

Scuola di Dottorato Leonardo da Vinci – a.a. 2010/11

# **LASER: CARATTERISTICHE, PRINCIPI FISICI, APPLICAZIONI**

Versione 3 – Nov 11 – <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

## **Parte 4**

### **Interazione radiazione/materia quantistica**

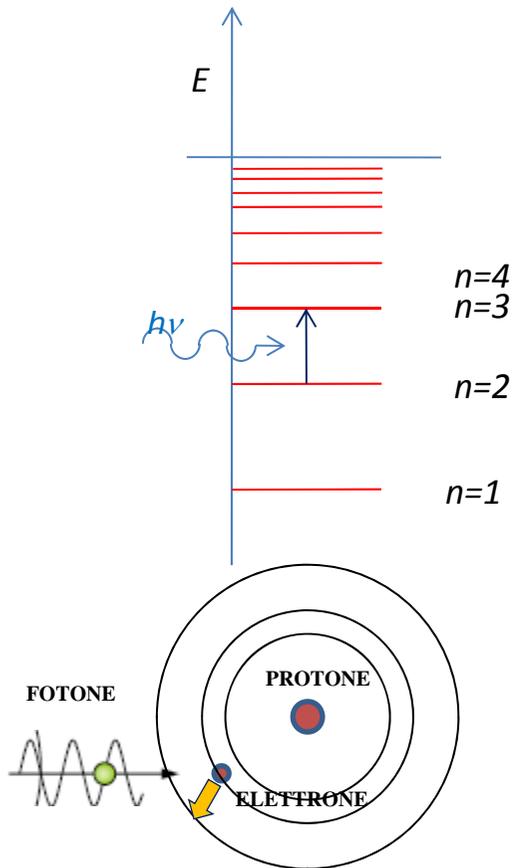
Lu 07.11.11 16-18 aula DIC

## SOMMARIO

- **Interazione radiazione materia in termini quantistici:**  
“urto” fotoni atomi di Bohr: conservazioni  
emissione spontanea e assorbimento
- **Interazione radiazione materia in termini semiclassici:**  
cenni trattamento perturbativo  
ampiezze di probabilità  
emissione stimolata
- **Sistemi a due livelli secondo Einstein:**  
assorbimento, emissione stimolata, emissione spontanea  
coefficienti di Einstein  
Interazione ad alta intensità e saturazione

**Obiettivo : mostrare che si può avere amplificazione di radiazione da parte di un mezzo materiale se si considerano sistemi quantistici e l'emissione stimolata**

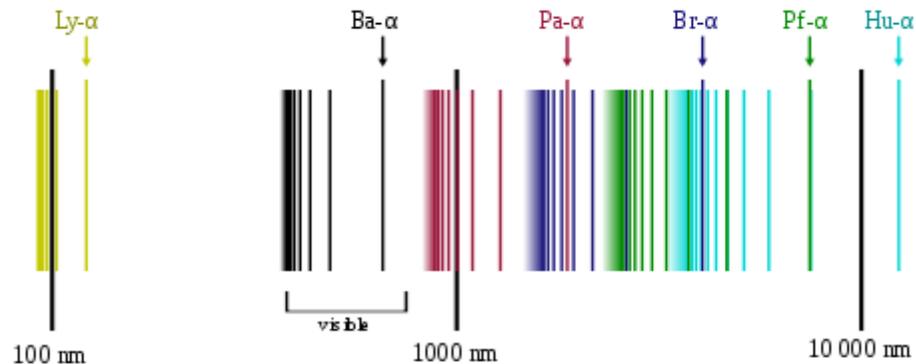
# ASSORBIMENTO NELL'OLD QUANTUM THEORY



Tra i vari meccanismi che popolano (in modo transiente) i livelli eccitati ci si aspetta sia possibile assorbimento di fotoni

Conservazione energia:  $h\nu = E_{fin} - E_{in}$   
 [Inoltre:  
 Conservazione quantità di moto  
 Conservazione momento angolare]

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (R = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1})$$

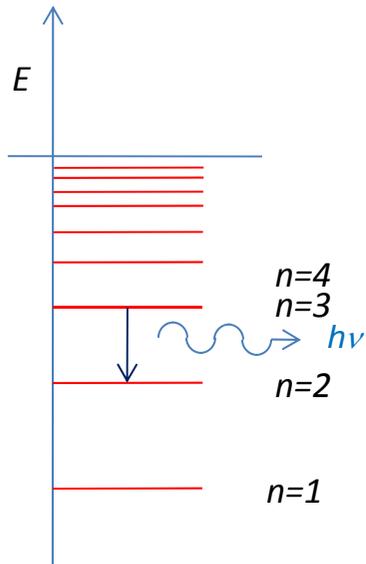


Serie di linee spettrali di Lyman, Paschen, Balmer

Ottimo accordo con le conoscenze sperimentali (spettroscopia) dell'epoca

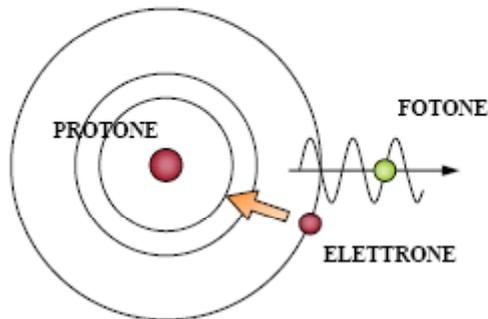
The spectral series of hydrogen, on a logarithmic scale.

