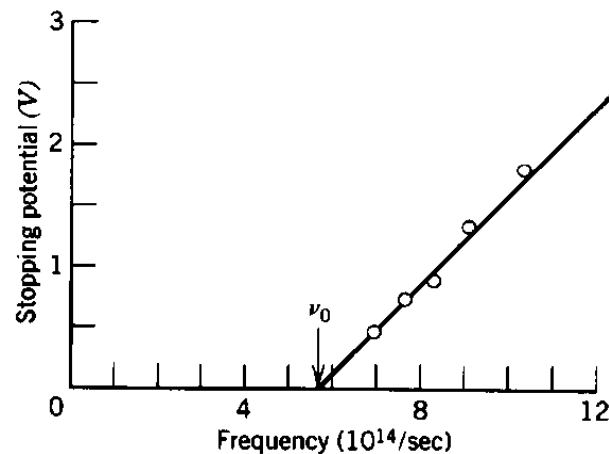


Figure 2-2 Graphs of current i as a function of potential difference V from data taken with the apparatus of Figure 2-1. The applied potential difference V is called positive when the cup B in Figure 2-1 is positive with respect to the photoelectric surface A . In curve b the incident light intensity has been reduced to one-half that of curve a . The stopping potential V_0 is independent of light intensity, but the saturation currents I_a and I_b are directly proportional to it.



Stopping potential lineare con frequenza radiazione

Figure 2-3 The stopping potential at various frequencies for sodium. The points show Millikan's data, except that the correction mentioned in the caption to Figure 2-1 has been recalculated using a recent measurement of the contact potential. The cutoff frequency ν_0 is 5.6×10^{14} Hz.

LIMITAZIONI TRATTAZIONE CLASSICA EFFETTO FOTOEL.

There are three major features of the photoelectric effect that cannot be explained in terms of the classical wave theory of light:

1. Wave theory requires that the oscillating electric vector E of the light wave increase in amplitude as the intensity of the light beam is increased. Since the force applied to the electron is eE , this suggests that the *kinetic energy* of the photoelectrons should also increase as the light beam is made more intense. However, Figure 2-2 shows that $K_{\max}$, which equals eV_0 , is *independent of the light intensity*. This has been tested over a range of intensities of 10^7 .

2. According to the wave theory the photoelectric effect should occur for any frequency of the light, provided only that the light is intense enough to give the energy needed to eject the photoelectrons. However, Figure 2-3 shows that there exists, for each surface, a *characteristic cutoff frequency* ν_0 . *For frequencies less than ν_0 , the photoelectric effect does not occur, no matter how intense the illumination.*

3. If the energy acquired by a photoelectron is absorbed from the wave incident on the metal plate, the “effective target area” for an electron in the metal is limited, and probably not much more than that of a circle having about an atomic diameter. In the classical theory the light energy is uniformly distributed over the wave front. Thus, if the light is feeble enough, there should be a measurable time lag, which we shall estimate in Example 2-1, between the time when light starts to impinge on the surface and the ejection of the photoelectron. During this interval the electron should be absorbing energy from the beam until it has accumulated enough to escape. *However, no detectable time lag has ever been measured.* This disagreement is particularly striking when the photoelectric substance is a gas; under these circumstances collective absorption mechanisms can be ruled out and the energy of the emitted photoelectron must certainly be soaked out of the light beam by a single atom or molecule.

Ragionando in termini di onde e.m. che interagiscono con metalli, non si spiegano i risultati sperimentali

INTERPRETAZIONE DI EINSTEIN (1905)

Einstein assumed that such a bundle of energy is initially localized in a small volume of space, and that it remains localized as it moves away from the source with velocity c . He assumed that the energy content E of the bundle, or photon, is related to its frequency ν by the equation

$$E = h\nu \quad (2-2)$$

He also assumed that in the photoelectric process one photon is completely absorbed by one electron in the photocathode.