# DECADIMENTO SPONTANEO NELL'OLD QUANTUM THEORY



Atomo in stato eccitato ( $n > 1$ ) tende a decadere a livelli di energia più bassa  
ovvero  
elettrone tende a saltare da un'orbita permessa di energia maggiore ad una di energia minore

La transizione da un livello all'altro di un sistema quantistico (a livelli discreti) coinvolge emissione di uno (o più) fotoni



Conservazione energia:  $h\nu = -(E_{fin} - E_{in})$   
[Inoltre:  
Conservazione quantità di moto  
Conservazione momento angolare]

## VISIONE ALLA SCHROEDINGER

Per Schroedinger esistono stati stazionari  $\psi_n$  (autofunzioni) con autovalori  $E_n$

$$dP(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}) = |\Psi_n|^2 d^3\vec{r} = |\psi_n|^2 |e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 d^3\vec{r} = \text{costante}$$

La densità di probabilità per un autostato è costante nel tempo!

Ma se ho stato descritto da combinazione lineare di autostati (e.g., un elettrone è passato a un livello eccitato):

$$\begin{aligned} dP(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}) &= |A\Psi_n + B\Psi_m|^2 d^3\vec{r} = \\ &= (|A|^2 |\psi_n|^2 |e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 + |B|^2 |\psi_m|^2 |e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}|^2 + \\ &+ A^* B \psi_n^* \psi_m e^{-i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t} + B^* A \psi_m^* \psi_n e^{-i\frac{E_n - E_m}{\hbar}t}) d^3\vec{r} = \\ &\neq \text{costante} \end{aligned}$$

Lo stato "misto" evolve nel tempo con frequenza  $|E_n - E_m|/\hbar$

## IRRAGGIAMENTO E DIPOLO (CLASSICO)

Ricordiamo:

classicamente irraggiamento (produzione onda e.m.) è dovuto a cariche accelerate

Dall'elettrodinamica dei potenziali ritardati si trova che la potenza irraggiata (integrata su tutto lo spazio) è:  $W \sim \mathbf{a}^2$  (accelerazione al quadrato)

Esempio: dipolo elettrico oscillante  $\rightarrow \mathbf{a}^2 \sim \omega^4 r^2 \sim \omega^4 \mathbf{p}^2$ , con  $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$

Formula di Larmor per la potenza irraggiata da dipolo oscillante (integrata nello spazio):

$$p : \text{momento di dipolo} \quad W = \frac{4\pi^2 \nu^4}{3\varepsilon_0 c^3} p^2$$

Se suppongo che la radiazione abbia frequenza  $\omega$ , ho rate di emissione:

$$R = \frac{W}{\omega} = \frac{4\pi^2 \nu^3}{3\varepsilon_0 c^3 h} p^2$$

# QUANTISTICAMENTE: VALORI DI ASPETTAZIONE E MISURE

Consider a particle and its associated wave function  $\Psi(x,t)$ . In a measurement of the position of the particle in the system described by the wave function, there would be a finite probability of finding it at any  $x$  coordinate in the interval  $x$  to  $x + dx$ , as long as the wave function is nonzero in that interval. In general, the wave function is nonzero over an extended range of the  $x$  axis. Thus we are generally not able to state that the  $x$  coordinate of the particle has a certain definite value. However, it is possible to specify some sort of *average* position of the particle in the following way. Let us imagine making a measurement of the position of the particle at the instant  $t$ . The probability of finding it between  $x$  and  $x + dx$  is, according to Born's postulate, (5-24)

$$P(x,t) dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) dx$$

Imagine performing this measurement a number of times on identical systems described by the same wave function  $\Psi(x,t)$ , always at the same value of  $t$ , and recording the observed values of  $x$  at which we find the particle. An example would be a set of measurements of the  $x$  coordinates of particles in the lowest energy states of identical simple harmonic oscillators. In three dimensions, an example would be a set of measurements of the positions of electrons in hydrogen atoms, with all the atoms in their lowest energy states. We can use the average of the observed values to characterize the position at time  $t$  of a particle associated with the wave function  $\Psi(x,t)$ . This average value we call the *expectation value* of the  $x$  coordinate of the particle at the instant  $t$ . It is easy to see that the expectation value of  $x$ , which is written  $\bar{x}$ , will be given by

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t) dx$$

The reason is that the integrand in this expression is just the value of the  $x$  coordinate weighted by the probability of observing that value. Therefore, we obtain upon integrating the average of the observed values. Using Born's postulate to evaluate the probability density in terms of the wave function, we obtain

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t) dx \quad (5-28)$$

The terms of the integrand are written in the order shown to preserve symmetry with a notation which will be developed later.

Esempio:  $\langle x \rangle = 0$  per particella libera

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x^2\Psi(x,t) dx$$

and

$$\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)f(x)\Psi(x,t) dx$$

where  $f(x)$  is any function of  $x$ . Even for a function which may explicitly depend on the time, such as a potential energy  $V(x,t)$ , we may still write

$$\overline{V(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)V(x,t)\Psi(x,t) dx \quad (5-29)$$

because all measurements made to evaluate  $V(x,t)$  are made at the same value of  $t$ , and so the preceding arguments would still hold.