When the electron is emitted from the surface of the metal, its kinetic energy will be

$$K = h\nu - w \quad (2-3)$$

where $h\nu$ is the energy of the absorbed incident photon and w is the work required to remove the electron from the metal. This work is needed to overcome the attractive fields of the atoms in the surface and losses of kinetic energy due to internal collisions of the electron. Some electrons are bound more tightly than others; some lose energy in collisions on the way out. In the case of loosest binding and no internal losses, the photoelectron will emerge with the maximum kinetic energy, $K_{\max}$. Hence

$$K_{\max} = h\nu - w_0 \quad (2-4)$$

where w_0 , a characteristic energy of the metal called the *work function*, is the minimum energy needed by an electron to pass through the metal surface and escape the attractive forces that normally bind the electron to the metal.

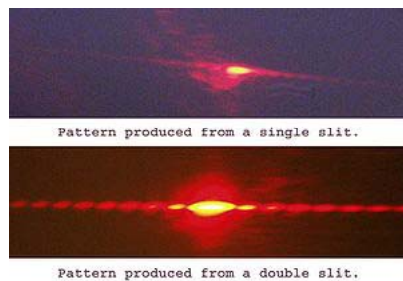
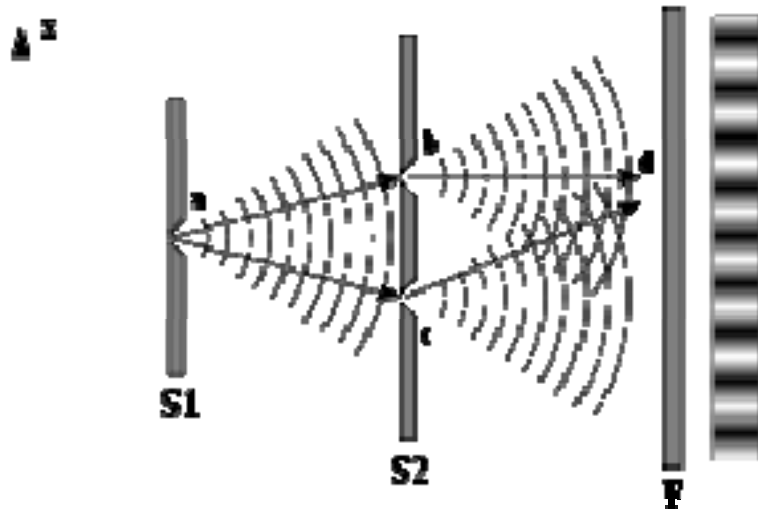
Consider now how Einstein's photon hypothesis meets the three objections raised against the wave theory interpretation of the photoelectric effect. As for objection 1 (the lack of dependence of $K_{\max}$ on the intensity of illumination), there is complete agreement of the photon theory with experiment. Doubling the light intensity merely doubles the number of photons and thus doubles the photoelectric current; it does *not* change the energy $h\nu$ of the individual photons or the nature of the individual photoelectric process described by (2-3).

Altri effetti “simili” (similmente spiegabili come “evidenza” fotoni):

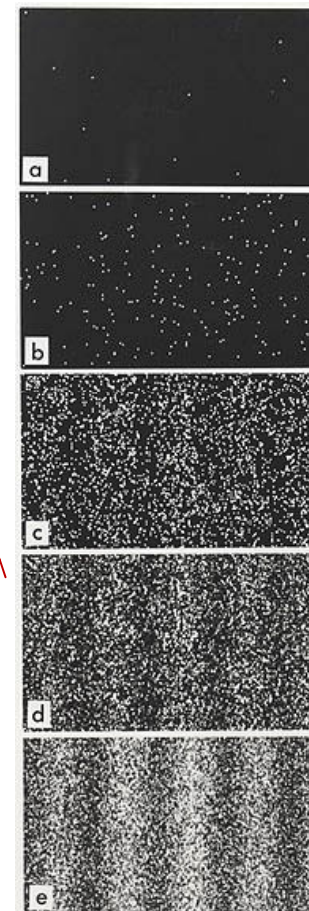
- Effetto Compton (fotoni raggi-X)
- Creazione di coppie e annichilazione (fotoni raggi-gamma)

ALTRE EVIDENZE DUALISMO ONDA/PARTICELLA

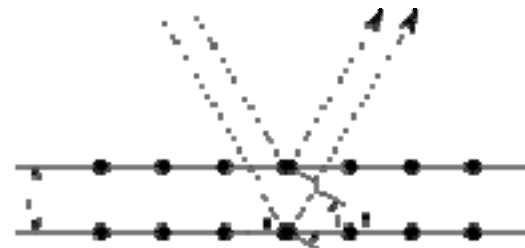
Esperimento doppia fenditura (Young)



Con luce (onde)
Con elettroni (particelle)



Anche: diffrazione Bragg da raggi-X e da elettroni (vedi TEM: serve per creare immagini e usa particelle...)