Il valore "medio" di una grandezza (misurabile) su un sistema quantistico è definito come

$$\langle f \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t)f\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \langle \Psi^* | f | \Psi \rangle$$

La grandezza misurata dipende dalla "sovrapposizione spaziale" delle funzioni che compaiono nell'integrazione (di volume)

## MOMENTO DI DIPOLO

Quantisticamente posso calcolare il valore di aspettazione del momento di dipolo:

$$\langle \vec{p} \rangle = \langle \Psi | (-e\vec{r}) | \Psi \rangle = (-e) \int \Psi^* \vec{r} \Psi d^3\vec{r}$$

Su un autostato (funzione d'onda  $\Psi = \psi_n e^{-i(E_n/\hbar)t}$ ):

$$\langle \vec{p} \rangle \sim \int \Psi^* \vec{r} \Psi d^3\vec{r} = \int |\psi_n|^2 |e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 \vec{r} d^3\vec{r} = \int \vec{r} d^3\vec{r} = 0$$

Si suppongono autofunzioni normalizzate (modulo unitario)  
La "funzione"  $r$  è "dispari"!!

Su uno stato "misto" (funzione d'onda  $\Psi = A\psi_n e^{-i(E_n/\hbar)t} + B\psi_m e^{-i(E_m/\hbar)t}$ ):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle \sim \int \Psi^* \vec{r} \Psi d^3\vec{r} &= A \int |\psi_n|^2 |e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 \vec{r} d^3\vec{r} + B \int |\psi_m|^2 |e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}|^2 \vec{r} d^3\vec{r} + \\ &+ A^* B \left( \int \psi_n^* \vec{r} \psi_m d^3\vec{r} \right) e^{-i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t} + B^* A \left( \int \psi_m^* \vec{r} \psi_n d^3\vec{r} \right) e^{-i\frac{E_n - E_m}{\hbar}t} \end{aligned}$$

Contiene due termini che possono essere diversi da zero oscillanti a  $\omega = |E_m - E_n|/\hbar$

assorbimento

emissione

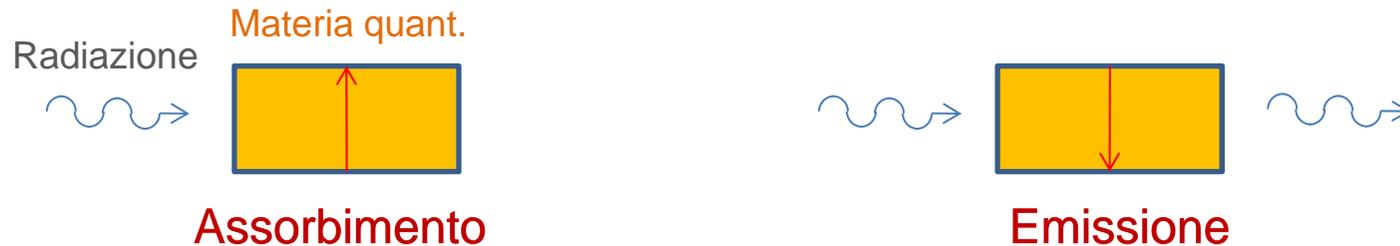
(compatibile con conservazione energia)

## TRANSIZIONI (DI DIPOLO) FRA STATI

Dunque: atomo può emettere o assorbire con processi che coinvolgono l'oscillazione (transiente) di un dipolo elettrico dovuta all'interazione di radiazione esterna con la materia

La formazione (transiente) del dipolo richiede *accoppiamento* tra stati diversi

Tale accoppiamento può essere realizzato con campi elettromagnetici esterni risonanti



Nota: in questo contesto l'emissione spontanea (da decadimento verso il livello fondamentale) è spiegata con fluttuazioni di radiazione del vuoto (elettrodinamica quantistica e seconda quantizzazione – non li vedremo!)

Nota: il problema può essere trattato in modo abbastanza rigoroso attraverso la teoria delle perturbazioni (ne vedremo ora qualche cenno) che permette di calcolare i rates di transizione

## TRATTAZIONE PERTURBATIVA

Suppongo di poter trattare l'interazione con la radiazione come una (piccola) perturbazione che non modifica la struttura atomica

Il potenziale visto dall'elettrone atomico è:  $V_0(\mathbf{r})+V'(\mathbf{r},t)$ , con  $V_0$  potenziale imperturbato (dell'atomo) e  $V'$  perturbazione

Inoltre pongo  $V'(\mathbf{r},t) = V'(t)$ , cioè assumo che la perturbazione sia vista allo stesso modo da tutto il sistema (valida per atomo, piccolo, in *approssimazione di dipolo*)

Descrivo il sistema con funzione d'onda che è sovrapposizione di autofunzioni (base ortonormale)

$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

(per semplicità tipografica immagino problema unidimensionale)

In generale: coefficienti dipendenti dal tempo!

Equazione di Schroedinger (dipendente dal tempo):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V_0(x) \Psi(x,t) + V'(t) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

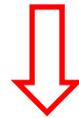
## CENNI DI SVILUPPO PERTURBATIVO I

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_n a_n(t) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} + V_0(x) \sum_n a_n(t) \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} + \\
 & + V'(t) \sum_n a_n(t) \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} = i\hbar \sum_n a_n(t) \frac{\partial \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}}{\partial t} + i\hbar \sum_n \frac{da_n(t)}{dt} \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}
 \end{aligned}$$

I termini in blu soddisfano l'eq. di Schroedinger del sistema imperturbato e se ne vanno

Moltiplico primo e secondo membro per  $\psi_m^*$  e integro nello spazio:

$$\int \psi_m^*(x) V'(t) \sum_n a_n(t) \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} dx = i\hbar \int \psi_m^*(x) \sum_n \frac{da_n(t)}{dt} \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} dx$$



$$\sum_n a_n(t) e^{-i\frac{E_n - E_m t}{\hbar}} \int \psi_m^*(x) V'(t) \psi_n(x) dx = i\hbar \frac{da_m(t)}{dt}$$

Dato che, per l'ortonormalità delle autofunzioni.  $\sum_n \int \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{nm}$

## CENNI DI SVILUPPO PERTURBATIVO II

Si ottiene dunque una sequenza di eq. diff. al I ordine

Lo sviluppo perturbativo prevede di mettere al primo membro i valori iniziali dei coefficienti  $a_n$

Ad esempio, si può immaginare di partire da uno stato con solo  $a_n \neq 0$

$$a_n(t) e^{-i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t} \langle \psi_m | V' | \psi_n \rangle = i \hbar \frac{da_m(t)}{dt}$$

La probabilità di transizione  $n \rightarrow m$  è allora data da  $P_{nm} = |a_m(t)|^2$

Si ottiene, sotto ragionevoli approssimazioni, che la probabilità è lineare con  $t$ :

$$P_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_m | V' | \psi_n \rangle|^2 t \delta(\hbar\omega \pm E_n - E_m = 0)$$

Dove la  $\delta$  tiene conto della conservazione dell'energia

Il rate di transizione (probabilità per unità di tempo) è allora:

$$R_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_m | V' | \psi_n \rangle|^2 \delta(\hbar\omega \pm E_n - E_m = 0) = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{nm}|^2 \rho(E)$$

Dove  $M_{nm}$  è detto elemento di matrice della transizione e  $\rho(E)$  è la distribuzione degli stati finali (la densità degli stati, nel caso in cui essi non fossero stretti come "delte", come vedremo)

## REGOLA D'ORO DI FERMI

Quanto trovato ha carattere piuttosto generale e prende spesso il nome di la regola di Fermi

In general conceptual terms, a transition rate depends upon the strength of the coupling between the initial and final state of a system and upon the number of ways the transition can happen (i.e., the density of the final states). In many physical situations the transition probability is of the form

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \rho_f$$

*Fermi's Golden Rule*

Transition probability      Matrix element for the interaction      Density of final states

Nota:  $\rho_f = \delta(E_f - E_i)$  per livelli idealmente "stretti"

A transition will proceed more rapidly if the coupling between the initial and final states is stronger. This coupling term is traditionally called the "matrix element" for the transition: this term comes from an alternative formulation of quantum mechanics in terms of matrices rather than the differential equations of the Schrodinger approach. The matrix element can be placed in the form of an integral where the interaction which causes the transition is expressed as a potential  $V$  which operates on the initial state wavefunction. The transition probability is proportional to the square of the integral of this interaction over all of the space appropriate to the problem.

$$M_{if} = \int \Psi_f^* V \Psi_i dv$$

Wavefunction for final state      Wavefunction for initial state

Operator for the physical interaction which couples the initial and final states of the system.

Si definisce probabilità per unità di tempo:

$$R_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \rho_f$$

(detta rate di transizione)

Perturbazione periodica  $\rightarrow$  rate di transizione costante  
(per transizioni "al primo ordine", i.e., un solo fotone)

## ELEMENTI DI MATRICE DI DIPOLO

Per perturbazione data da radiazione e.m., esempio:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{kx} - \omega t)} \mathbf{y} \rightarrow E_0 e^{-i\omega t} \mathbf{y} \text{ (appr. dipolo)}$$

si ha il potenziale di interazione perturbativa:

$$V' = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \text{ con } \mathbf{p} = -e\mathbf{r} \text{ (momento di dipolo)}$$

$$|M_{if}|^2 = E_0^2 \left| \int \psi_f^* (\hat{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{p}}) \psi_i d^3\vec{\mathbf{r}} \right|^2 = E_0^2 \langle \psi_f | (\hat{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{p}}) | \psi_i \rangle^2 = \frac{2u p_{if}^2}{c\epsilon_0}$$

con  $u = c\epsilon_0 E_0^2 / 2$  densità di energia della radiazione

Il rate di transizione di dipolo risulta infine:

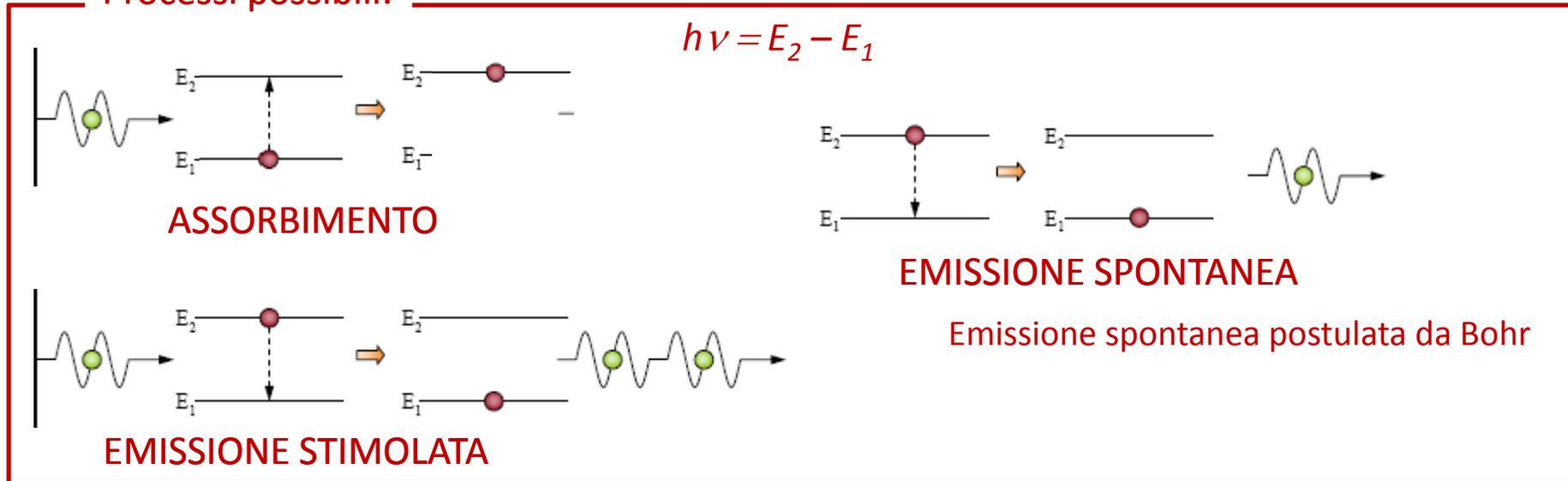
$$R_{if} = u \frac{4\pi}{\hbar c \epsilon_0} |p_{if}|^2 \rho_f$$