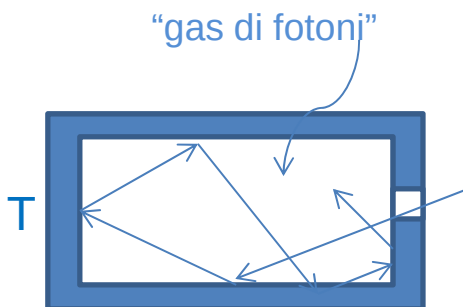


RADIAZIONE IN EQUILIBRIO CON SISTEMI MATERIALI

Sistemi materiali possono interagire con radiazione:
la radiazione può essere assorbita e riemessa dalla materia

Corpo nero: sistema materiale che assorbe tutta la radiazione
→ Equilibrio radiazione/materia ad una certa temperatura

In fisica un **corpo nero** è un oggetto che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente (e quindi non ne riflette). Il corpo nero, per la conservazione dell'energia, irradia tutta la quantità di energia assorbita (coefficiente di emissività uguale a quello di assorbività) e deve il suo nome solo all'assenza di riflessione. Lo spettro (intensità della radiazione emessa ad ogni lunghezza d'onda) di un corpo nero è caratteristico, e dipende unicamente dalla sua temperatura.



Modello:
scatola con pareti perfettamente riflettenti:
radiazione che entra non riesce più a uscire
ovvero
può uscire radiazione (da piccolo foro) senza perturbare sistema

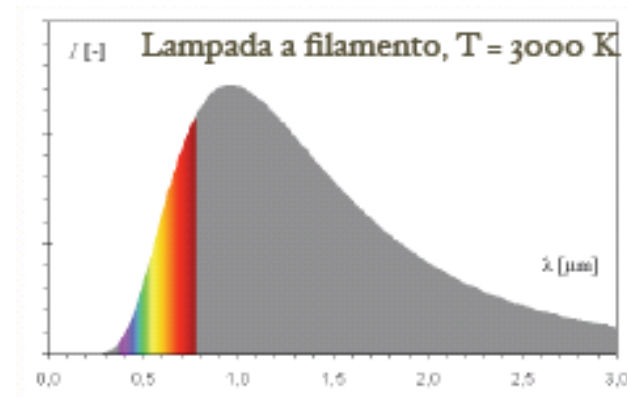
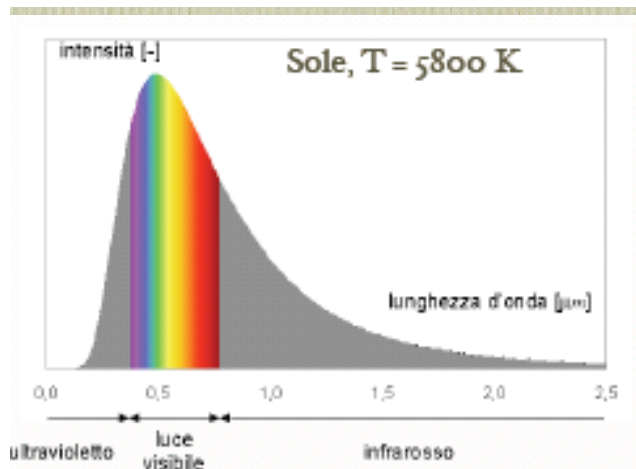
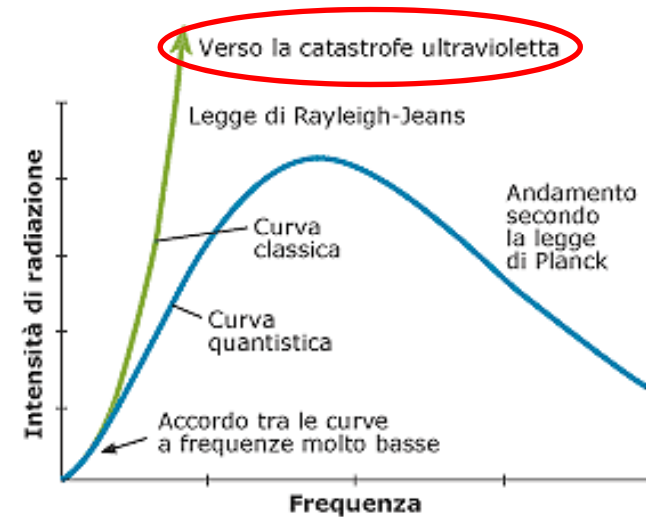
Spettro assorbito = spettro emesso (per corpo nero ideale,
altrimenti correzione di emissività)