che posso scrivere come:  $R_{if} = u B_{if}$

Nota: la forma dell'elemento di matrice determina regole di selezione  $\rightarrow$  non tutti gli stati possono essere accoppiati (per dipolo elettrico)

## PROCESSI POSSIBILI (SECONDO EINSTEIN)

Processi possibili:



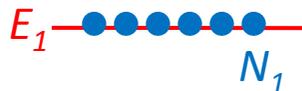
(introdotto da Einstein oltre un secolo fa)

Esistono due processi che dipendono da presenza di radiazione (risonante):  
Assorbimento e Emissione Stimolata, con rate  $B_{if}U$

Esiste anche un processo spontaneo che non dipende da radiazione:  
Emissione Spontanea, con rate  $A_{if}$

## EQUAZIONI DI BILANCIO PER SISTEMA A 2 LIVELLI

Per semplicità considero sistema (ideale) a 2 soli livelli



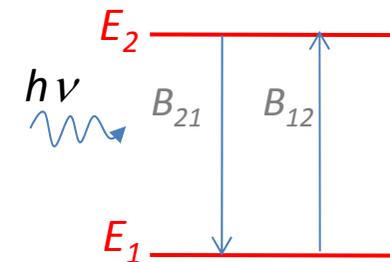
$N_1, N_2$  popolazioni dei livelli (numero o densità di sistemi che si trovano al livello 1 e 2 in un campione macroscopico)

All'equilibrio termodinamico vale Boltzmann:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{kT}\right)$$

Nota:  $kT \sim 1/40$  eV @ room temp, mentre  $\Delta E \sim$  eV  
 $\rightarrow N_2 \ll N_1$  in condizioni ordinarie

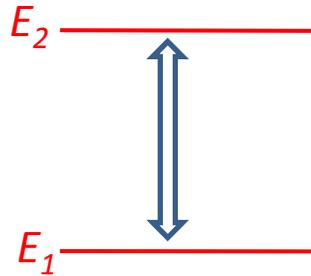
- Suppongo radiazione  $h\nu = E_2 - E_1$  (con densità di energia  $u_\nu$ )
- Considero solo:
  - Assorbimento  $1 \rightarrow 2$  con rate  $R_{12}$
  - Emissione stimolata  $2 \rightarrow 1$  con rate  $R_{21}$
- Assumo  $B_{12} = B_{21}$   
 Nota:  $B_{12}/B_{21} = g_1/g_2$  con  $g_j$  degenerazione del livello  $j$



$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}u_\nu N_2 + B_{12}u_\nu N_1$$

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21}u_\nu N_2 - B_{12}u_\nu N_1$$

## BILANCIO DETTAGLIATO ED EINSTEIN



Deve essere  $R_{12}=R_{21}$  (bilancio dettagliato per una “reazione chimica”)



Se  $B_{12}=B_{21} \rightarrow$  all’equilibrio  $N_1 = N_2$  : incompatibile con Boltzmann!!

Introducendo emissione spontanea  
(ragionamento di Einstein):  
rate  $A_{21}$  di emissione spontanea  
indipendente da  $u_\nu$

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}u_\nu N_2 + B_{12}u_\nu N_1 - A_{21}N_2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21}u_\nu N_2 - B_{12}u_\nu N_1 + A_{21}N_2$$

Posto  $B_{12}=B_{21}$ , all’equilibrio (soluzione stazionaria) si ha:

$$N_2^0 = N_1^0 \frac{B_{21}u_\nu}{B_{21}u_\nu + A_{21}}$$

Per soddisfare Boltzmann deve essere:

$$\frac{B_{21}u_\nu}{B_{21}u_\nu + A_{21}} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)$$

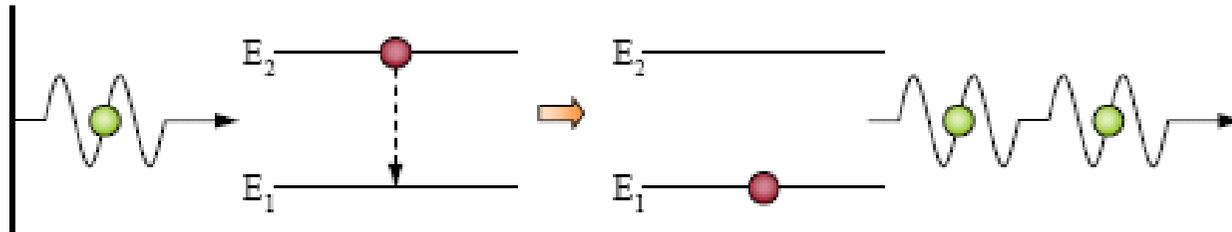
Per radiazione di corpo nero  $u_\nu = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$

da cui:

$$A_{21} = B_{21} \frac{8\pi h\nu^2}{c^3}$$

Il rate di decadimento spontaneo è  
proporzionale al valore di  $B$  (parametri  
“interni”) e al cubo della frequenza

## “CONFRONTO” TRA PROCESSI I



### EMISSIONE STIMOLATA

Esiste solo in presenza di radiazione (risonante)  
Da un fotone ne escono due (può amplificare!)

Il fotone emesso è indistinguibile da quello  
stimolante (emissione coerente)

$$A_{21} = B_{21} \frac{8\pi h\nu^2}{c^3}$$

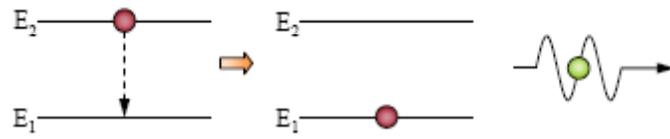


$$\frac{B_{21}u_\nu}{A_{21}} = u_\nu \frac{c^3}{8\pi h\nu^2} = \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} = \bar{n}_\nu$$

Con radiazione convenzionale  
(corpo nero) prevale sempre, in  
pratica, l'emissione spontanea, a  
meno di non avere  $T < 0$  (!!!)

Occorrono sorgenti “non convenzionali” (laser!) per sfruttare emissione stimolata

## “CONFRONTO” TRA PROCESSI II



**EMISSIONE SPONTANEA**

Rappresenta la tendenza di un sistema a tornare allo stato di energia più bassa  
In “seconda quantizzazione” si spiega con radiazione emessa da “fluttuazioni del vuoto”

**I fotoni sono emessi in modo casuale (incoerente) e generalmente isotropo**

Un campione eccitato (cioè preparato in modo da avere popolazione dei livelli eccitati) decade spontaneamente con vita media  $\tau = 1/A$

Valori tipici di  $\tau$  per transizioni elettroniche (atomiche/molecolari) permesse: 5-50 ns  
La vita media aumenta con  $\lambda^3$  (alle microonde  $\tau \sim \mu\text{s}$ , o maggiore)

**Nota: esistono anche altri processi di decadimento non radiativo (rilassamento) (e.g., collisioni fra atomi/molecole, interazione con fononi in solidi, etc.)**

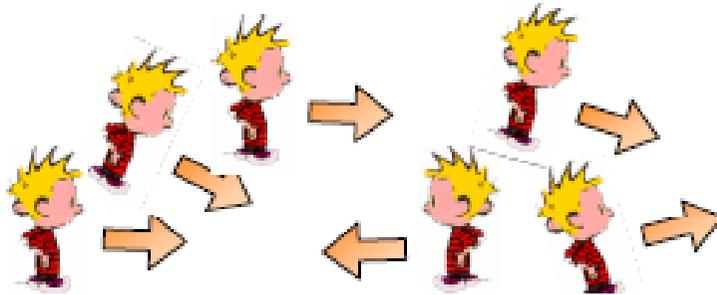
**Si ha allora:**

$$1/\tau_{\text{eff}} = 1/\tau_{\text{spont}} + 1/\tau_{\text{nonrad}}$$

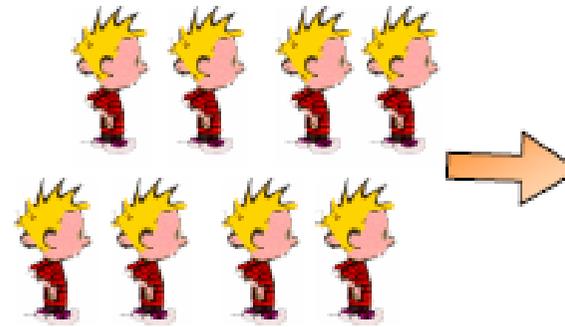
**La vita media effettiva è generalmente minore di quella spontanea (viene sempre soddisfatto principio di indeterminazione dato che  $\Delta\nu \sim 1/\tau$ )**

## “CONFRONTO” TRA PROCESSI III

In termini semplici possiamo pensare ad una sorta di “ordine” dei fotoni



EMISSIONE SPONTANEA

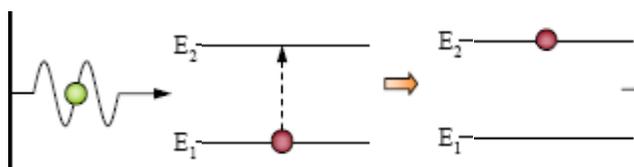


EMISSIONE STIMOLATA

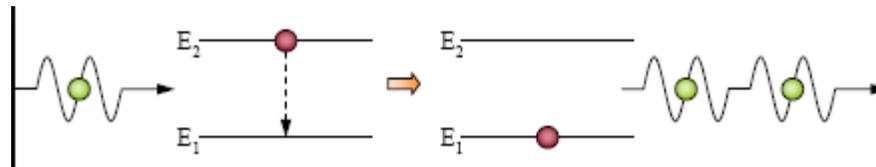
Fotoni emessi per emissione stimolata dipendono da oscillazione del dipolo sotto forzante del campo applicato → campo in fase, fotoni indistinguibili da eccitazione

Questo non avviene per emissione spontanea (processo che dipende da “fluttuazioni del campo e.m. del vuoto”, processo isotropo)