Domanda: come dipende dalla T (del sistema) lo spettro di energia e.m. (il “colore”)?

IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

Storicamente (da fine '800): problema fondamentale con importanti implicazioni sul passaggio meccanica classica → MQ (Kirchoff, Planck, Einstein)

Prosaicamente: una lampadina alogena, cioè una sorgente convenzionale di luce, somiglia ad un corpo nero (nel suo filamento...)



Corpo nero: ottimo esempio di sorgente di luce “non laser” (non coerente)

IMPOSTAZIONE DELLA SOLUZIONE

Sto supponendo un “gas di fotoni”: classicamente attribuirei a ogni fotone un’energia e sommerei in modo da ottenere energia totale (lo spettro esce considerando la dipendenza dell’energia da lunghezza d’onda)

Problemi (discussi in seguito più in dettaglio):

- Quale energia ha un fotone? (funziona ancora principio di equipartizione?)*
- Quanti fotoni ho in quella scatola? (data una frequenza, cioè un’energia, del fotone, ho qualche limitazione nel numero di fotoni che posso mettere?)*
- Conoscendo la temperatura e supponendo equilibrio termodinamico, qual è la distribuzione che regola il numero di fotoni per una data frequenza a quella temperatura? (vale ancora la statistica che regola gli atomi di un gas?)*

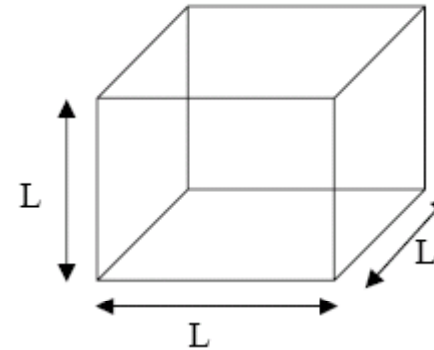
Vedremo che la natura quantistica dei fotoni porta a risposte diverse da quelle che si hanno per particelle dotate di massa, e.g., atomi di gas...

RADIAZIONE IN UNA SCATOLA

Nel nostro modello la radiazione è confinata in una scatola con pareti perfettamente riflettenti (e.g., conduttrici)

Schema del procedimento:

1. Modi di radiazione permessi;
2. Energia per ogni modo ed energia totale;
3. Numero di modi (densità degli stati);
4. Gas di fotoni e statistica quantistica

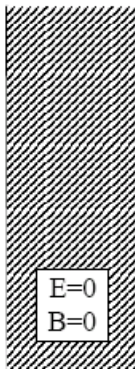


Boundary conditions at a metal:

Inside a perfect metal, $E=0$ and $B=0$ by definition.