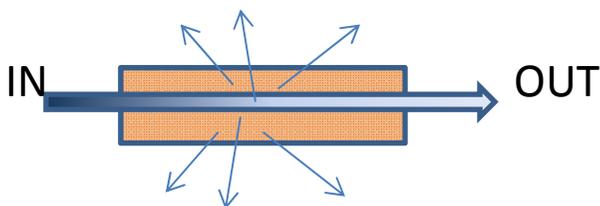
## INTERAZIONE RADIAZIONE MATERIA



Assorbimento: "sottrae" un fotone



Emissione: "aggiunge" un fotone



In prima approx posso trascurare emissione spontanea, dato che i fotoni hanno direzione casuale ed escono dal cono di accettazione del rivelatore

Nel mezzo:  $u_\nu = Fh\nu$   
Con  $F$  densità di fotoni



$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}Fh\nu N_2 + B_{12}Fh\nu N_1 - A_{21}N_2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21}Fh\nu N_2 - B_{12}Fh\nu N_1 + A_{21}N_2$$

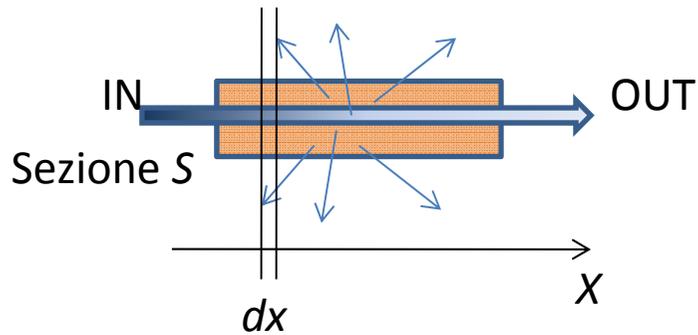
$$\frac{dF}{dt} = B_{21}Fh\nu N_2 - B_{12}Fh\nu N_1 + A_{21}N_2$$

Posto  $\Delta N = (N_2 - N_1)$ , se  $B_{12} = B_{21}$  e trascurando em spontanea si ha

$$\frac{dF}{dt} = B_{21}Fh\nu(N_2 - N_1) \propto \Delta N$$

Comportamento del mezzo dipende da inversione di popolazione

## COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO



La potenza all'interno del mezzo è:  $P = Scu_v$   
 L'intensità all'interno del mezzo è:  $I = P/S = cu_v$   
 La variazione di intensità sul volumetto  $Sdx$  è:

$$dI = \frac{dP}{S} = \frac{dU/dt}{S} = \frac{h\nu \frac{dF}{dt} Sdx}{S} = (h\nu)^2 FB_{21} \Delta N dx = u_v h\nu B_{21} \Delta N dx =$$

$$= \frac{I}{c} h\nu B_{21} \Delta N dx = I \alpha dx \rightarrow I(x) = I_0 \exp(\alpha x)$$

Il segno di  $\alpha$  (coefficiente di assorbimento) dipende da  $\Delta N$ :

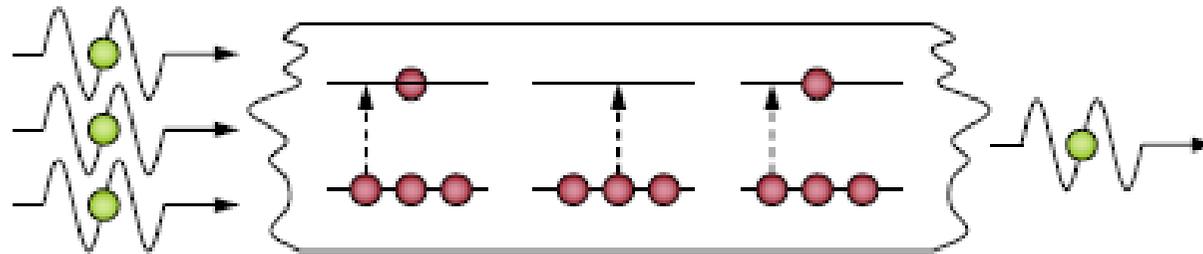
$\Delta N < 0 \rightarrow \alpha < 0$  (assorbimento in condizioni ordinarie)

$\Delta N > 0 \rightarrow \alpha > 0$  (amplificazione in condizioni di inversione di popolazione)

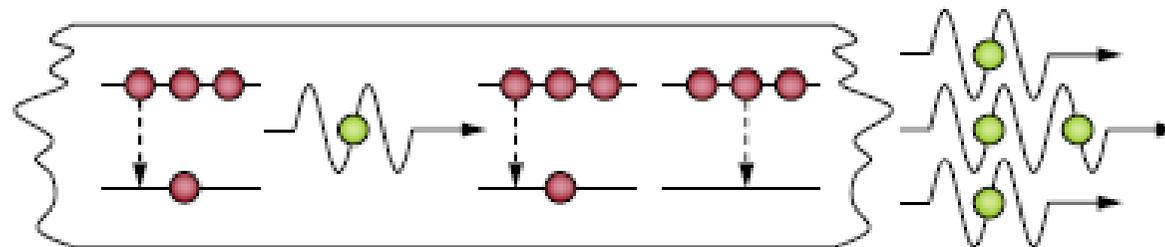
**Mezzo materiale in interazione con la radiazione può produrre amplificazione della radiazione stessa se la sua popolazione è invertita**

## ASSORBIMENTO/AMPLIFICAZIONE

In condizioni “ordinarie” (senza inversione) ho assorbimento  
(il numero di fotoni diminuisce):