Vacuum

Metal



In homework, you proved:

$$\vec{E}_{\parallel 2} = \vec{E}_{\parallel 1} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\parallel} = 0}$$

$$\vec{D}_{\perp 1} - \vec{D}_{\perp 2} = \rho_s$$

$$\vec{H}_{\parallel 2} - \vec{H}_{\parallel 1} = \vec{J}_s$$

$$\vec{B}_{\perp 1} = \vec{B}_{\perp 2} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{\perp} = 0}$$

Onde stazionarie

$$\vec{E}_{incid}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{y}$$

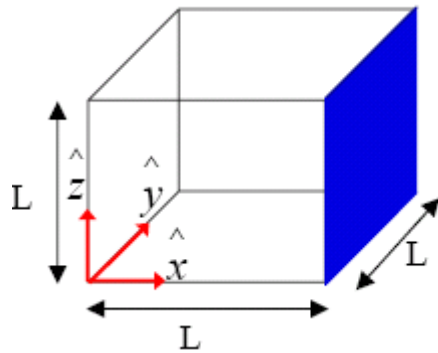
$$\vec{E}_{rifl}(x, t) = -E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{totale}(x, t) &= \vec{E}_{incid}(x, t) + \vec{E}_{rifl}(x, t) = \\ &= E_0 (e^{i(kx - \omega t)} - e^{i(-kx - \omega t)}) \hat{y} = \\ &= 2E_0 i e^{-i\omega t} \sin(kx) \hat{y} \end{aligned}$$

Nota: "fisicamente" "contano" le parti reali...

QUANTIZZAZIONE MODI

Boundary conditions:



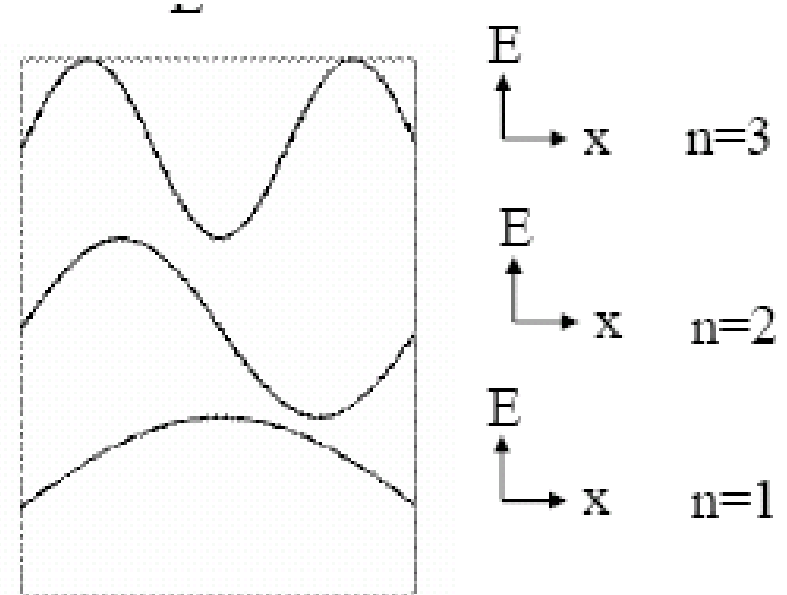
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[E_0 \hat{z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] + \text{Re} \left[E_0 \hat{z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \right]$$

The plane $x=L$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[E_0 \hat{z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] + \text{Re} \left[E_0 \hat{z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \right] \\ &= -E_{0\text{imag}} \hat{z} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - E_{0\text{imag}} \hat{z} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \\ &= -E_{0\text{imag}} \hat{z} [\sin(kL - \omega t) + \sin(kL + \omega t)] \quad \text{If and only if:} \\ &= -2E_{0\text{imag}} \hat{z} \sin(kL) \cos(\omega t) = 0? \end{aligned}$$

$$k_n = n\pi / L$$

$$\omega_n = ck_n = nc\pi / L$$



Condizioni al contorno ($E_{\parallel} = 0$ sulle pareti) della scatola) $\rightarrow$ modi quantizzati
 Numeri d'onda permessi sono multipli di π/L
 Nella scatola ci può "stare" un numero intero di $\lambda/2$

**Nota: altrove chiameremo la scatola cavità;
 altrove ci riferiremo a simili fenomeni come dovuti a una buca di potenziale**

ENERGIA NELLA SCATOLA

Energia e.m. da definizione u

Instantaneous energy per unit volume:

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \right]^2 + \mu_0 \left[\vec{H}(\vec{r}, t) \right]^2 \right)$$

Total energy in box:

$$U_{total} = \iiint_{box} u(\vec{r}, t) dV$$

It can be shown that for the box:

$$U_{total} = \frac{1}{2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)$$

So, the amount of energy in the box can have any value.

We will show that this leads to a problem and must be wrong.

The energy in the box must be quantized: these are *photons*.

Approcci classici portano a risultati assurdi (“catastrofe UV”) e diversi dalle risultanze sperimentali

Per calcolare lo spettro del corpo nero occorre prima di tutto determinare il numero di modi supportati dalla cavità

Energia modi da **equipartizione** (supponendo temperatura T)

According to the equipartition theorem from thermodynamics, every mode of the system has an average energy $\langle U \rangle = (1/2)k_B T$.

Note: This is already a problem. Energy infinite.

What is the energy per frequency, then we will integrate over frequencies?

There are many modes per unit frequency. Each has energy $k_B T$.

$$\epsilon(\nu) d\nu = \frac{1}{2} kT \cdot N(\nu) d\nu$$

- $\epsilon(\nu) d\nu$ is the energy between ν and $\nu + d\nu$.
- (This is the *spectrum* of the blackbody radiation.)
- $N(\nu) d\nu$ is the number of modes between ν and $\nu + d\nu$.

NUMERO DI MODI IN SCATOLA CUBICA LATO L

Modes per frequency $N(\nu)d\nu$

Recall:

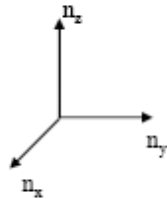
$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

How many modes have $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 < N^2$

I.E.

$$\nu < cN/2L$$

Easy:



$$\# \text{ of modes} = 2 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi N^3 \right)$$

$$\# \text{ of modes} = \int_0^{cN/2L} N(\nu) d\nu$$

$$\Rightarrow N(\nu) d\nu = \frac{1}{c^3} (8\pi) \nu^2 L^3$$

Scritto in altra forma, il numero di modi per l'intervallo di frequenze $\nu, \nu+d\nu$ è:

Ovvero, essendo $p = \hbar k = h/\lambda = h\nu/c$:

Ovvero, essendo $E = h\nu$:

Numero di modi rappresenta la densità degli stati fotonici
 $g(E) \sim E^2$ come per elettroni in cristallo

Problema!

$$N(\nu) d\nu = \frac{1}{c^3} (8\pi) \nu^2 L^3$$

$$\varepsilon(\nu) d\nu = kT \cdot N(\nu) d\nu$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot kT \cdot \nu^2 \cdot L^3$$

Rayleigh-Jeans law.

Experiments confirm at low frequencies only.

$$\Rightarrow \int_0^\infty \varepsilon(\nu) d\nu = \infty$$

$$g(\nu) d\nu = 2 \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 V$$

$$g(p) dp = 2 \frac{4\pi}{h^3} p^2 V$$

$$g(E) dE = 2 \frac{4\pi}{c^3 h^3} E^2 V$$

STATISTICA E DISTRIBUZIONI

L'energia del sistema (gas di fotoni nella scatola, ovvero modi di radiazione) è data da:

Energia di un modo $h\nu$ x numero stati $g(\nu)d\nu$ x occupazione media stati a frequenza ν

$$Ud\nu = h\nu g(\nu)d\nu \bar{n}(\nu)$$

$\bar{n}(\nu)$ rappresenta il numero di occupazione medio degli stati a frequenza ν

Occorre la statistica (termodinamica) per determinare il numero di occupazione medio, detto anche *funzione di distribuzione*, ad una data temperatura T

Generalmente dipende da energia (frequenza del fotone è proporzionale a energia)

Classicamente in un sistema all'equilibrio termodinamico la funzione di distribuzione è **Boltzmann**

$$\bar{n}(\nu) = e^{-\frac{E}{kT}}$$

$kT = 1/40$ eV
@ temp amb
($T \sim 300$ K)

Quantisticamente in un sistema all'equilibrio termodinamico la funzione di distribuzione è **Fermi-Dirac** (per “fermioni”, spin semi-intero) o **Bose-Einstein** (per “bosoni”, spin intero)

$$\bar{n}_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

$$\bar{n}(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Classico o quantistico dipende da vari parametri, tra cui la distanza media tra i componenti; essa può essere praticamente zero per i fotoni (non c'è alcuna repulsione né alcun principio di Pauli!!)