Ma in presenza di inversione posso avere **amplificazione**  
(il numero di fotoni aumenta):



## RILASSAMENTO

In condizioni stazionarie e assenza di radiazione ( $u_\nu=0$ ) il sistema deve tendere alla situazione di equilibrio:

$$N_1 \rightarrow N_1^0 ; N_2 \rightarrow N_2^0 \text{ cioè } \Delta N \rightarrow \Delta N^0$$

Diversi meccanismi di rilassamento portano verso l'equilibrio:

- meccanismi radiativi (em spontanea per i livelli eccitati)
- meccanismi non radiativi (e.g., collisioni con perdita di energia)

Necessario introdurre nelle eq di bilancio termini per descrivere il rilassamento:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} \Big|_{\text{relax}} &= -\gamma_2 (N_2 - N_2^0) & \frac{dN_1}{dt} \Big|_{\text{relax}} &= -\gamma_1 (N_1 - N_1^0) \\ \text{con } \gamma_j \text{ rate di rilassamento: per semplicità poniamo } & \gamma_2 = \gamma_1 \end{aligned}$$

Equazioni di bilancio per sistema a due livelli con rilassamento

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -B_{21} u_\nu N_2 + B_{12} u_\nu N_1 - \gamma (N_2 - N_2^0) \\ \frac{dN_1}{dt} &= B_{21} u_\nu N_2 - B_{12} u_\nu N_1 - \gamma (N_1 - N_1^0) \end{aligned}$$

## SOLUZIONE STAZIONARIA E SATURAZIONE

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}u_\nu N_2 + B_{12}u_\nu N_1 - \gamma(N_2 - N_2^0)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21}u_\nu N_2 - B_{12}u_\nu N_1 - \gamma(N_1 - N_1^0)$$

$$\frac{d(\Delta N)}{dt} = \frac{dN_2}{dt} - \frac{dN_1}{dt} = -2B_{21}u_\nu \Delta N - \gamma(\Delta N - \Delta N^0) = 0$$



$$\Delta N = \frac{\gamma \Delta N^0}{2B_{21}u_\nu + \gamma}$$

Formulazione alternativa:

$$\Delta N = \frac{\Delta N^0}{\frac{2B_{21}u_\nu}{\gamma} + 1} = \frac{\Delta N^0}{\frac{I}{I_s} + 1}$$

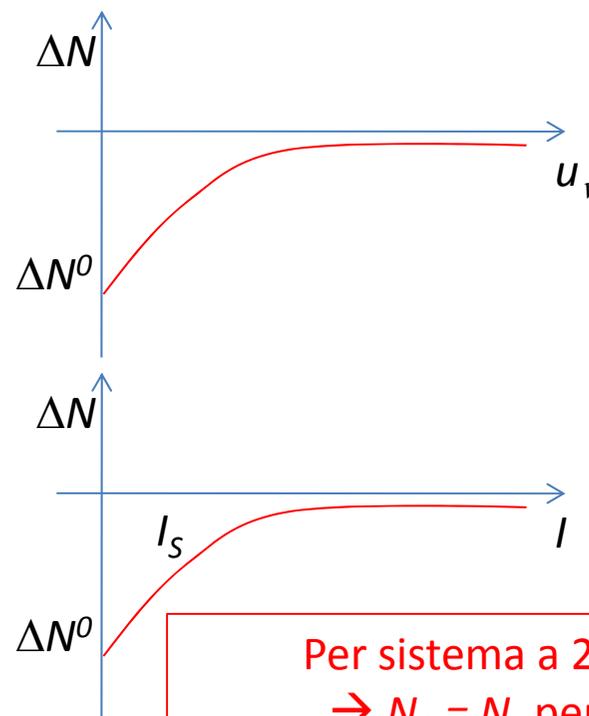
con  $I_s$  intensità di saturazione (dipende solo dal sistema)

$$I_s = \frac{2B_{21}u_\nu}{\gamma}$$

ovvero, tenendo conto della "forma di riga"  $g(\nu - \nu_0)$ :

$$I_s = \frac{2B_{21}u_\nu g(\nu - \nu_0)}{\gamma}$$

Inversione di popolazione in condizioni stazionarie



Per sistema a 2 livelli si ottiene  
 $\rightarrow N_2 = N_1$  per  $I \gg I_s$ ,  $\Delta N \leq 0$



Non può esserci inversione di popolazione

## CONCLUSIONI

In termini di old quantum theory, l'interazione radiazione materia è simile ad un urto (o frammentazione) fotone-sistema, dando luogo a leggi di conservazione specifiche

La trattazione della materia quantistica alla Schroedinger permette di descrivere e interpretare i meccanismi di assorbimento ed emissione

Lo sviluppo perturbativo porta a determinare le probabilità/rate di transizione

Tre meccanismi in particolare: assorbimento (come nel caso classico), emissione stimolata, emissione spontanea

Emissione stimolata può originare amplificazione di radiazione se si verifica inversione di popolazione

Non si può ottenere inversione di popolazione per un sistema a 2 livelli in condizioni stazionarie

Ohi ohi: come si fa, allora? (Lo vedremo alla prossima...)

## FONTI

E. Arimondo, Struttura della Materia (ETS, 2005)

<http://www.wikipedia.org>

D.Batani, Seminario Sicurezza Laser (UniBicocca)

W. Demtroeder, Laser Spectroscopy, (Springer, 1991)

Eisberg Resnick, Quantum Physics of.. (Wiley)