ENERGIA DEL CORPO NERO

$$Ud\nu = h\nu g(\nu) d\nu \bar{n}(\nu)$$

I fotoni hanno momento angolare intero ($L_z = \pm \hbar$)

→ si comportano da bosoni

→ seguono statistica di Bose-Einstein

$$\bar{n}(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

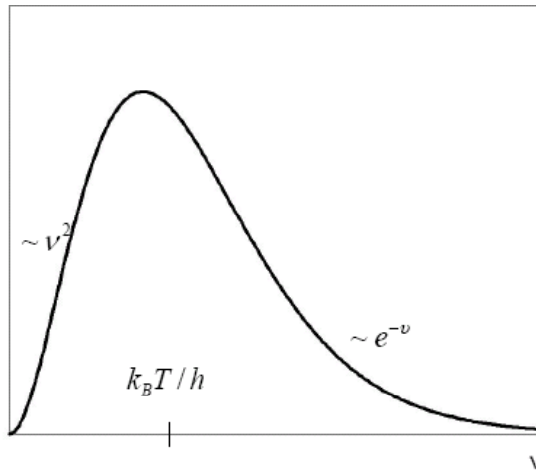
Nota: per $h\nu \gg kT$ è approssimabile con Boltzmann (classica): $e^{-h\nu/kT}$

$$u_\nu d\nu = \frac{Ud\nu}{V} = h\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

Spettro di Planck del corpo nero

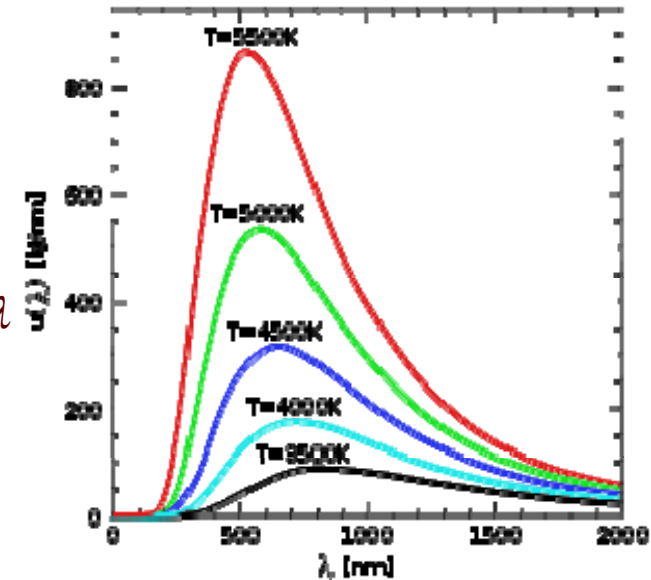
$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

SPETTRO DEL CORPO NERO



$$d\nu = d\left|\frac{c}{\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc^3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda(kT)}} - 1} d\lambda$$



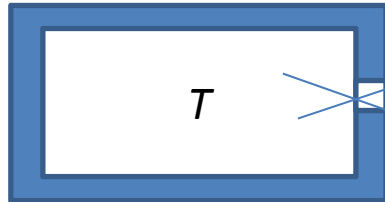
L'intensità della radiazione di un corpo nero alla temperatura T è data dalla [legge della radiazione di Planck](#):

$$I(\nu)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu$$

dove $I(\nu)d\nu$ è la quantità di [energia](#) per unità di superficie per unità di [tempo](#) per unità di [angolo solido](#), emessa nell'intervallo di frequenze compreso tra ν e $\nu + \delta\nu$ h è la [costante di Planck](#), c è la [velocità della luce](#) e k è la [costante di Boltzmann](#).

La lunghezza d'onda alla quale l'[intensità](#) della radiazione emessa dal corpo nero massima è data dalla [legge di Wien](#) ($\lambda_{max}T = costante = 2898\mu m \cdot K$), e la potenza totale emessa per unità di superficie (appunto, l'[intensità](#)) è data dalla [legge di Stefan-Boltzmann](#) $I = \sigma T^4$ (con $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$). Entrambe queste leggi sono deducibili dalla [legge della radiazione di Planck](#), la prima cercandone il [massimo](#) in termini della [lunghezza d'onda](#), la seconda [integrando](#) su tutte le [frequenze](#) e sull'angolo solido.

CORPO NERO vs LASER



È importante ricordare che un qualunque corpo che si trovi a temperatura $T \neq 0$ K è sorgente di radiazione elettromagnetica dovuta al moto di agitazione termica degli atomi che lo compongono. L'emissione di energia e.m. avviene a spese dell'energia termica. Dunque all'interno della cavità sarà sempre presente una radiazione termica, e nel caso in cui la temperatura rimanga costante (condizioni di equilibrio termodinamico) la distribuzione di radiazione viene detta spettro di corpo nero.

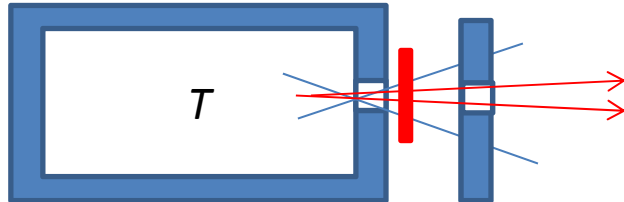
Caratteristiche della luce uscente da corpo nero (o sorgente termica convenzionale):

- ✓ Non monocromaticità: molti colori
- ✓ Non direzionalità: è come un gas (di fotoni) che esce da un forellino
- ✓ Coerenza temporale e spaziale: come in un gas all'equilibrio termico ogni molecola si comporta "a modo suo" (e.g., per la velocità), anche qui fotoni emessi non hanno relazione di coerenza tra loro

Il corpo nero produce luce convenzionale, ben diversa da laser!

Nota: vale anche per sistemi materiali in equilibrio termodinamico in cui si sfrutta emissione spontanea, e.g., lampade a scarica in vapori, LED, etc.

IDEA (NAÏF)!!



Potrei sempre pensare di mettere:

- Filtro spettrale per selezionare la lunghezza d'onda (colore)*
- Filtri spaziali per selezionare direzione (vettore d'onda)*

Stima grossolana: da 1 m³ di corpo nero a $T = 4500$ K, supponendo filtro colorato con $\Delta\nu = 1$ GHz (banda larga!!), avrei $U \sim 10^{-8}$ J; però, supponendo filtro spaziale che crea divergenza ~ 1 mrad, avrei $I = P/A \sim uc\Delta\Omega/4\pi \sim 0.1$ mW!!!

E poi non è mica coerente!! (E poi dovrei scaldare a 4500 K!!!)

Troppo poco efficiente!

Occorre altra strategia, se non altro per amplificare la radiazione

Amplificazione della radiazione è elemento essenziale del LASER (è nel nome!)

Come si fa ad amplificare la radiazione?

Occorre interazione con la materia (da trattare con MQ!!)

HIGHLIGHTS AND OUTLOOK

- ✓ L'approccio classico (radiazione come onda, materia come elettroni forzati) spiega molte evidenze sperimentali, ma **non** ammette amplificazione
- ✓ Considerando la radiazione come un insieme (o gas) di fotoni e supponendo equilibrio termodinamico con la materia si spiegano molte evidenze sperimentali delle sorgenti convenzionali, ma **non** si ottiene coerenza
- ✓ La MQ (fotoni) risulta necessaria per spiegare corpo nero
- ✓ La MQ (materia) risulterà necessaria per spiegare amplificazione, cioè possibilità di costruire un **L**Aser
- ✓ La MQ e l'elettromagnetismo classico spiegheranno come e in quale misura la radiazione laser abbia un carattere coerente

FONTI

G. Mondio , modello di Lorentz, <http://www.mi-ros.it/diplomiros/miro/mondio/lorentz.htm>

E. Arimondo, Struttura della Materia (ETS, 2005)

<http://www.wikipedia.org>

P.Burke, Lasers and Photonics, winter 2002 (uci.edu)

Eisberg Resnick, Quantum Physics of ... (John Wiley, 1985)

Frova & Mataloni

http://www.phys.uniroma1.it/DipWeb/web_disp/d6/dispense/Frova_Mataloni.pdf